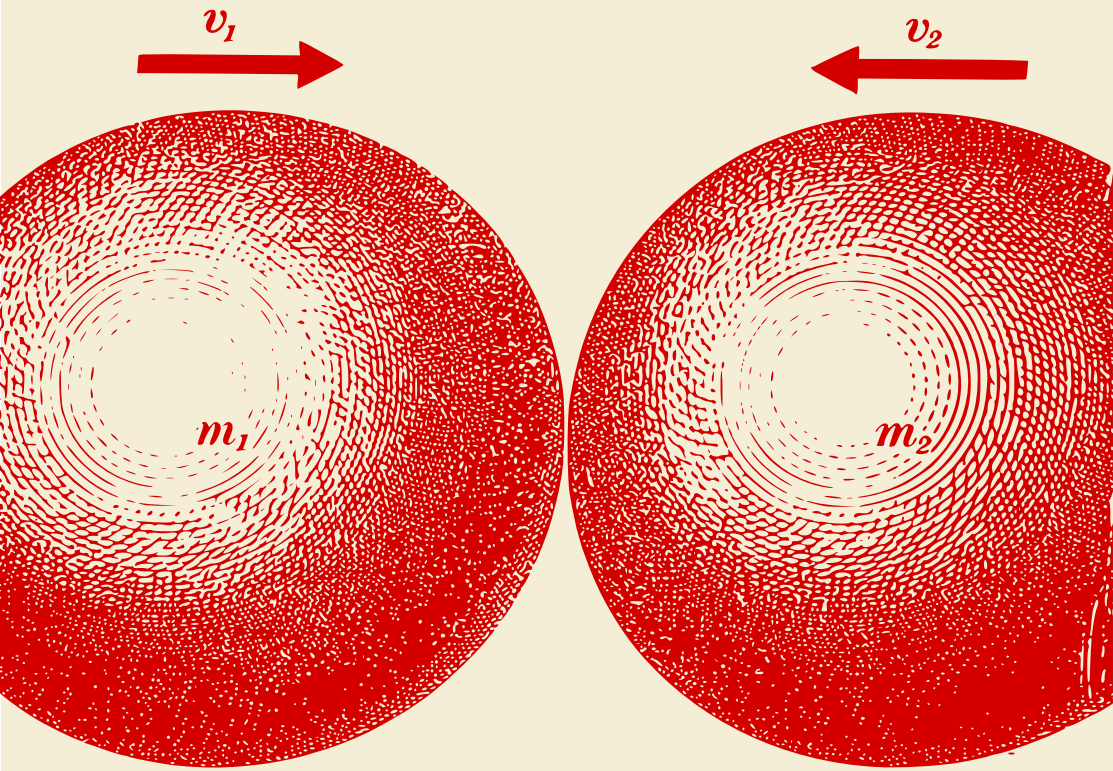
MÉCANIQUE

S. P. Strelkov



Éditions Mir • Moscou

С. П. СТРЕЛКОВ

МЕХАНИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

S. STRELKOV

MÉCANIQUE

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par O. Partchevski

На французском языке

© Главная редакция физико-математической литературы
издательства «Наука», 1975 г., с изменениями

© Traduction française Editions Mir 1978

INTRODUCTION

La physique est une des sciences fondamentales de la Nature qui étudie les lois des phénomènes matériels.

L'univers est constitué par un ensemble de corps matériels interagissant continuellement les uns avec les autres et se trouvant perpétuellement en mouvement. Tous les processus et phénomènes observés qui se déroulent dans la Nature obéissent à des lois bien déterminées. La découverte et l'étude des liaisons régulières entre les différents processus et phénomènes constituent l'objectif essentiel de toute science. L'analyse des lois du mouvement et de l'interaction des corps ainsi que des lois des phénomènes électromagnétiques appartient au domaine de la physique.

Il est très difficile de déterminer l'ensemble de phénomènes étudiés par la physique ainsi que de fixer les frontières conventionnelles de cette science ; on peut seulement affirmer que de nouvelles découvertes ainsi que de nouvelles applications techniques élargissent chaque année ces frontières. Ces derniers temps on voit se développer intensivement de nouvelles branches de la physique telles, par exemple, que la physique des plasmas, la physique des particules élémentaires, la physique des semi-conducteurs, la biophysique, la physique du corps solide, etc. Toutes ces matières sont abordées dans le cours de physique générale dont l'objectif essentiel est de *préparer à l'étude de nouvelles branches de la physique contemporaine.* L'étude détaillée de ces branches de la physique est principalement menée dans des cours spéciaux et en laboratoires prévus par le programme après le cours de physique générale. Sans la connaissance des lois fondamentales et des phénomènes se rapportant à la physique générale on ne peut aborder l'étude des cours spéciaux.

Le cours de physique générale se divise habituellement en plusieurs parties : 1) mécanique, 2) physique moléculaire, 3) électricité et magnétisme, 4) optique et 5) physique atomique et nucléaire.

Le mouvement de la matière prend des formes diverses : mécanique, électromagnétique, thermique, etc. La plus simple des formes du mouvement de la matière est la forme mécanique du mouvement : déplacement des corps l'un par rapport à l'autre et modification de la

forme du corps. Les lois du mouvement mécanique sont étudiées dans la première partie de la physique — la *mécanique*. L'étude des autres branches de la physique est impossible sans des connaissances mécaniques, car presque tous les phénomènes physiques donnent lieu à des déplacements.

Les cours spéciaux de mécanique se divisent habituellement en *trois* parties : la cinématique, la statique et la dynamique. La cinématique étudie le mouvement des corps indépendamment des causes qui provoquent ce mouvement ou le modifient. La statique étudie les lois d'équilibre d'un système de corps. La dynamique étudie les mouvements des corps ainsi que les causes qui les engendrent ou les modifient. Si l'on connaît les lois du mouvement des corps, on peut en dégager les lois d'équilibre. De sorte qu'en physique on n'étudie pas habituellement les lois de la statique séparément des lois de la dynamique.

En abordant l'étude de la mécanique dans le cadre d'un cours de physique générale, il est nécessaire de faire quelques brèves remarques générales se rapportant à la matière de la physique et aux méthodes de recherches physiques ainsi que de donner les définitions de certaines notions fondamentales.

Phénomène physique. Le phénomène physique (ou processus) est un ensemble de variations liées par des rapports de causalité que subissent des corps déterminés dans le temps. Toutes les variations se manifestant dans des phénomènes physiques sont appréciées *quantitativement* par des mesures.

Expérience physique. Les rapports réguliers entre les différentes variations subies par les corps sont étudiés au moyen d'*observations* des phénomènes se déroulant dans la Nature soit dans des conditions naturelles, soit en montant des expériences spéciales en laboratoires où sont garanties des conditions définies à l'enchaînement des phénomènes et où la liaison étudiée apparaît de la façon la plus claire et précise. Les expériences en laboratoire, les essais techniques, l'observation des phénomènes de la Nature sont à la base de toutes les assertions de la science physique et constituent le critère essentiel de la validité des jugements portés sur les lois régissant tel ou tel processus ou phénomène. La concordance des résultats de l'analyse scientifique avec ceux de l'expérience est justement le critère de l'exactitude et de la véracité de nos connaissances du monde environnant.

Mesures et grandeurs physiques. La physique appartient au groupe de sciences, dites exactes où la détermination quantitative des modifications observées tient un rôle essentiel. Dans des études physiques on détermine diverses grandeurs physiques comme, par exemple, la force, la vitesse, la longueur, la différence de potentiel, etc. Les *grandeurs physiques* définissent les propriétés des corps ou les caractéristiques du processus dont les modifications doivent

toujours être appréciées quantitativement au moyen de mesures, c'est-à-dire par comparaison de la grandeur donnée avec une grandeur déterminée de même espèce prise pour *unité*.

La mesure précise et exacte des grandeurs physiques au cours des observations et des expériences est la partie principale de toute étude scientifique en physique.

Lois physiques. Tous les phénomènes et tous les processus présentent entre eux des rapports de causalité déterminés. Sur la base des observations et des expériences, les scientifiques découvrent des liaisons régulières et établissent des rapports de cause à effet déterminés entre les variations des grandeurs différentes.

En se fondant sur l'analyse des résultats des observations et des expériences, on établit les principes fondamentaux de nature générale régissant les différents phénomènes. Ces principes généraux, appelés *lois physiques*, servent de position de départ à l'analyse de chaque phénomène concret.

Abstractions et généralisations. Dans l'analyse de processus complexes où il est difficile de suivre et de déceler les lois et les rapports de causalité fondamentaux par suite de la présence de liaisons et de dépendances complémentaires, on s'efforce, avant tout, de dégager les lois et les rapports *essentiels* en négligeant ceux qui sont *secondaires*. La pratique permettant de distinguer dans le processus le principal du secondaire s'acquiert par l'expérience. C'est ainsi que, par exemple, dans les expériences de laboratoire on observe que la chute d'une bille en acier se réalise de façon identique dans l'air et le vide, d'où l'on déduit que la force de frottement exercée par l'air se répercute très faiblement sur le mouvement de la bille, et que la chute de cette dernière dans l'air peut être considérée comme un mouvement uniformément accéléré sous l'action de la seule force de pesanteur, etc. En analysant un phénomène, on dégage l'essentiel, le principal, et l'on néglige le secondaire, le non essentiel ; on construit ainsi un certain *schéma* conventionnel du phénomène à l'aide d'*abstractions scientifiques*. Les abstractions sont des notions qui ne traduisent que certaines propriétés déterminées des objets ou certaines caractéristiques déterminées des processus. C'est ainsi, par exemple, que le point matériel, la ligne droite, la force appliquée à un point, le liquide parfait, etc. sont des abstractions.

Quand on utilise telles ou telles abstractions ou tels ou tels schémas ne reflétant que partiellement le processus réel ou ne décrivant qu'un aspect particulier du phénomène, il faut toujours se souvenir des *limites* des représentations schématiques et des abstractions.

Ainsi, par exemple, en mécanique, en analysant le mouvement des corps, on se sert de la notion du point matériel, mais on ne peut affirmer simplement que le corps considéré peut être assimilé à un point matériel ; il faut absolument mentionner dans quel mouvement ce corps peut être pris pour un point. Par exemple, le mouvement

annuel de la Terre autour du Soleil peut être confondu avec le mouvement d'un point matériel, tandis que le mouvement de la molécule ne peut être dans tous les cas représenté comme celui d'un point. Le point matériel est une abstraction permettant de définir certains aspects du mouvement du corps; ainsi, par exemple, en assimilant la Terre à un point matériel, on représente de façon correcte le mouvement de la Terre sur l'orbite, mais cette abstraction ne permet pas de faire apparaître la rotation de la Terre autour de son axe, etc.

Si l'on observe certaines différences entre les résultats de l'analyse théorique et l'expérience, il faut toujours vérifier de façon minutieuse la légitimité des généralisations effectuées dans le choix du schéma. Par exemple, dans nombre de phénomènes on peut considérer l'eau comme incompressible, car à des grandes variations de la pression le volume de l'eau se modifie si peu que pour des faibles variations de la pression on peut le considérer comme constant; cependant dans l'étude de la propagation des ondes sonores dans l'eau on doit tenir compte de la compressibilité de l'eau et cela quoique les variations de pression dans le cas des ondes sonores ne soient pas très grandes. Au cours de l'analyse des processus et des phénomènes il faut, dans chaque cas concret, savoir de façon précise quels sont les aspects du phénomène reflétés par le schéma adopté et quand et dans quelle mesure il est possible, sans commettre d'erreur, d'utiliser l'abstraction considérée.

Dans le choix du schéma d'un phénomène il faut être très attentif à la différentiation des échelles de grandeur. S'il est établi que la grandeur considérée est très importante, il doit être obligatoirement précisé par rapport à quelle grandeur elle est grande; ainsi, par exemple, pour la chute d'une bille dans une chambre le frottement de l'air est faible par rapport à la force de pesanteur.

Dans certaines expériences et certains phénomènes de faibles variations de certaines grandeurs jouent un rôle important, tandis que dans d'autres, au contraire, même des variations importantes n'influent pas sur le déroulement de l'expérience ou le phénomène. Seule une vérification minutieuse, répétée plusieurs fois, dans diverses expériences et par des calculs permet de s'assurer que l'abstraction adoptée est valable.

Etudes expérimentale et théorique. La physique est une science expérimentale: les données essentielles avec lesquelles elle opère ainsi que les déductions auxquelles aboutissent les physiciens ont leur source dans l'expérience. Toutefois sans une analyse théorique réalisée principalement avec des moyens *mathématiques* il serait impossible de procéder à une analyse détaillée des lois inconnues.

Dans l'étude des phénomènes ou des processus plus ou moins compliqués on se sert de modèles schématiques simulant et reflétant les facteurs essentiels et les lois hypothétiques mis en œuvre dans le phénomène. En se basant sur des hypothèses théoriques générales et

sur des faits connus à propos des phénomènes analogues, les scientifiques construisent le *modèle* admettant l'utilisation des méthodes d'analyse mathématique pour dégager les lois fondamentales ainsi que les détails complémentaires du processus étudié.

Les conclusions obtenues au moyen de calculs théoriques et exprimées par des rapports quantitatifs sont ensuite vérifiées par des mesures au cours des observations et des expériences en laboratoire. La comparaison des résultats confirme ou infirme la précision ou la conformité du modèle étudié. En tout cas cette confrontation contribue à la construction d'un modèle plus parfait qui, à son tour, est soumis à une analyse mathématique suivie d'une vérification expérimentale, etc.

Une telle interaction suivie de l'étude théorique et expérimentale est un processus ininterrompu et aboutit à une connaissance plus profonde des lois régissant les phénomènes étudiés. L'histoire des découvertes physiques fournit des exemples convaincants de la grande rentabilité de la collaboration des théoriciens et des expérimentateurs.

Durant les dernières décennies, cette collaboration dans la recherche se développe de façon accélérée. Les méthodes d'études expérimentales se perfectionnent et un appareil de mathématiques appliquées efficace est mis en œuvre en recourant à des ordinateurs de plus en plus perfectionnés.

Longueur et temps. Pour des phénomènes physiques différents on a recours à des grandeurs physiques différentes. Mais dans presque tous les phénomènes on se trouve en présence, à côté d'autres, de deux grandeurs : la *longueur* et le *temps*. Aussi peut-on considérer la longueur et le temps comme des grandeurs physiques de nature particulière.

La longueur permet de mesurer l'étendue d'un objet et le temps, la durée d'un processus ou d'un phénomène. La définition de ces grandeurs est étroitement liée aux notions de l'espace et du temps dans leur sens philosophique. Pour le matérialisme dialectique, l'espace et le temps sont des formes d'existence de la matière. En l'absence du temps et de l'espace il n'y a pas de matière, pas de phénomènes.

Tout corps a des dimensions déterminées. Ces dimensions sont définies par des grandeurs de longueur, de surface et de volume dont la notion est connue de la géométrie.

La grandeur fondamentale au moyen de laquelle on définit les propriétés spatiales du corps est la *longueur du segment* pris pour unité. En physique, l'unité de longueur est le *mètre*, distance délimitée par deux traits sur une barre étalon ; la surface et le volume se mesurent respectivement par le mètre carré et le mètre cube.

Le mouvement des corps s'effectue relativement l'un à l'autre, autrement dit au cours du mouvement il se produit une variation de

la disposition relative des corps ou des parties différentes d'un même corps (déformation).

Dans tout mouvement on est en présence au moins de deux corps, c'est pourquoi pour décrire le mouvement on peut prendre l'un des corps comme *corps de référence*. En principe, tout corps peut être pris pour corps de référence.

Le système de référence lié à un certain corps de référence peut se représenter, par exemple, par un système des coordonnées rectangulaires. La position de tous les points de l'espace se définit de façon univoque par rapport à trois barres droites rigides imaginaires, perpendiculaires entre elles, constamment reliées au corps de référence et passant par un certain point connu appelé *origine* du système des coordonnées. La longueur des segments de barres doit être mesurée avec une unité de longueur déterminée. Chaque point de l'espace sera alors défini par *trois* nombres, ses *coordonnées*, indiquant les valeurs numériques des distances le long des axes de chaque barre de l'origine jusqu'au pied de la perpendiculaire abaissée du point donné sur la ligne de l'axe de la barre.

Comme le montre l'expérience, dans les mouvements étudiés dans ce cours de mécanique les propriétés de l'espace ne dépendent pas du choix du corps de référence ainsi que de la direction du mouvement. Autrement dit, quand on passe d'un système de référence à un autre on ne doit tenir compte que des propriétés géométriques du système de référence et non pas des propriétés physiques des corps reliés au système de référence. Mais comme le montrent des recherches plus approfondies, cette représentation de l'espace n'est pas toujours exacte. Au cours de l'analyse des mouvements des corps dans certains phénomènes dont l'étude sort du cadre de notre cours il est nécessaire de tenir compte des variations correspondantes des propriétés de l'espace dépendant des propriétés des corps matériels (théorie de la relativité).

Le mouvement mécanique est une variation de la position du corps dans l'espace avec le temps. Le temps, comme il l'a été déjà mentionné, est la mesure de la durée du processus. On peut donc mesurer la grandeur du temps écoulé en évaluant la durée d'un certain processus (ou d'un phénomène).

La mesure du temps peut s'effectuer à l'aide d'un processus se répétant périodiquement (horloge). La régularité et la périodicité s'établissent par des expériences en comparant la durée d'écoulement de différents processus. Le temps durant lequel se réalise un processus déterminé est pris pour unité. En physique on choisit habituellement comme unité de temps la *seconde*, $\frac{1}{86\,400}$ du jour solaire moyen, c'est-à-dire le temps de la rotation complète de la Terre autour de son axe.

L'expérience montre que dans l'analyse des mouvements des corps se mouvant à une faible vitesse, très inférieure à celle de la lumière ($3 \cdot 10^{10}$ cm/s), on peut considérer que le temps ne dépend pas des propriétés des corps et de leur mouvement (*temps absolu* de Newton). On peut admettre que dans ces conditions l'écoulement du temps est *le même* pour des processus et des phénomènes différents, indépendamment de la nature du phénomène et des propriétés des corps participant à ce phénomène. Des études spéciales montrent que la durée d'un même processus rapporté à différents systèmes de référence mobiles l'un par rapport à l'autre dépend du mouvement relatif de ces systèmes. Par suite, pour des mouvements de corps à des vitesses quelconques il ne peut y avoir de temps *unique* pour des systèmes de référence différents (*théorie de la relativité d'Einstein*). Mais pratiquement cette différence est insignifiante pour des mouvements de vitesses ordinaires suffisamment petites par rapport à celle de la lumière.

Sans entrer dans les détails concernant la théorie de la relativité, il est nécessaire d'attirer l'attention sur le fait que le temps absolu invariable et uniforme des différents systèmes est une abstraction dont l'adoption se justifie par les expériences où les mouvements des systèmes de référence l'un par rapport à l'autre s'effectuent à des vitesses de beaucoup inférieures à celle de la lumière. L'ordre de l'erreur que cette abstraction engendre peut être représenté par la quantité $\beta = v^2/c^2$ (v étant la vitesse du mouvement du système de référence et c, la vitesse de la lumière). L'adoption du temps absolu et invariable pour un système en mouvement est d'autant plus justifiée que β est petit devant l'unité.

Dimensions des grandeurs physiques. Toute grandeur physique se définit sur la base des lois tirées de l'expérience. La valeur numérique de la grandeur physique s'obtient par mesure, par comparaison avec un certain étalon pris pour unité. Le choix de l'étalon ou de l'unité de mesure est en principe arbitraire. Il est tout à fait pensable que pour chaque grandeur physique on a choisi une unité tout à fait indépendante du choix de l'unité pour les autres grandeurs. Mais pour une série de raisons on n'agit pas ainsi en physique et on ne fixe arbitrairement les unités que de quelques grandeurs *fondamentales*, quant aux autres unités elles dériveront de ces dernières. Dans ce cas les unités fondamentales seront *simples* et les unités dérivées *complexes*. En effet, en utilisant les lois physiques connues, on peut trouver la relation reliant les unités des grandeurs physiques dérivées à celles des grandeurs physiques fondamentales. Cette dépendance sera fixée si l'on indique chaque fois le mode du choix des coefficients de proportionnalité dans les formules exprimant la loi physique. En définissant les unités des grandeurs dérivées, on s'efforce de rendre ces coefficients de proportionnalité aussi simples que possible.

En mécanique les unités fondamentales sont les unités de longueur et de temps, par exemple, le *mètre* et la *seconde* (1 m, 1 s). En outre on introduit en qualité d'unité fondamentale encore une unité, l'unité de masse, le *kilogramme* ou le gramme (1 kg, 1 g).

Plusieurs *systèmes* d'unités sont possibles, chacun se définissant par le choix des unités fondamentales. Actuellement il est convenu d'utiliser en physique le *système SI* (Système international).

Dans ce livre on utilisera le système d'unités SI et le système CGS.

Puisqu'il existe actuellement un grand nombre d'ouvrages techniques et de références où l'on se sert de systèmes d'unités des mécaniciens, ces derniers seront quelquefois utilisés pour exprimer la valeur des grandeurs physiques à titre de référence.

Les unités de toutes les grandeurs physiques dérivées dépendent du choix des unités de base. Les formules qui traduisent la relation entre les unités des grandeurs dérivées et fondamentales sont appelées *formules de dimensions*. Chaque grandeur a une *dimension* déterminée permettant d'évaluer les variations de l'unité de la grandeur dérivée en fonction de la variation des unités fondamentales. Ainsi, par exemple, si l'on désigne le temps par t et la longueur par l, la dimension de l'accélération a sera

$$[a] = lt^{-2}.$$

Cela signifie que l'augmentation de l'unité du chemin parcouru de n fois entraînera une augmentation de n fois de l'unité d'accélération. En augmentant de m fois l'unité de temps, on diminuera de m^2 fois l'unité d'accélération. Les formules de dimensions des unités des grandeurs dérivées reflètent les relations reliant les grandeurs physiques.

Physique et technique. La physique est très étroitement liée aux autres sciences, et, particulièrement, aux branches techniques de la connaissance. Les lois physiques constituent la base essentielle d'une série d'applications techniques.

Les découvertes et les recherches de nouvelles branches de la physique conduisent à de nouvelles applications techniques. La construction mécanique se base sur les lois de la mécanique, l'électrotechnique et la radiotechnique, sur les lois des phénomènes électromagnétiques, etc. Les acquis de la physique sont utilisés en technique pour la solution de problèmes pratiques; ainsi, par exemple, le fonctionnement des centrales sur la base de l'énergie atomique a engendré une nouvelle branche technique, l'énergétique atomique, dont l'idée quelque 30 années auparavant semblait du domaine de la fantaisie et cela quoique les grandes réserves de l'énergie interatomique étaient connues des physiciens depuis déjà 70 années. Les recherches dans le domaine du corps solide ont amené à la création de la technique des semi-conducteurs dont le développement est en plein

essor et qui a donné un coup de pousse à la radiotechnique, la technique des télécommunications, la technique des calculatrices ultrarapides, etc. De son côté le développement des sciences appliquées contribue au perfectionnement des méthodes de recherche en physique; par exemple, en radioastronomie les méthodes radiotechniques d'observation ont fourni des moyens efficaces d'étude des phénomènes astrophysiques, la création de puissants accélérateurs de particules chargées n'est devenue possible que grâce au haut niveau de la technique, etc. Les recherches cosmiques multiplient les problèmes qui se posent à la physique, en élargissant et en précisant nos conceptions sur les lois de la Nature.

Mathématique et physique. Le développement des mathématiques et de la physique (ainsi que d'autres sciences naturelles) est mutuellement dépendant. Sans la connaissance des mathématiques il est impossible d'étudier la physique et ceci ne serait-ce que du fait que les lois de la physique sont exprimées au moyen des nombres. C'est seulement en ayant recours à l'appareil mathématique qu'il devient possible d'analyser les lois complexes régissant les phénomènes physiques.

La mise en œuvre des méthodes mathématiques vise toujours, sous une forme ou une autre, à un objectif pratique, à fournir des méthodes d'analyse des lois de la Nature. Aussi l'étude de la physique est-elle étroitement liée à celle des mathématiques et ceci même dans la partie de la physique dite générale et expérimentale.

Bref historique de la mécanique. En abordant l'étude de la mécanique, il est utile de rappeler brièvement les principales étapes historiques de la mécanique. Le développement de la mécanique est indissolublement lié à l'histoire de la culture de la société humaine.

Les pyramides égyptiennes ainsi que les restes d'autres constructions antiques conservés jusqu'à nos temps permettent de supposer que les peuples anciens possédaient des notions déterminées sur les lois fondamentales de l'équilibre, sans la connaissance desquelles il serait impossible d'échafauder ces majestueuses constructions. Le philosophe grec Aristote (384-322 av. n.è.) dans sa « Physique » a résumé les connaissances des anciens en mécanique; toutefois la loi fondamentale reliant la force au mouvement y fut formulée de façon erronée, ce qui ne fut constaté que dix-neuf siècles plus tard. La loi de l'équilibre du levier, loi fondamentale sur laquelle est basée la construction de toutes les machines, et les lois d'équilibre des corps flottants furent énoncées de façon précise par le bien connu Archimède (III s. av. n.è.). C'est à partir de cette époque que commence le développement de la mécanique comme science dans son sens le plus complet. Les savants du Moyen Age ont acquis de nouvelles connaissances sur l'équilibre des corps et leurs propriétés, mais ils continuèrent à s'en tenir à la fausse conception d'Aristote sur la loi fondamentale du mouvement des corps.

C'est seulement au XVII s. que G. Galilée (1564-1642) a correctement formulé la loi fondamentale du mouvement des corps. C'est sur la base de cette loi et les découvertes des savants de son époque que le grand I. Newton (1643-1727) a établi quelques décennies plus tard les lois fondamentales du mouvement mécanique, en les formulant avec une telle netteté et concision qu'elles sont utilisées jusqu'aujourd'hui tant pour la solution des problèmes pratiques et techniques que dans les recherches scientifiques.

Des études postérieures ont permis de donner une forme plus générale aux lois fondamentales de la mécanique et de perfectionner les méthodes d'analyse des phénomènes mécaniques compliqués. Les résultats remarquables de ces études auxquelles appartiennent en premier lieu les travaux de L. Euler, D. Bernoulli, J. d'Alembert, J. Lagrange et autres savants célèbres sont rapportés dans les cours de mécanique rationnelle.

Une nouvelle étape dans le développement de la mécanique débute avec les travaux fondamentaux de A. Einstein (1879-1956) et de ses prédécesseurs. Ces travaux ont permis de procéder à d'importantes généralisations des lois de la mécanique englobant les lois du mouvement des corps à des vitesses quelconques, inférieures à celle de la lumière, et on peut considérer aujourd'hui la mécanique de Newton comme une partie de la mécanique d'Einstein.

Les lois du mouvement et de l'interaction des particules composant les atomes et les molécules ainsi que les mouvements s'effectuant dans des domaines très restreints de l'espace (de l'ordre de 10^{-10} m) diffèrent en principe des lois de la mécanique classique, des lois du mouvement des corps dits macroscopiques contenant une énorme quantité de molécules. Les lois des phénomènes interatomiques et intermoléculaires constituent le contenu de la *mécanique quantique* (ou *ondulatoire*). Il faut noter que la mécanique quantique, comme la mécanique d'Einstein, englobe aussi la mécanique classique de Newton dans certaines conditions bien déterminées auxquelles obéissent les phénomènes étudiés.

Les mérites d'une série de générations d'ingénieurs et de mécaniciens sont inestimables, car leurs travaux ont dans une grande mesure déterminé le niveau de la technique contemporaine, et les résultats pratiques ont confirmé la validité de nos connaissances en mécanique. Les recherches des savants du XIX s. et du siècle courant ont fortement élargi le cercle de nos connaissances en matière de phénomènes mécaniques.

PREMIÈRE PARTIE

MÉCANIQUE DU MOUVEMENT DES CORPS SOLIDES

CHAPITRE PREMIER

CINÉMATIQUE DU POINT

§ 1. MOUVEMENT DES CORPS

Si l'on observe attentivement le mouvement d'un corps quelconque, par exemple une roue qui roule, une automobile en marche, un grain de plomb en chute libre, ou un patineur glissant sur de la glace, etc., ce qu'on remarque en premier lieu c'est la diversité et la complexité du mouvement de ces corps. Tout corps — roue, automobile, moteur, etc. — peut être en pensée divisé en parties, chacune de ces parties exécutant un mouvement différent des autres.

Pour définir le mouvement des parties séparées, on peut, par exemple, procéder ainsi : fixer à une partie quelconque du corps une petite lampe allumée, puis photographier, l'appareil restant immobile et le corps en mouvement, en réglant l'exposition de façon qu'on n'obtienne sur le film que la trace de la lampe allumée. Connaissant l'échelle et le temps de pose, on peut de cette manière étudier les mouvements complexes. Par exemple, sur la figure 1, *b* on voit les traces de trois lampes fixées sur le manche d'un marteau avec lequel l'ouvrier frappe sur un clou (fig. 1, *a*). En fixant différemment les lampes, en les photographiant sous des angles variés et en allumant la lampe par intermittence, on étudie le mouvement de différents corps qui se déforment dans le mouvement.

Chaque lampe, avec la partie du corps qui lui est liée, effectue un mouvement suivant une ligne déterminée ; les dimensions de la lampe étant faibles, on n'observe sur la photographie que la ligne tracée par la lampe ; cette ligne est la projection du mouvement de la lampe sur le plan de la plaque photographique. Donc pour déterminer les lois du mouvement d'un corps complexe dont les parties sont animées de mouvements différents, il faut d'abord étudier séparément les lois du mouvement des différentes parties du corps.

Au cas où la position de la particule du corps (ou de tout le corps) se définit univoquement par la position du point sur la ligne,

on recourt en mécanique à la notion du point matériel. On peut identifier à un point matériel une petite partie du corps, suffisamment petite devant les dimensions de tout le corps, et même tout le corps si ses dimensions sont faibles par rapport à la distance parcourue par le corps dans le phénomène considéré. Ainsi, par exemple, le

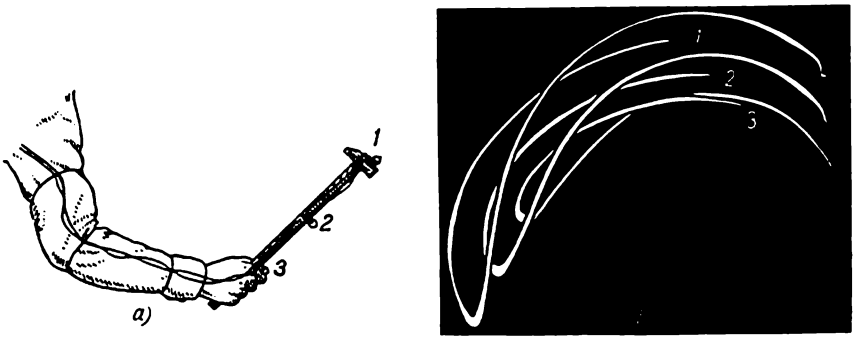


Fig. 1

mouvement annuel de la Terre autour du Soleil peut être identifié au mouvement du point matériel. Le mouvement de translation d'un corps solide peut toujours être représenté par le mouvement du point matériel, car la position d'une particule définit dans ce cas la position du corps entier. Connaissant les lois du mouvement du point matériel, on peut passer à l'étude des lois du mouvement des corps solides et des corps déformables. Ces corps peuvent se représenter comme un ensemble de points matériels liés entre eux.

Dans la suite on parlera tout simplement du mouvement du point, en laissant tomber le mot « matériel ».

§ 2. MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT

Le mouvement le plus simple d'un point, c'est son mouvement sur une droite. Avec le temps, le point se déplace sur une droite en s'éloignant d'un point donné de la droite ou en s'en approchant. La ligne droite dans ce cas joue le rôle de système de référence par rapport auquel on étudie ici le mouvement du point.

Si on connaît la coordonnée x (distance du point mobile d'un certain point O choisi sur la droite) comme une fonction du temps t, on peut dire qu'on connaît la loi du mouvement du point sur la droite. A des fins d'analyse il est commode de représenter graphiquement la dépendance de la coordonnée x du temps t (fig. 2), en portant à une certaine échelle sur l'axe des ordonnées la coordonnée x et sur l'axe des abscisses le temps t et en adoptant un segment déterminé pour unité de temps. Le graphique de la figure 2 permet de se représenter

complètement comment s'effectue le mouvement du point donné. Si avec l'accroissement de t la courbe $x(t)$ remonte, le point s'éloigne de O et, plus la pente de la courbe est grande, plus vite le point s'éloigne de O; les parties de la courbe parallèles à l'axe des abscisses correspondent à l'arrêt du point, la chute de la courbe vers le bas, au rapprochement du point de O, etc.

Pour obtenir l'abaque du mouvement d'un corps se déplaçant sur une droite et assimilé à un point matériel, il est nécessaire de mesurer la distance x à des instants connus t. La mesure de x peut s'effectuer de façon différente, par exemple, on peut à des instants déterminés réaliser des prises de vue instantanées du corps mobile avec un appareil immobile; on peut de même munir le corps mobile d'un dispositif qui après des intervalles de temps déterminés laissera des traces sur le corps immobile servant de support.

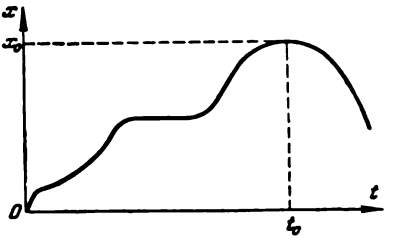


Fig. 2

Notons que de cette façon on détermine la coordonnée x du point à l'instant t et non pas le chemin parcouru par le point. Le chemin parcouru par le point ne peut être déterminé d'après sa coordonnée qu'au cas où le point se déplace dans la même direction. Par exemple, dans le mouvement correspondant au graphique de la figure 2 le point ne peut acquérir une coordonnée supérieure à x_0, or après l'instant t_0 le chemin $S(t)$ décrit par le point est supérieur à la grandeur x_0, tandis que la coordonnée x, au contraire, est plus petite que x_0. Si l'on fixe à des instants déterminés les indications du compte-tours d'une roue d'automobile, on obtient avec une certaine précision la dépendance du chemin de l'automobile du temps. Le mouvement dans une même direction fournit la coordonnée du mouvement, mais si le mouvement change de direction le chemin parcouru continue à croître, tandis que la coordonnée diminue.

La dépendance de la coordonnée du temps définit complètement le mouvement rectiligne du point, il est important cependant en mécanique de connaître encore deux grandeurs: la *vitesse* et l'*accélération*.

§ 3. VITESSE D'UN POINT DANS UN MOUVEMENT RECTILIGNE

La vitesse d'un point est une grandeur physique déterminant les variations de la coordonnée dans le temps. La grandeur *vitesse moyenne* est égale numériquement au rapport de la distance franchie par le point au temps mis à parcourir cette distance. Supposons qu'à l'instant t_1 le corps se trouvait au point x_1 et à l'instant t_2 au point x_2;

le chemin franchi est donc $x_2 - x_1$, alors la vitesse moyenne sera

$$v_{\text{moy}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \qquad (3.1)$$

Les distances parcourues se mesurent au moyen des unités de longueur (centimètre, mètre, kilomètre, pieds, etc.), tandis que le temps est mesuré au moyen des unités de temps (seconde, minute, heure, etc.). La vitesse est une grandeur physique dérivée, ce n'est ni une distance, ni un temps, c'est une grandeur possédant une unité *propre* qui dépend du choix des unités de la longueur et du temps. La dimension de la vitesse est égale au rapport de deux grandeurs de la longueur et du temps :

$$[v] = lt^{-1}. \qquad (3.2)$$

La vitesse se mesure en cm/s ou en m/s ou en km/h, etc.

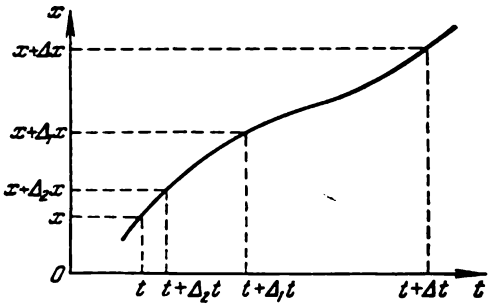


Fig. 3

Il est évident que la vitesse moyenne dépend de l'intervalle de temps pour lequel elle est déterminée. Si la vitesse moyenne pour *tout* intervalle de temps d'un mouvement considéré est la *même*, ce dernier s'effectue avec une vitesse constante et est appelé *uniforme*.

Sur le graphique de la dépendance de la coordonnée du temps le mouvement uniforme se représente par une droite. Notons que pour un mouvement uniforme à partir de l'origine des coordonnées il n'y a pas de différence entre les grandeurs de la coordonnée et du chemin parcouru.

Dans un mouvement non uniforme la vitesse moyenne n'est plus une grandeur constante, elle varie pour un même mouvement suivant l'intervalle de temps pour lequel elle se détermine. La vitesse moyenne ne traduit pas les variations du mouvement du corps en différents endroits du chemin. Aussi pour une caractéristique plus complète du mouvement introduit-on la notion de *valeur instantanée* de la vitesse à l'instant considéré du temps, ou la vitesse du point à l'instant donné t.

Supposons qu'on a déterminé le déplacement Δx du point durant un petit laps de temps Δt, alors la vitesse moyenne sur cette petite portion du chemin prend la valeur

$$v_{\text{moy}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Soit x la coordonnée du point à l'instant t (fig. 3), et $x + \Delta x$ à l'instant $t + \Delta t$. Supposons qu'il a été réalisé une série de mesures de Δx

pour différents $t + \Delta t$ diminuant successivement: pour $t + \Delta_1 t$, pour $t + \Delta_2 t$, etc. Il est évident que si les différentes valeurs $\Delta_i t$ et les valeurs $\Delta_i t$ correspondantes sont si petites que l'on peut considérer sur le segment $\Delta_i x$ le mouvement comme uniforme, on obtiendra des valeurs de vitesse identiques

$$_i v = \frac{\Delta_i x}{\Delta_i t}$$

pour une valeur Δt suffisamment petite. Cette valeur de la vitesse est justement la vitesse du point à l'instant donné t, ou mieux, au voisinage de l'instant donné.

Une définition mathématiquement plus rigoureuse de la vitesse du point à l'instant t s'écrit ainsi:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{3.3}$$

Cela signifie: la vitesse est justement la limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissement de la coordonnée Δx à l'accroissement correspondant du temps Δt pour Δt tendant vers zéro. En mathématique cette limite porte le nom de dérivée de la coordonnée x par rapport au temps et est désignée ainsi:

$$v = \frac{dx}{dt}. \tag{3.4}$$

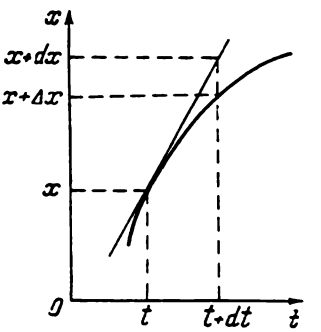


Fig. 4

Dans cette expression dt est égale par définition à Δt, et dx diffère de Δx correspondant par des grandeurs proportionnelles à dt^2, dt^3, etc. (fig. 4), Mathématiquement les expressions (3.3) et (3.4). montrent que la *grandeur vitesse est égale à la dérivée de la coordonnée par rapport au temps.* On peut représenter l'égalité (3.4) également sous la forme:

$$dx = v\,dt, \tag{3.5}$$

ou: un accroissement suffisamment petit de la coordonnée est égal au produit de la vitesse par l'accroissement du temps.

D'après le graphique établissant la dépendance de la coordonnée du point mobile du temps on peut, en principe, trouver la grandeur de la vitesse et tracer la courbe de sa dépendance du temps. Soit la courbe $x(t)$ (fig. 5, *a*) donnée à une certaine échelle. Posons que l'axe des abscisses t est divisé en des intervalles dt si petits que la portion de courbe $x(t)$ qui les surmonte peut être assimilée, avec un

haut degré de précision, à un segment de tangente [1]; dans ce cas la tangente tg $\alpha = \frac{dx}{dt}$ de l'inclinaison α de ce segment de tangente fournira la valeur numérique de la vitesse en unités qui sont fonctions des unités de longueur et de temps.

Il est évident que pour les valeurs du temps pour lesquelles la courbe $x(t)$ est presque droite (ou absolument droite), l'intervalle dt ne doit pas être nécessairement très petit, mais là où la courbe $x(t)$ s'incurve brusquement, les intervalles dt doivent être très petits pour une détermination précise de $\frac{dx}{dt} = v$, ce qui pratiquement est difficilement réalisable et, par suite, la précision de la détermination de la vitesse d'après le graphique pour ces instants s'avère insuffisante. Sur la figure 5, *b* sont données les valeurs de la vitesse $v(t)$ correspondant à l'abaque du mouvement $x(t)$ (voir fig. 5, *a*) à la même échelle des temps. La comparaison des graphiques montre qu'aux instants correspondant aux valeurs les plus grandes de la vitesse $v(t)$ on observe le plus grand accroissement de la coordonnée $x(t)$, c'est-à-dire une montée maximale de la courbe sur le graphique $x(t)$.

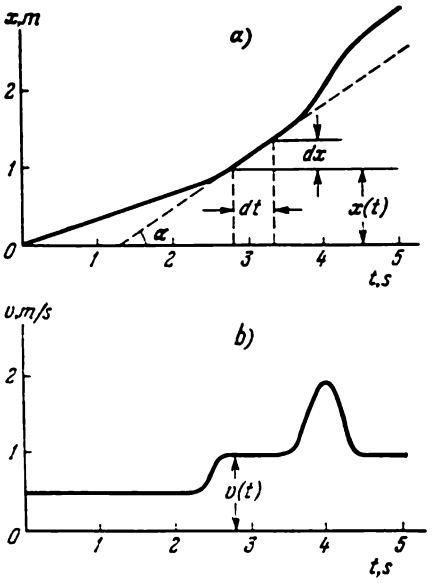


Fig. 5

La valeur de la vitesse du point à l'instant donné peut être trouvée en marquant les coordonnées mesurées après des intervalles de temps très petits, comme il l'a été indiqué plus haut, mais pratiquement cette méthode est fort peu commode. Il existe par suite une série d'instruments appropriés donnant directement la valeur de la vitesse du point matériel mobile. Ainsi, par exemple, la vitesse d'une automobile est indiquée par le compteur de vitesse.

La grandeur physique représentant la vitesse du point à l'instant donné détermine la rapidité des variations de la coordonnée dans le temps. L'existence de la grandeur physique telle que la vitesse du point à l'instant donné est la conséquence de la continuité des variations de la coordonnée dans le temps et du rapport de causalité entre la

[1] On appelle tangente à la courbe au point donné la position limite prise par la droite passant par ce point quand le second point d'intersection de cette droite avec la courbe tend indéfiniment vers le premier.

variation de ces grandeurs. La grandeur de la vitesse se définit par la différence de positions du point mobile en deux endroits de l'espace qu'il occupe à deux instants différents aussi rapprochés que l'on veut.

La définition précise de la valeur instantanée de la vitesse fut formulée par Newton; sur la base de cette définition il élabora les fondements de l'analyse des grandeurs infiniment petites.

§ 4. RELATION ENTRE LA VITESSE ET LA DISTANCE PARCOURUE

La distance parcourue par un point durant l'intervalle de temps $t_2 - t_1$ à la vitesse constante v_0 est évidemment égale au produit de la vitesse v_0 par le temps $t_2 - t_1$:

$$x_2 - x_1 = v_0 (t_2 - t_1). \tag{4.1}$$

Si la vitesse du point mobile n'est pas constante, cette expression est dénuée de sens. Connaissant la vitesse moyenne v_{moy} durant le temps $t_2 - t_1$, on peut exprimer la distance franchie par une formule analogue à (4.1), où au lieu de v_0 figure v_{moy}.

Au cas où la vitesse moyenne est inconnue, on peut mesurer la distance parcourue par le corps en utilisant une méthode spéciale s'appuyant sur le fait que tout mouvement durant un intervalle de temps suffisamment petit peut être considéré avec une précision suffisante comme uniforme. Par suite, pour déterminer la distance dx franchie par le corps durant un intervalle suffisamment petit dt, il faut multiplier la vitesse v à l'instant donné t par l'accroissement correspondant du temps dt. Ce produit, égal à $v\,dt$, correspond à l'accroissement de la coordonnée dx durant le temps dt:

$$dx = v\,dt. \tag{4.2}$$

Supposons ensuite qu'on ait partagé tout l'intervalle de temps $t_2 - t_1$ en un nombre infiniment grand de petits intervalles dt. A chaque petit intervalle dt correspond son petit accroissement dx. La distance $x_2 - x_1$ franchie durant le temps $t_2 - t_1$ peut s'écrire sous la forme de la somme de tous les dx. Cette somme s'appelle *intégrale* et s'écrit sous la forme

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx.$$

Au lieu de dx écrivons sous le signe de l'intégrale une grandeur qui lui est égale $v\,dt$ et sommons par rapport au temps de t_1 à t_2. Alors, le segment parcouru par le corps durant le temps $t_2 - t_1$ peut s'écrire

sous la forme

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt.$$

Le calcul de la grandeur $x_2 - x_1$ d'après la grandeur connue de la vitesse $v(t)$ constitue un problème de calcul intégral. L'intégration est une opération contraire à la dérivation, c'est-à-dire à l'obtention de la dérivée. La grandeur de la distance parcourue est égale

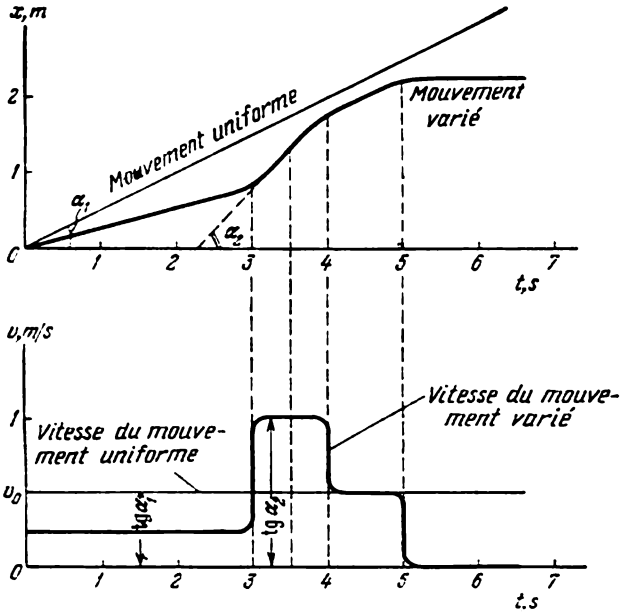


Fig. 6

à l'intégrale de la vitesse v par rapport au temps t. Le lien de causalité entre trois grandeurs physiques, la coordonnée, le temps et la vitesse, se définit mathématiquement par la dérivée et l'intégrale.

Sur la figure 6 on donne les abaques des coordonnées et des vitesses pour deux mouvements, l'un uniforme et l'autre non uniforme. Si l'on connaît l'abaque de la vitesse du mouvement $v(t)$, on peut, sur sa base, trouver l'abaque $x(t)$ [1] de ce même mouvement et, en pratique, d'une manière suffisamment précise. Sur la fig. 7, *a*, à une échelle déterminée, on a tracé la courbe de la vitesse v en fonction de t. Prenons le segment dt, alors l'aire $v\,dt$ (fortement ombrée sur la fig. 7, *a*), calculée en unités de mêmes échelles que celles adoptées

[1] Si l'on connaît la position du point à un instant déterminé du temps.

pour les grandeurs portées sur les axes, sera numériquement égale à l'accroissement x (t) durant le temps dt (fig. 7, b). La coordonnée

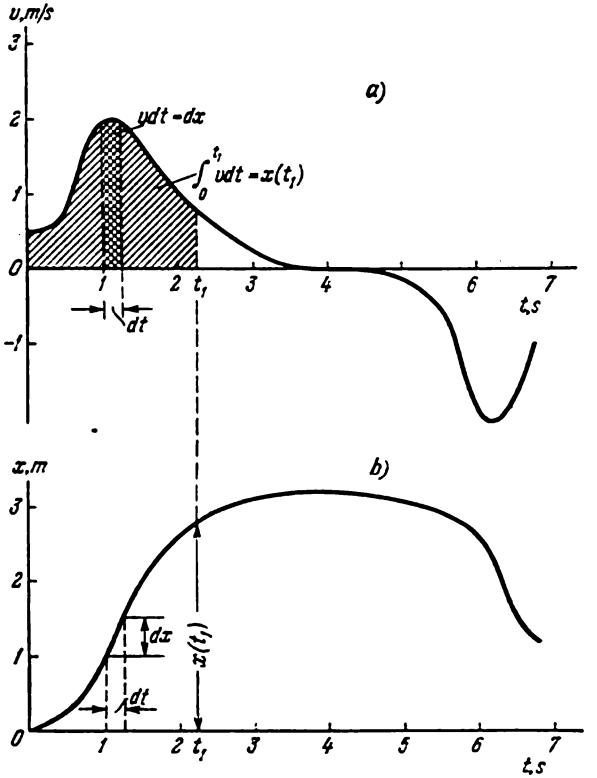


Fig. 7

du point à l'instant t_1 égale à x (t_1) sera évidemment égale à toute l'aire limitée par la courbe v (t) dans l'intervalle 0 — t_1, car

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} dx = \int_0^{t_1} v\, dt.$$

Donc, en calculant l'aire sous la courbe v (t) dans l'intervalle de $t = 0$ à $t = t_2$, on peut déterminer la coordonnée x pour tout instant t_2. Le résultat de l'intégration numérique est représenté sur la fig. 7, b. Une telle détermination de l'aire peut pratiquement être obtenue de façon suffisamment précise. Aussi le mode de détermination de la coordonnée d'après la vitesse donnée graphiquement est-il beaucoup plus précis que celui de la détermination de la vitesse d'après l'abaque de la coordonnée.

§ 5. ACCÉLÉRATION DANS UN MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT

Dans un mouvement non uniforme un point possède une vitesse variable qui, comme la coordonnée, peut être considérée comme une fonction du temps. La grandeur de la vitesse renseigne sur la rapidité de l'accroissement du mouvement d'un corps. Quant au renseignement sur la rapidité des variations de la vitesse, il est fourni par l'accélération.

L'accélération acquise par le corps au moment donné se définit de la façon suivante : soit v la valeur de la vitesse à l'instant t et la valeur $v + dv$ à l'instant $t + dt$, dv étant une quantité infiniment petite ; le rapport

$$w = \frac{dv}{dt} \tag{5.1}$$

est appelé *accélération. La grandeur de l'accélération est égale à la dérivée de la vitesse par rapport au temps.*

La dimension de l'accélération est égale au rapport des dimensions de la vitesse et du temps :

$$[w] = \frac{[v]}{[t]} = lt^{-2}. \tag{5.2}$$

Si la vitesse est mesurée en m/s et le temps en secondes, l'accélération sera mesurée en m/s^2. Les unités de vitesse et d'accélération n'ont pas en général d'appellation. En navigation on utilise une unité de vitesse portant le nom de « nœud », le nœud étant la vitesse d'un navire parcourant un mille marin 1853 m par heure. En technique on exprime quelquefois l'accélération en fractions de l'accélération dans le vide du corps en chute libre au voisinage de la surface de la Terre, dans ce cas la grandeur de l'accélération, égale à 981 cm/s^2, est prise pour unité. Habituellement en physique et en technique, pour les calculs, on utilise des grandeurs d'unités de la vitesse et de l'accélération en fonction du choix des unités fondamentales : de la longueur et du temps.

Dans un mouvement uniformément accéléré, la vitesse augmente (ou diminue) régulièrement avec le temps, quant à la coordonnée, elle croît (ou diminue) comme t^2. Un exemple de mouvement rectiligne uniformément accéléré est la chute du corps sur la Terre.

Déjà Galilée, en analysant des expériences sur la chute des corps dans l'air, avait constaté que l'accélération de tous les corps projetés vers le haut (au voisinage de la surface terrestre) dans leur vol ascendant comme dans leur chute était la *même* (à condition de négliger l'influence de l'air). Cette accélération dépend de la latitude du lieu (à celle de Moscou elle est à peu près de 9,81503 m/s)^2. On a donné sur la figure 8 les abaques de l'accélération, de la vitesse et de la

coordonnée d'un corps projeté verticalement vers le haut dans le vide.

La chute du corps dans le vide est un exemple de mouvement uniformément accéléré. Si, par contre, l'accélération varie dans le temps, cela entraînera évidemment une certaine variation de la vitesse

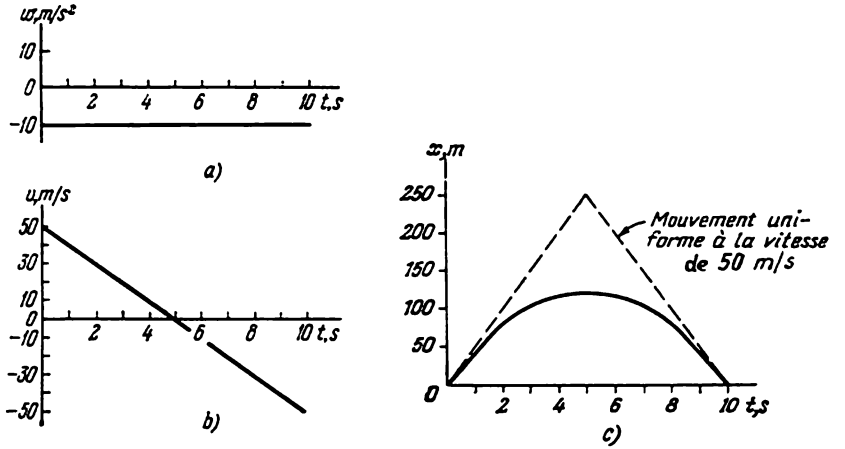


Fig. 8

qui ne sera plus linéaire comme dans le cas du mouvement uniformément accéléré. En raisonnant comme dans le cas de la vitesse variable, on établit que *la variation de la vitesse durant un certain temps sera égale à l'intégrale de l'accélération par rapport au temps.*

On peut également définir l'accélération de la façon suivante: *l'accélération est la « vitesse » de variation de la vitesse.* Il est évident que le mot « vitesse » a dans ce cas des significations différentes, c'est pourquoi celle exprimant la rapidité de variation a été mise entre guillemets; utilisant des termes mathématiques, les mots « variation de la vitesse » peuvent être remplacés par le mot « dérivée ».

Les notions mathématiques de dérivée et d'intégrale furent introduites par Newton pour exprimer correctement les lois du mouvement rectiligne varié d'un corps. Sans ces notions mathématiques il est difficile et même quelquefois impossible de saisir le mécanisme des mouvements mécaniques complexes. Aussi l'étude de la mécanique des mouvements complexes est-elle intimement liée au développement des sciences mathématiques.

§ 6. MOUVEMENT D'UN POINT DANS L'ESPACE

Lorsqu'un point suit une ligne droite, la direction de déplacement de ce point dans l'espace est définie par la position de cette droite. Le sens du mouvement sur la droite donnée peut varier, le signe de

la vitesse variant alors également. Habituellement la vitesse est considérée comme une grandeur positive si la coordonnée positive croît avec l'augmentation du temps.

Tout mouvement du point par rapport à d'autres corps peut se représenter comme un déplacement par rapport à un *système de référence* constitué par trois axes de coordonnées mutuellement perpendiculaires. Par exemple, pour définir le mouvement d'un grain de plomb par rapport aux murs et au plancher d'une chambre, on peut choisir pour axes de coordonnées les lignes d'intersection des murs et du plancher dans l'un des coins inférieurs de la chambre. La chambre constitue le corps de référence et le système d'axes choisi, le système de référence dont l'origine se situe dans l'un des coins inférieurs de la chambre.

Les distances de l'origine des coordonnées jusqu'aux pieds des perpendiculaires abaissées du point envisagé sur les axes des coordonnées seront marquées par les nombres x, y et z, x étant la coordonnée de l'un des axes horizontaux, y, de l'autre axe horizontal et z, la coordonnée de l'axe vertical (fig. 9).

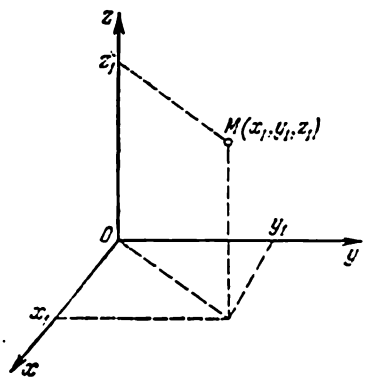


Fig. 9

Si x_1 et y_1 sont les coordonnées du point dans le plan, la position du grain de plomb sur le plancher est définie de façon univoque par deux coordonnées x_1 et y_1 et son mouvement dans ce plan peut se définir par deux fonctions

$$x_1(t), \quad y_1(t).$$

La position du point en tout endroit de la chambre se définit comme la position par rapport au système de référence formé par trois axes de coordonnées mutuellement perpendiculaires et sera exactement déterminée par trois nombres : x_1, y_1 et z_1, où z_1 est la distance du point à partir du plancher, et x_1 et y_1, les coordonnées dans le plan horizontal du pied de la perpendiculaire abaissée du point considéré sur le plancher. Les nombres x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées du point dans l'espace.

Pour tout mouvement du point par rapport au système de référence (par exemple, dans le mouvement du grain de plomb par rapport à la chambre), en général, on constatera la variation simultanée de trois nombres, de trois coordonnées, et, par suite, le mouvement général du point pourra être décrit mathématiquement par trois fonctions du temps :

$$x_1(t), \; y_1(t), \; z_1(t).$$

Tous les points de l'espace traversés par le point mobile forment une ligne courbe appelée *trajectoire*. La longueur du chemin parcouru par le point le long de la trajectoire est appelée *grandeur du chemin*. On peut parler, par exemple, de la trajectoire d'une automobile circulant dans une ville; il est évident que cette courbe sera relativement complexe. La trajectoire est la courbe tracée par le point dans l'espace, la ligne suivie par l'automobile en mouvement. Quant à la grandeur du chemin, elle nous est fournie par le compteur kilométrique qui indique le nombre de kilomètres parcourus par l'automobile.

Au cours du mouvement, le point se déplace dans le temps de certains points de l'espace vers d'autres situés sur la trajectoire. Le déplacement du point ds durant un petit temps dt se définit non seulement par la grandeur de la vitesse, mais également par sa direction dans l'espace. La vitesse du corps à l'instant donné est dirigée dans le sens du déplacement du corps à cet instant.

La vitesse du point mobile dans l'espace est définie non seulement par le rapport $\frac{ds}{dt}$, où ds est la longueur du segment de trajectoire franchi durant le temps dt, mais également par la direction coïncidant avec celle du segment infiniment petit de la trajectoire ds. Pour des opérations mathématiques avec ces grandeurs physiques caractérisées par une certaine direction dans l'espace et appelées *grandeurs vectorielles*, on a mis au point des règles spéciales dont on exposera les principales au paragraphe suivant.

§ 7. PROPRIÉTÉS ESSENTIELLES DES VECTEURS

L'image géométrique du *vecteur* est constituée par un segment de droite dirigé et muni d'une certaine orientation dans l'espace. Le déplacemet du point dans l'espace pendant un laps de temps quelconque peut se représenter par un vecteur. Par exemple, à l'instant t_1 le point se trouvait au point A et à l'instant t_2, au point B (fig. 10, *a*); le déplacement durant le temps $t_2 - t_1$ sera alors représenté par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ [1].

Notons que le vecteur déplacement ne coïncidera avec la trajectoire du point mobile qu'au cas d'un mouvement rectiligne. Dans un mouvement curviligne la trajectoire du point est une ligne courbe passant par les points A et B (en pointillé sur fig. 10, *a*).

Les vecteurs sont dits égaux s'ils constituent des segments parallèles égaux et dirigés dans le même sens. Sur la fig. 10, *b* on a montré des vecteurs différents situés dans le plan du dessin. La longueur du segment, mesurée à une certaine échelle, est la *grandeur absolue* du

[1] La flèche au-dessus de $\overrightarrow{AB}$ désigne un vecteur dirigé de A vers B.

vecteur ou le *module* du vecteur [1], tandis que la position du segment et la flèche indiquent sa direction. C'est ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont les mêmes valeurs absolues, mais des directions différentes, le vecteur $\overrightarrow{AB}$, n'est donc pas égal au vecteur $\overrightarrow{CD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ diffèrent en direction de même qu'en grandeur. Les vecteurs AB et $B'A'$ sont égaux, c'est-à-dire ont même valeur absolue et même direction.

Supposons que le point s'est déplacé d'un segment $\overrightarrow{AB}$ (fig. 10, *a*) en passant du point A au point B. Ce déplacement du point peut

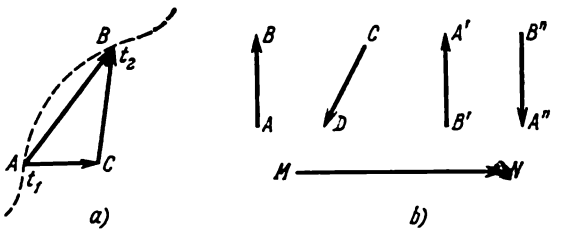


Fig. 10

être considéré comme une somme de deux déplacements; supposons qu'il s'est produit un déplacement du point A vers le point arbitraire C (ce déplacement est représenté par le vecteur $\overrightarrow{AC}$), puis du point C vers le point B (le déplacement correspondant est représenté par le vecteur $\overrightarrow{CB}$). Donc le déplacement $\overrightarrow{AB}$ est égal à la somme des déplacements $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$, ou autrement, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ donnent en s'additionnant le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs s'ajoutent géométriquement : la somme de deux vecteurs est égale à la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont les vecteurs sommés. La même règle est appliquée pour la soustraction des vecteurs : le vecteur $\overrightarrow{CB}$ est égal à la différence des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, du déplacement $\overrightarrow{AB}$ il faut soustraire le déplacement $\overrightarrow{AC}$ en obtenant ainsi le déplacement $\overrightarrow{CB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont appelés *composantes vectorielles* du vecteur $\overrightarrow{AB}$. La somme de plusieurs vecteurs peut être obtenue avec la construction suivante du « polygone de vecteurs » (fig. 11) : tous les vecteurs sommés sont successivement disposés de manière que l'extrémité du premier touche l'origine du second, l'extrémité du

[1] La valeur absolue du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (ou son module) se désigne par $|\overrightarrow{AB}|$ ou tout simplement par AB (sans la flèche au-dessus).

second, l'origine du troisième, etc., ensuite on réunit l'origine du premier vecteur à l'extrémité du dernier. Le vecteur joignant l'origine du premier vecteur à l'extrémité du dernier vecteur du polygone est la somme de tous les vecteurs.

Il est absolument évident qu'en connaissant les composantes vectorielles des vecteurs on peut toujours définir leur somme. Habituellement pour le calcul des grandeurs vectorielles il est commode de représenter les vecteurs par leurs composantes vectorielles suivant des directions déterminées. Montrons-le d'abord pour des vecteurs

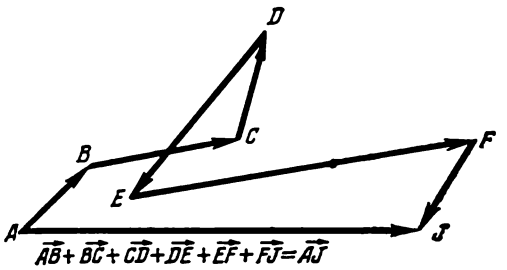


Fig. 11

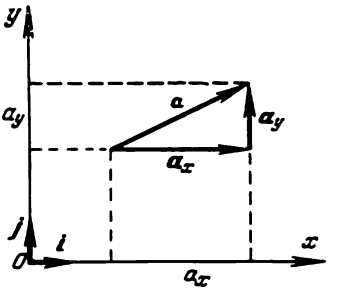


Fig. 12

disposés dans un plan (fig. 12). Choisissons dans le plan un système de coordonnées rectangulaires x, y. Tout vecteur [1] $\boldsymbol{a}$ peut alors se représenter comme une somme

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y, \tag{7.1}$$

où $\boldsymbol{a}_x$ est le vecteur dirigé suivant l'axe x et appelé *composante vectorielle* du vecteur $\boldsymbol{a}$ suivant l'axe x ; de façon analogue, $\boldsymbol{a}_y$ est la composante vectorielle suivant l'axe y. Il est évident que deux composantes vectorielles du vecteur définissent univoquement sa grandeur et sa direction. (Quelquefois au lieu de composantes vectorielles on introduit les *projections* du vecteur sur les directions données ou les *composantes* suivant les axes.)

Désignons par $\boldsymbol{i}$ le vecteur unité suivant l'axe x et par $\boldsymbol{j}$, le vecteur unité suivant l'axe y. On appelle *vecteur unité* ou *unitaire* le vecteur dont le module est l'unité. Le vecteur unitaire n'indique qu'une direction déterminée dans l'espace. Dans ce cas on peut écrire les composantes de la sorte :

$$\boldsymbol{a}_x = a_x\boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{a}_y = a_y\boldsymbol{j}, \tag{7.2}$$

où a_x et a_y ne sont déjà plus des vecteurs, mais des nombres ordinaires, des *scalaires* servant à représenter des grandeurs n'ayant pas de

[1] On désignera dans la suite le vecteur par une lettre en caractère gras et son module, par la même lettre en caractère ordinaire ou en caractère gras enserrée entre deux traits verticaux $|\boldsymbol{a}|$.

direction dans l'espace, par exemple, le temps, la coordonnée, etc. Les nombres a_x et a_y sont appelés les projections de $\boldsymbol{a}$ sur les directions déterminées définies par les vecteurs $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ ou, tout simplement, les projections du vecteur sur les axes de coordonnées donnés x et y. Dans les problèmes pratiques on définira toujours les grandeurs vectorielles relativement aux axes de coordonnées rectangulaires déterminés d'un système de référence choisi et défini par la direction des vecteurs unitaires $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$.

Le module (ou la longueur) du vecteur $\boldsymbol{a}$ se trouvant dans le plan est

$$a = [\boldsymbol{a}] = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{7.3}$$

Tenant compte des formules (7.2) et (7.1), on peut écrire :

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j}. \tag{7.4}$$

Ces formules sont applicables à tout vecteur $\boldsymbol{a}$ se trouvant dans le plan.

Si le vecteur $\boldsymbol{a}$ se trouve dans l'espace, il peut être rapporté à un système de coordonnées rectangulaires x, y, z. Le vecteur unité le long de l'axe z, perpendiculaire aux vecteurs $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$, est habituellement désigné par la lettre $\boldsymbol{k}$. Alors raisonnant de façon analogue, on peut exprimer le vecteur $\boldsymbol{a}$ au moyen de composantes ainsi :

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z, \tag{7.5}$$

où $\boldsymbol{a}_z$ est la composante suivant l'axe z, ou, en récrivant les composantes en se servant des projections a_x, a_y, a_z, sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}. \tag{7.6}$$

Le module du vecteur $\boldsymbol{a}$ sera

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{7.7}$$

Donnons les règles générales du produit des grandeurs vectorielles. La multiplication du vecteur $\boldsymbol{a}$ par le nombre β s'écrit ainsi : $\beta\boldsymbol{a}$, et signifie que le module du vecteur est augmenté de β fois en conservant sa direction, si $\beta > 0$ et en inversant sa direction, si $\beta < 0$. On distingue deux formes de produit de vecteurs : le *produit scalaire* et le *produit vectoriel* ; dans le premier cas le produit des vecteurs est un scalaire ; dans le second, un vecteur.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ est, par définition, égal au produit de leurs modules par le cosinus de l'angle α qu'ils forment. Le produit scalaire est désigné ainsi :

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = ab \cos \alpha ; \tag{7.8}$$

il est égal au module de l'un des vecteurs multiplié par la projection sur lui de l'autre. Par exemple, si l'un des vecteurs est une force et l'autre le déplacement, le travail de la force est égal au produit scalaire du vecteur force par le vecteur déplacement.

Le produit scalaire de deux vecteurs mutuellement perpendiculaires est nul. Il est évident que $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.

Le produit scalaire possède la *propriété de distributivité*:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}.$$

Elle se démontre simplement (fig. 13):

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = am, \quad \boldsymbol{ab} = an, \quad \boldsymbol{ac} = a(m - n).$$

Considérant cette propriété, on peut démontrer que

$$\boldsymbol{ab} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) = \\ = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z, \qquad (7.9)$$

et tenant compte de ce que $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ik} = \boldsymbol{jk} = 0$ et $\boldsymbol{ii} = \boldsymbol{jj} = \boldsymbol{kk} = 1$. Ainsi donc, le produit scalaire de deux vecteurs est égal à la somme

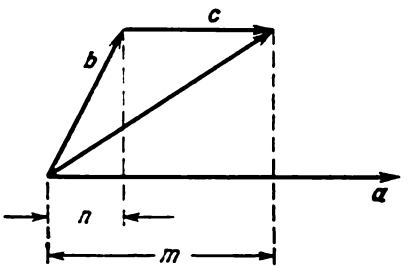


Fig. 13

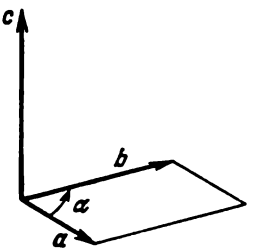


Fig. 14

des produits des projections correspondantes sur les axes de coordonnées.

Le *produit vectoriel* de deux vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ est égal par définition au vecteur $\boldsymbol{c}$ normal au plan des vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ et dont le module est $ab \sin \alpha$, où α est l'angle formé par les vecteurs multipliés. Le produit vectoriel est désigné ainsi:

$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{ab}].$$

La direction du vecteur $\boldsymbol{c}$ est choisie d'après la *règle de la vis à filet droit* (vis standard): si dans l'écrou fixé dans le plan des vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ on enfonce la vis, en la faisant tourner de $\boldsymbol{a}$ vers $\boldsymbol{b}$, la vis se déplacera dans la direction $\boldsymbol{c}$ (fig. 14). Il s'ensuit que le produit vectoriel, à la différence du produit scalaire, dépend de l'ordre des facteurs, ce qui veut dire que le produit vectoriel *n'est pas commutatif*, c'est-à-dire

$$[\boldsymbol{ab}] = -[\boldsymbol{ba}].$$

Il découle de la définition du produit vectoriel que le module du vecteur $\boldsymbol{c}$ est numériquement égal à l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.

On démontre en algèbre vectorielle la *propriété de distributivité* du produit vectoriel :

$$[a\,(b + c)] = [ab] + [ac].$$

Il faut ici conserver l'ordre des facteurs.

Etant donné cette propriété, on peut exprimer le produit vectoriel par une expression quelque peu complexe (à première vue) sous forme de produit des projections des facteurs :

$$\begin{aligned} c = [ab] &= [(a_x i + a_y j + a\ k_z)\,(b_x i + b_y j + b_z k)] = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\, i + (a_z b_x - a_x b_z) j + \\ &\qquad + (a_x b_y - a_y b_x) k. \end{aligned} \tag{7.10}$$

En déduisant cette expression, il faut tenir compte de ce que (fig. 15)

$$[ij] = -[ji] = k, \quad [jk] = -[kj] = i,$$
$$[ki] = -[ik] = j, \quad [ii] = [jj] = [kk] = 0.$$

Il est utile d'écrire l'égalité (7.10) en projections :

$$\begin{aligned} c_x &= a_y b_z - a_z b_y, \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z, \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Les formules (7.11) sont faciles à retenir si l'on remarque que la succession des indices x, y, z dans toutes les colonnes se réalise suivant un cercle (voir fig. 15).

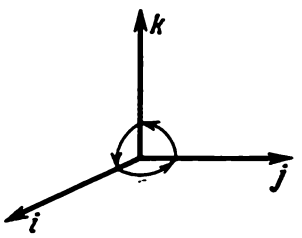


Fig. 15

Soulignons encore une fois la différence entre les produits scalaire et vectoriel : la valeur d'une grandeur scalaire est représentée par *un seul* nombre, tandis que celle d'une grandeur vectorielle dans l'espace, par *trois* nombres.

Une définition plus générale de la grandeur vectorielle est la suivante : *le vecteur est un ensemble ordonné de trois nombres (représentant des quantités physiques) dépendant du système de coordonnées et variant dans la rotation du système de référence de la même façon que les coordonnées du point.* Dans un déplacement parallèle du système de coordonnées les projections (les composantes) du vecteur ne varient pas. Elles ne varient que dans la rotation du système de coordonnées. On rencontrera souvent en physique des grandeurs vectorielles ; par exemple, le déplacement, la vitesse, l'accélération, la force, etc. sont des grandeurs vectorielles.

§ 8. VITESSE D'UN POINT

Tout mouvement du point peut être considéré comme rectiligne sur une portion de chemin suffisamment petite. Le point mobile sur une ligne courbe (fig. 16) au cours d'un temps dt très petit franchit un segment suffisamment petit en accomplissant un déplacement $d\boldsymbol{S}$. Le déplacement $d\boldsymbol{S}$ doit être considéré comme un vecteur dirigé dans le sens du mouvement suivant la tangente à la trajectoire.

Dans ce cas, conséquemment à (3.5), on peut définir le vecteur vitesse par l'égalité suivante:

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{v}\,dt; \tag{8.1}$$

comme dt est un scalaire, le vecteur $\boldsymbol{v}$ coïncide en direction avec $d\boldsymbol{S}$. On peut donc affirmer maintenant que la vitesse est le rapport

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{dt} = \boldsymbol{v}.$$

La vitesse est une grandeur vectorielle physique ayant la même direction que la tangente à la trajectoire. On peut donc représenter la vitesse sur des graphiques par des segments vecteurs, en convenant au préalable de l'échelle choisie pour unité de vitesse. L'addition et la soustraction des vitesses doivent s'effectuer comme l'addition et la soustraction des vecteurs.

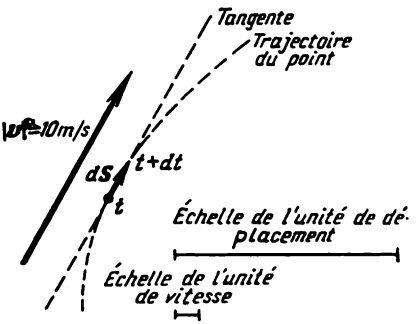


Fig. 16

Le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ coïncide en direction avec le vecteur déplacement suffisamment petit du point $d\boldsymbol{S}$ durant un temps dt suffisamment court. Le déplacement $d\boldsymbol{S}$ et la vitesse $\boldsymbol{v}$ sont des grandeurs absolument différentes. Elles n'ont qu'une même direction dans l'espace. Le segment $d\boldsymbol{S}$ sur la figure 16 représente à l'échelle choisie la longueur du déplacement effectif du point durant le temps dt. Quant au segment représenté par $\boldsymbol{v}$, il figure par convention la vitesse dans son échelle propre: l'unité de longueur du segment correspond à une unité déterminée de la vitesse.

A titre d'exemple, sur la figure 16 on a montré les échelles des unités du déplacement et de la vitesse; dans la suite on n'indiquera pas sur les dessins les échelles des différentes grandeurs vectorielles, mais il faut toujours se rappeler que chaque grandeur a son échelle propre déterminée.

Dans tout mouvement du point suivant une courbe la direction de la vitesse varie aussi bien que sa valeur absolue. La vitesse ne

reste constante que dans le cas où sa valeur absolue et sa direction ne varient pas. *Le mouvement dont la vitesse reste constante et invariable est un mouvement uniforme et rectiligne. Le mouvement suivant une ligne courbe est un mouvement de vitesse variable.*

En analysant la vitesse d'un mouvement simple quelconque, on peut la représenter comme une somme vectorielle de deux ou plusieurs vitesses composantes. Par exemple, une bille mobile dans un plan horizontal; les axes de coordonnées x et y se disposent dans ce plan. Le vecteur vitesse v possède à un certain moment une direction parfaitement déterminée par rapport aux axes de coordonnées x et y définie par l'angle α entre les directions de la vitesse et de l'axe x. On peut trouver la grandeur et la direction du vecteur vitesse si sont données les projections du vecteur vitesse sur les axes de coordonnées x et y. Le vecteur v peut être pris pour la somme de deux vecteurs (fig. 17) dont l'un est dirigé suivant l'axe x et l'autre suivant l'axe y:

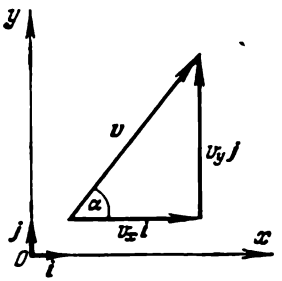


Fig. 17

$$v = v_x i + v_y j, \tag{8.2}$$

où v_x et v_y sont les projections du vecteur vitesse sur les axes de coordonnées, et i et j les vecteurs unités des mêmes axes. Le vecteur $v_x i$ est la composante de la vitesse le long de l'axe x, le vecteur $v_y j$, le long de l'axe y. Si, par exemple, l'une des composantes est nulle, cela signifie que la vitesse v est dirigée parallèlement à l'autre axe de coordonnées. Le module du vecteur vitesse a pour expression

$$v = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \tag{8.3}$$

quant à l'angle α entre le vecteur vitesse et l'axe x, il est évidemment égal à

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{v_y}{v_x}. \tag{8.4}$$

La composante du vecteur vitesse est la vitesse de la projection du point mobile sur l'axe de coordonnées considéré et est tout simplement appelée vitesse suivant l'axe de coordonnées. Connaissant les vitesses le long de deux axes de coordonnées, on peut calculer la grandeur et la direction de la vitesse dans le plan.

La composante de la vitesse le long d'un axe déterminé est la projection de la vitesse du corps sur l'axe donné. On peut se la représenter de façon visuelle comme la vitesse de l'ombre du corps mobile. Par exemple, sur une table un chariot roule sur des rails dans une direction déterminée, éclairé par une source de lumière disposée à une certaine distance de la table à peu près dans le plan du mouvement du chariot de sorte que les rayons sont parallèles à l'axe x (sur

la fig. 18 on a donné une vue en plan). Dans ce cas, l'ombre de la tige verticale fixée sur le chariot projetée sur l'écran perpendiculairement à l'axe x se déplacera

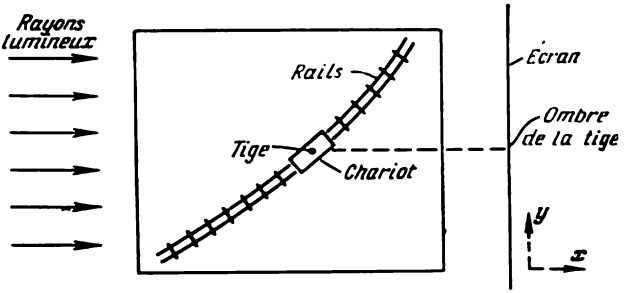


Fig. 18

sur cet écran avec une certaine vitesse v_y. Il est évident que la vitesse du mouvement de l'ombre est la composante de la vitesse de la tige suivant la direction de l'axe y. Connaissant les vitesses de l'ombre sur deux écrans disposés perpendiculairement, on peut déterminer la grandeur et la direction de la vitesse du mouvement de la tige sur la table.

Dans le mouvement du point dans l'espace le vecteur segment $d\boldsymbol{S}$ est défini de façon univoque par ses trois projections sur les axes de

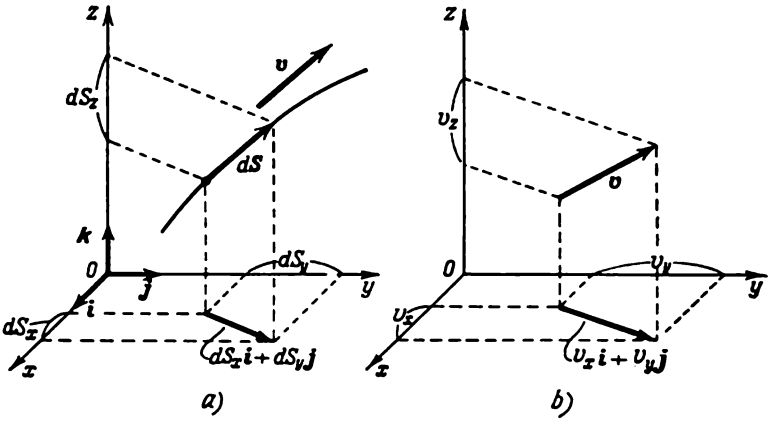


Fig. 19

coordonnées qui peuvent être choisis rectangulaires (fig. 19, *a*). On peut écrire le vecteur $d\boldsymbol{S}$ sous la forme:

$$d\boldsymbol{S} = dx\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}, \tag{8.5}$$

où dx, dy et dz sont les projections du vecteur $d\boldsymbol{S}$ sur les axes de coordonnées; on en tire le vecteur vitesse

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{S}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k},$$

ou

$$v = v_x i + v_y j + v_z k, \tag{8.6}$$

où v_x, v_y et v_z sont les projections du vecteur vitesse sur les axes de coordonnées correspondants. Les projections du vecteur vitesse sur les axes de coordonnées sont égales aux dérivées de la projection du point sur l'axe considéré, ou autrement, aux dérivées des coordonnées du point mobile. La vitesse du point dans l'espace peut être représentée comme la somme de deux vitesses: 1) la vitesse de la projection du point sur le plan horizontal xOy, égale à $v_x i + v_y j$ et (2) la vitesse de la projection du point sur la verticale, égale à $v_z k$ (fig. 19, *b*). Habituellement on s'exprime plus brièvement ainsi, par exemple: la vitesse de l'avion a deux composantes, l'une horizontale et l'autre verticale.

La valeur absolue de la vitesse v s'exprime à l'aide de ses projections de la façon suivante:

$$v = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \tag{8.7}$$

on peut s'en convaincre facilement en regardant la figure 19. Dans tout mouvement du point dans l'espace, dans le cas général, toutes ses projections du déplacement varient, c'est-à-dire que la *vitesse varie aussi bien en valeur absolue qu'en direction.*

§ 9. ACCÉLÉRATION D'UN POINT MOBILE DANS UN PLAN. ACCÉLÉRATION CENTRIPÈTE

L'accélération est une grandeur physique définissant la variation de la vitesse à un moment donné. Soit v la vitesse de l'automobile

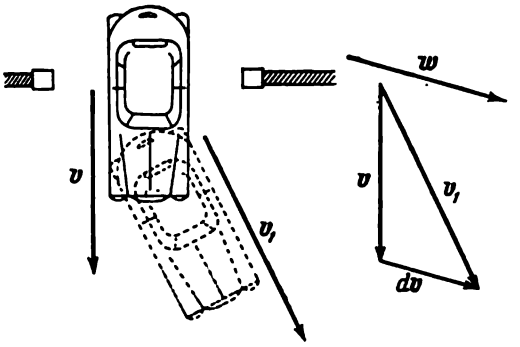


Fig. 20

sortant par la porte à l'instant t (fig. 20). Pour mieux faire image, le vecteur vitesse est figuré à côté de l'automobile, de même que (à une échelle donnée), séparément, dans la partie droite de la figure.

A l'instant $t + dt$ la vitesse a la valeur $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$, où $d\boldsymbol{v}$ est le vecteur accroissement durant le temps dt.

On peut dire qu'au vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ s'est ajouté durant le temps dt le vecteur $d\boldsymbol{v}$, ce qui se traduit par l'acquisition par l'automobile de la vitesse $\boldsymbol{v}_1$. Dans le cas général, la direction du vecteur $d\boldsymbol{v}$ ne coïncide pas avec celle de la vitesse $\boldsymbol{v}$.

Si dt est une grandeur suffisamment petite, $d\boldsymbol{v}$ sera également une grandeur vectorielle suffissamment petite, et le rapport de ces grandeurs.

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \tag{9.1}$$

sera une nouvelle grandeur *vectorielle* appelée accélération et coïncidant en direction avec $d\boldsymbol{v}$. L'accélération détermine la rapidité et la

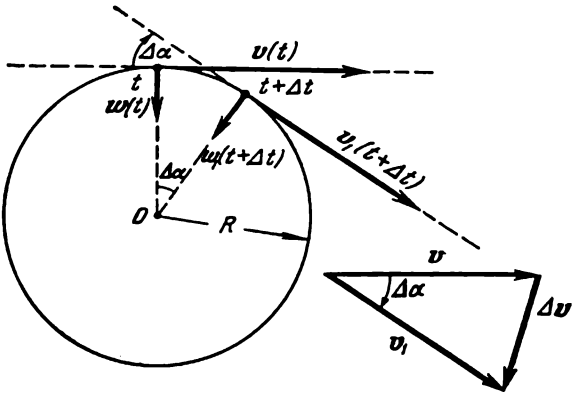


Fig. 21

direction de la variation du vecteur vitesse. Pour déterminer la grandeur de l'accélération $\boldsymbol{w}$, il faut trouver l'accroissement du vecteur $\boldsymbol{v}$ durant le temps dt et le diviser par dt.

Au cas d'un mouvement uniforme du point sur le cercle, la grandeur absolue de la vitesse reste constante mais sa direction varie constamment. Le vecteur vitesse ne reste donc pas constant et acquiert un accroissement.

En prenant deux vecteurs vitesse du corps après un petit laps de temps Δt et en soustrayant la première de ces valeurs de la suivante, on obtient l'accroissement $\Delta\boldsymbol{v}$ (fig. 21). Pour déterminer l'accroissement de la vitesse, construisons à l'échelle correspondante des segments égaux et coïncidant en direction avec les vecteurs vitesses $\boldsymbol{v}$ (à l'instant t) et $\boldsymbol{v}_1$ (à l'instant $t + \Delta t$). Les directions de ces vecteurs sont celles de la tangente au cercle au point du cercle où se trouve le point au moment considéré. Ensuite soustrayons le vecteur $\boldsymbol{v}$ du vecteur $\boldsymbol{v}_1$ et obtenons le vecteur $\Delta\boldsymbol{v}$. Il est évident que le vecteur $\Delta\boldsymbol{v}$ ne

sera perpendiculaire ni à la valeur initiale v, ni à la valeur finale v_1. Mais si $\Delta t \to 0$, $\Delta v \to 0$, et la direction du vecteur Δv à la limite, pour $\Delta t \to 0$, tend vers la perpendiculaire au vecteur vitesse v. Donc, un accroissement suffisamment petit du vecteur dv est perpendiculaire au vecteur v, l'accélération $w = \frac{dv}{dt}$ est perpendiculaire à la vitesse et est dirigée vers le centre du cercle.

La grandeur de l'accélération peut être reliée à la grandeur de la vitesse v du mouvement suivant le cercle et à la grandeur du rayon R.

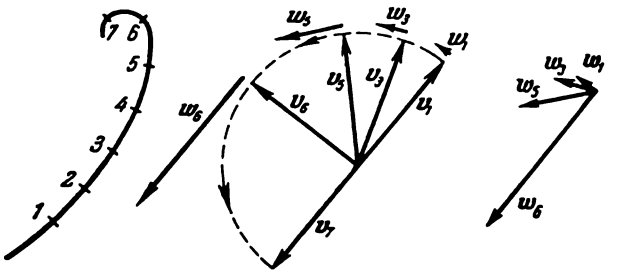


Fig. 22

On voit sur le dessin (fig. 21) que pour un $\Delta\alpha$ très petit

$$|\Delta v| = \Delta v \approx v\Delta\alpha; \tag{9.2}$$

le chemin parcouru par le point durant le temps Δt est égal à

$$v\Delta t \approx R\Delta\alpha. \tag{9.3}$$

Eliminant de ces deux équations $\Delta\alpha$, on obtient

$$\Delta v \approx \frac{v^2}{R}\Delta t, \tag{9.4}$$

ou

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{R},$$

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{v^2}{R} \tag{9.5}$$

La grandeur de l'accélération du corps en mouvement uniforme sur le cercle est numériquement égale au carré de la vitesse divisé par la grandeur du rayon. Cette accélération est dirigée vers le centre et est appelée accélération *centripète*.

Examinons un mouvement quelconque du point dans un plan, animé d'une vitesse constante en module. Par exemple, un corps se meut sur une courbe plane à une vitesse constante en valeur absolue (fig. 22) du point *1* au point 7. On a figuré sur le dessin à côté de la trajectoire les vecteurs vitesses v_i pour différents instants t_i et à côté

des vecteurs vitesses, on a également tracé, pour les mêmes instants, les vecteurs accélérations w_i. On voit qu'avec l'accentuation de la courbure de la trajectoire l'accélération croît. En tous les points l'accélération est perpendiculaire à la vitesse, car le point se meut le long de la trajectoire de façon uniforme.

A titre de comparaison, sur la figure 23, on a montré le mouvement sur une courbe plane à une vitesse croissant en valeur absolue et à côté, les valeurs des vecteurs vitesses et accélérations pour les moments isolés du temps, quand le point se trouve en des endroits déterminés de la trajectoire marqués sur la figure. Les points *1*, *2*, *3*, . . ., comme sur la figure 22, correspondent aux positions du corps après des laps de temps égaux.

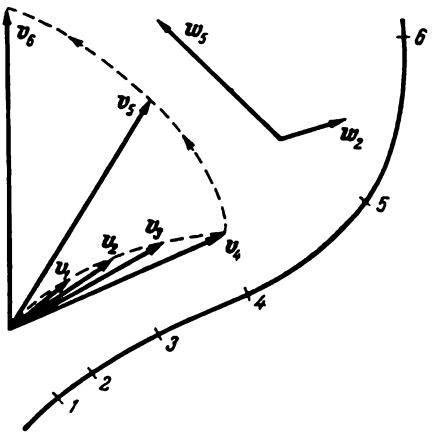


Fig. 23

Dans ce cas l'accélération n'est pas perpendiculaire mais inclinée sous un certain angle par rapport à la vitesse. On distingue donc habituellement deux composantes de l'accélération : l'une, dirigée le long de la vitesse, est dite *composante tangentielle* de l'accélération, la seconde, perpendiculaire à la vitesse, *composante normale* de l'accélération.

Si les règles d'après lesquelles la grandeur et la direction de la vitesse varient dans le temps sont connues, on peut déterminer l'accélération pour tout moment de temps.

L'accélération, comme tout vecteur, peut se représenter sous forme de somme de composantes suivant les axes de coordonnées. Par exemple, si le vecteur accélération se trouve dans le plan (x, y), sa grandeur peut être écrite ainsi :

$$\boldsymbol{w} = w_x \boldsymbol{i} + w_y \boldsymbol{j}, \tag{9.6}$$

où w_x et w_y sont les projections du vecteur $\boldsymbol{w}$ sur les axes de coordonnées, et les vecteurs $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$, comme auparavant, les vecteurs unitaires dirigés suivant les axes de coordonnées x et y.

Les projections de l'accélération w_x et w_y sont égales aux dérivées des projections de la vitesse :

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt}. \tag{9.7}$$

En effet, soit le vecteur vitesse

$$v = v_x i + v_y j.$$

Posant i et j invariables, dérivons les deux membres :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_x}{dt} i + \frac{dv_y}{dt} j. \tag{9.8}$$

Comparant (9.8) et (9.6), on obtient (9.7).

Exemple 1. Examiner la dépendance du temps des projections de la vitesse et de l'accélération sur les axes des coordonnées rectangulaires quand le point se meut d'un mouvement uniforme à la vitesse v_0 sur un cercle de rayon R. On a donné sur la figure 24 les abaques des projections de la vitesse et de l'accélération du point mobile.

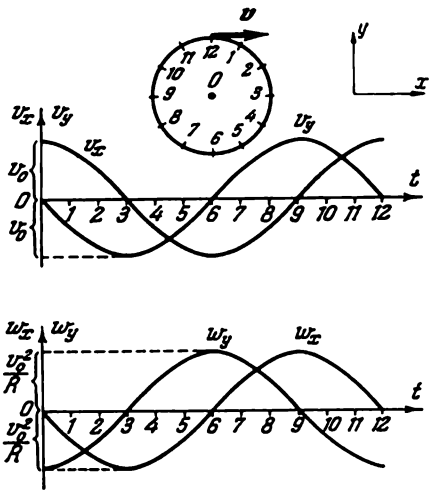


Fig. 24

Exemple 2. Déterminer l'accélération du point mobile sur un cercle de rayon R pour le cas où la valeur absolue de la vitesses croît dans le temps suivant la loi $v = bt$.

Soit v_1 la valeur de la vitesse à l'instant t et v_2 à l'instant $t + \Delta t$ (fig. 25, *a*); le vecteur v_2 est incliné d'un angle très faible $\Delta\alpha$ par rapport à v_1 et possède une valeur absolue supérieure. Marquons sur le segment du vecteur v_2 un point A de manière que la longueur $OC = OA$. Si la vitesse ne variait pas en valeur absolue à l'instant $t + \Delta t$, elle serait le vecteur $\overrightarrow{OA}$; donc l'accroissement de la valeur absolue de la vitesse durant le temps Δt est exprimé par la valeur absolue du vecteur $|\overrightarrow{AB}| = \Delta v_t$; cet accroissement est évidemment égal à

$$v_2 - v_1 = b(t + \Delta t) - bt = b\Delta t,$$

ou

$$\Delta v_t = b\Delta t. \tag{9.9}$$

L'accroissement de la vitesse durant le laps de temps Δt, égal à $\Delta v = v_2 - v_1$, peut se représenter comme la somme de deux vecteurs Δv_n et Δv_t (fig. 25, *a*), c'est-à-dire

$$\Delta v = \Delta v_n + \Delta v_t.$$

La valeur absolue du vecteur Δv_n est égale à $\Delta v_n \approx \Delta\alpha \cdot v$ et, comme dans le cas du mouvement uniforme (voir formule (9.4), on peut l'exprimer de la façon suivante :

$$\Delta v_n \approx \frac{v^2}{R} \Delta t. \tag{9.10}$$

L'accélération moyenne du point durant le temps Δt sera

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v_n}{\Delta t} + \frac{\Delta v_t}{\Delta t},$$

et l'accélération à l'instant t

$$\frac{dv}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_n}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_t}{\Delta t}. \qquad (9.11)$$

Voyons quelle sera la limite des valeurs absolues de ces vecteurs pour $\Delta t\to 0$; des formules (9.9) et (9.10) il vient

$$\frac{\Delta v_t}{\Delta t}=b, \qquad \frac{\Delta v_n}{\Delta t}\approx\frac{v^2}{R}.$$

On en tire aussitôt qu'à la limite pour $\Delta t\to 0$

$$\frac{dv_t}{dt}=b, \qquad \frac{dv_n}{dt}=\frac{v^2}{R}. \qquad (9.12)$$

Voyons maintenant quelle direction prendront les vecteurs Δv_n et Δv_t; à la limite, pour $\Delta t\to 0$ (ou pour $\Delta\alpha\to 0$), la direction du vecteur Δv_n tend vers

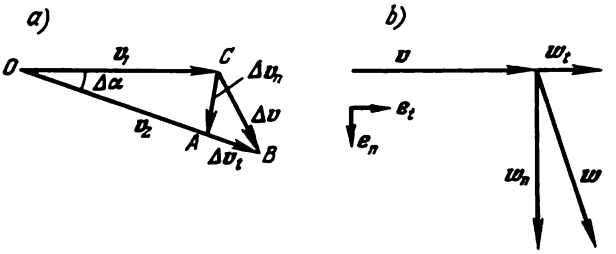


Fig. 25

la perpendiculaire à v, tandis que Δv_t tend vers la direction du vecteur v (fig. 25, *b*). Si l'on désigne le vecteur unitaire le long de v (suivant la tangente à la trajectoire) par e_t et le vecteur qui lui est perpendiculaire et dirigé suivant le rayon vers le centre du cercle, par e_n, l'expression de l'accélération (9.11), en tenant compte de (9.12), prendra la forme

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{v^2}{R}e_n+be_t. \qquad (9.13)$$

La composante normale de l'accélération $w_n=\frac{v^2}{R}e_n$, et la composante tangentielle de l'accélération $w_t=\frac{dv_t}{dt}e_t=be_t$.

Notons que la composante normale de l'accélération w_n aura toujours la même grandeur, comme dans le cas du mouvement uniforme. Le vecteur w est dirigé non pas vers le centre du cercle mais sous un certain angle par rapport au vecteur vitesse, vers l'avant, en suivant le mouvement du point. Il est évident que dans le cas d'un mouvement retardé sur un cercle le vecteur accélération sera également dirigé sous un angle aigu par rapport au vecteur vitesse, mais vers l'arrière.

La composante tangentielle de l'accélération w_t définit la grandeur de la variation du module de la vitesse du mouvement, tandis que la composante normale w_n définit la variation de la direction de la vitesse v du mouvement du point.

§ 10. ACCÉLÉRATION D'UN POINT MOBILE DANS L'ESPACE

Au paragraphe précédent on n'a examiné les principales relations entre les vecteurs vitesse et accélération et leurs projections et composantes que pour le cas quand les vecteurs vitesse et accélération se trouvent continuellement dans un même plan (mouvement plan du point).

De façon absolument analogue on peut étudier les cas de mouvement quelconque du point dans l'espace quand le vecteur vitesse est orienté de façon quelconque dans l'espace. Dans ce cas le mouvement du point s'effectue par rapport à un système de référence lié à des axes de coordonnées rectangulaires (x, y, z) et, par suite, on peut décomposer, comme le vecteur vitesse, l'accélération en une somme de composantes suivant ces trois axes de coordonnées, bref :

$$\boldsymbol{w} = w_x \boldsymbol{i} + w_y \boldsymbol{j} + w_z \boldsymbol{k}, \tag{10.1}$$

où $\boldsymbol{k}$ est un vecteur unitaire suivant l'axe z.

La liaison entre les projections de la vitesse et de l'accélération (voir (9.7)) sera :

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad w_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{10.2}$$

Pour analyser le mouvement, on peut évidemment choisir en qualité de référence d'autres systèmes de coordonnées et étudier les projections des vecteurs vitesse et accélération sur les axes de coordonnées correspondants. On utilisera de préférence le système de coordonnées rectangulaires.

Si l'on connaît la relation entre le temps et les coordonnées du point mobile $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, on peut, en dérivant chacune des coordonnées, trouver les projections du vecteur vitesse et donc la valeur résultante du vecteur vitesse ; ensuite, en dérivant les projections de la vitesse sur les axes de coordonnées, on peut aboutir aux projections de l'accélération et en déduire le vecteur accélération.

Les opérations inverses (par exemple, trouver les coordonnées du point mobile d'après le vecteur vitesse) sont plus compliquées et se ramènent à l'intégration des projections de la vitesse par rapport au temps. Si par contre, il s'agit de trouver les coordonnées d'après l'accélération connue, il faut procédér à une double intégration: d'abord, d'après les projections de l'accélération on trouve les projections de la vitesse, puis d'après les projections de la vitesse on aboutit aux coordonnées du point mobile en tant que fonction du temps.

Exemple. Un point se meut dans l'espace avec une accélération constante $\boldsymbol{w}$ (fig. 26), en commençant le mouvement à l'instant $t = 0$ d'un point quelconque de l'axe z ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 \neq 0$) à la vitesse $\boldsymbol{v}_0$ parallèle au plan (x, y) (projections de la vitesse à l'instant initial : $v_{0z} = 0$; $v_{0y} \neq 0$ $v_{0x} \neq 0$). Sup-

posons que l'accélération soit dirigée le long de l'axe z,

$$w_x = 0, \quad w_y = 0, \quad w_z = -a. \tag{10.3}$$

Les projections de l'accélération sur les axes x et y restent tout le temps nulles, par suite, les projections de la vitesse sur les axes x et y seront tout le temps constantes, c'est-à-dire

$$v_x = v_{0x}, \quad v_y = v_{0y} \tag{10.4}$$

à tout instant t. Seule la projection de la vitesse sur l'axe z subira des variations. En se fondant sur (10.2), on peut écrire

$$\frac{dv_z}{dt} = w_z, \quad v_z = \int_0^t w_z\, dt. \tag{10.5}$$

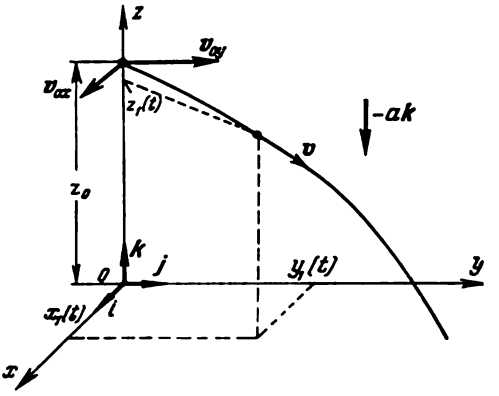


Fig. 26

La projection de l'accélération $w_z = -a$ reste tout le temps constante. La projection du point sur l'axe z est animée d'un mouvement uniformément accéléré. La coordonnée z se définit ainsi:

$$\frac{dz_1}{dt} = v_z = -\int_0^t a\, dt = -at, \quad z_1 - z_0 = \int_0^t v_z\, dt =$$

$$= -\int_0^t at\, dt = -\frac{at^2}{2}. \tag{10.6}$$

Les coordonnées restantes du point, x et y, seront obtenues en s'appuyant sur la condition que les projections de la vitesse sur ces axes restent constantes:

$$\frac{dx_1}{dt} = v_x = v_{0x}, \quad \frac{dy_1}{dt} = v_y = v_{0y};$$

d'où

$$x_1 = \int_0^t v_{0x}\, dt = v_{0x}\, t, \quad y_1 = \int_0^t v_{0y}\, dt = v_{0y} t. \tag{10.7}$$

Donc les expressions (10.6) et (10.7) traduisent les variations de toutes les coordonnées dans le mouvement du point avec une accélération constante w_z.

Le mouvement avec une accélération constante $\boldsymbol{w}$ dirigée de façon quelconque peut s'écrire sous une forme vectorielle. Supposons que le point mobile à l'instant t se trouve à l'extrémité du vecteur $\boldsymbol{r}(t)$ mené à partir d'un certain point immobile O.

La vitesse du point mobile $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ et l'accélération $\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$. D'où $d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\, dt$. Comme $\boldsymbol{w} = \text{const}$,

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = \int_0^t \boldsymbol{w}\, d\xi = \boldsymbol{w}t, \tag{10.8}$$

où $\boldsymbol{v}_0$ est la vitesse quand $t = 0$, ou

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{w}t.$$

La position du point $\boldsymbol{r}$ peut s'écrire sur la base de l'égalité $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\, dt$ sous la forme:

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \int_0^t \boldsymbol{v}\, d\xi,$$

où $\boldsymbol{r}_0$ est la position pour $t = 0$. Considérant l'égalité pour la vitesse $\boldsymbol{v}$, il vient

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{w} \int_0^t \xi\, d\xi + \boldsymbol{v}_0 \int_0^t d\xi + \boldsymbol{r}_0,$$

ou

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0. \tag{10.9}$$

L'égalité (10.9) est l'égalité vectorielle générale traduisant le mouvement du point (particule) d'accélération constante $\boldsymbol{w}$ à partir du

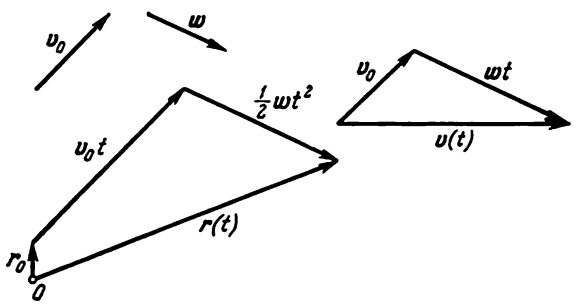


Fig. 27

point $\boldsymbol{r}_0$ avec une vitesse initiale $\boldsymbol{v}_0$. Cette égalité traduit de façon évidente toute la cinématique du mouvement: la vitesse croît linéairement avec le temps dans la direction de $\boldsymbol{w}$, le vecteur position $\boldsymbol{r}$ croît linéairement dans la direction de $\boldsymbol{v}_0$ et comme son carré dans la direction de $\boldsymbol{w}$. La position relative des vecteurs est montrée sur la figure 27 pour le cas où les vecteurs $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{w}$ sont situés dans un même plan.

On clôt par là l'étude des règles cinématiques générales du point mobile dans l'espace. Les coordonnées, les vecteurs de position, vitesse et accélération sont des grandeurs dont les variations décrivent complètement le mouvement. Si l'on connaît la dépendance du temps d'une grandeur vectorielle cinématique, de la vitesse ou de l'accélération, on peut retrouver d'après cette dépendance l'autre grandeur ainsi que les coordonnées du point mobile.

On verra dans la suite que les lois du mouvement du point jouent aussi un grand rôle dans l'analyse des mouvements quelconques de tout corps.

§ 11. ESPACE, TEMPS ET SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE

Jusque-là on ne s'était pas arrêté sur les notions de l'espace et du temps considérant ces notions déjà acquises au cours du premier cycle.

On dit quelquefois : le mouvement mécanique est le déplacement du corps dans l'espace avec le temps. Cette définition nécessite des précisions importantes. Il faut s'exprimer ainsi : dans un mouvement mécanique il se produit un déplacement de certains corps par rapport à d'autres. Si on a affaire à un seul corps, parler de déplacement est un non-sens. Un corps se déplace toujours par rapport à un autre. C'est pourquoi le système de référence par rapport auquel se produit le déplacement doit être considéré comme *corps de référence*, car, effectivement, tout système de référence est lié à un certain corps ou à des corps. En l'absence de corps, il est impossible de se représenter l'espace.

L'espace et le temps sont les formes d'existence de la matière. La notion, introduite par Newton, d'un espace *absolu* immobile et vide est dénuée de sens. Les notions de l'espace, de ses éléments géométriques (point, ligne, surface, volume) sont apparues comme des abstractions des propriétés matérielles de corps presque invariables. Dans la mécanique de Newton il est admis que l'espace est *homogène* dans toutes ses parties et *isotrope* (c'est-à-dire, que ses propriétés sont indépendantes de la direction) ; autrement dit, on suppose que l'espace physique est équivalent à celui admis dans la géométrie d'Euclide. Pour les phénomènes mécaniques étudiés dans ce cours, l'espace peut être considéré comme euclidien avec un grand degré de précision. La notion de l'espace homogène et isotrope est tout à fait admissible dans l'analyse de ces phénomènes. Mais l'hypothèse sur l'existence d'un espace complètement immobile, non relié à quoi que ce soit, est erronée : l'espace est toujours conçu comme lié à des corps déterminés, les corps de référence.

D'après Newton, le temps est une *durée absolue* existant indépendamment des corps. Cela est également difficile à démontrer ;

la durée est inséparable de la matière puisque le temps est une forme de l'existence de la matière.

Dans le cadre d'un système de référence on peut fixer une mesure de la durée de tous les processus et phénomènes et affirmer qu'il existe un temps unique. Or, comme il l'a été montré en théorie de la relativité, les événements simultanés se produisant en des lieux différents d'un même système de référence se réaliseront à des instants différents, s'ils sont observés dans un autre système de référence en mouvement. Donc l'écoulement du temps est lié au mouvement relatif des systèmes de référence; il n'y a pas de temps absolu unique pour tous les systèmes de référence. Toutes ces assertions sont la conséquence de la constance de la célérité de la lumière dans tous les systèmes de référence. La durée des processus est liée au mouvement, la notion du temps est inséparable du mouvement des corps l'un par rapport à l'autre.

Mais pour des mouvements relativement lents, quand la vitesse est très faible devant celle de la lumière, la dépendance du temps du mouvement relatif du système de référence est pratiquement insignifiante et on peut la négliger. C'est pourquoi pour tous les phénomènes et tous les problèmes examinés dans ce livre on peut considérer comme complètement acceptable les représentations de Newton sur le temps absolu et unique. Dans les cas où cela ne pourrait être admis on le mentionnera spécialement.

CHAPITRE II

LOIS FONDAMENTALES DU MOUVEMENT : LOIS DE LA DYNAMIQUE

§ 12. MOUVEMENT ET INTERACTION DES CORPS

> L'*action réciproque* est le premier caractère qui se présente à nous, quand nous considérons la matière en mouvement dans son ensemble du point de vue de la science de la nature d'aujourd'hui.
> *F. Engels*, Dialectique de la Nature (Paris, 1952, p. 233)

En observant et en étudiant le mouvement de divers corps, on arrive à la conclusion que le mouvement de tout corps n'est déclenché ou modifié que par le fait de l'interaction avec d'autres corps. Un chariot, immobile sur le sol, est mis en mouvement, roulé et arrêté par l'ouvrier. L'ouvrier a communiqué le mouvement au chariot relativement au sol, il l'a également fait cesser en arrêtant le chariot. Une locomotive met en marche des wagons, les entraîne. L'homme prend une pierre dans la main et la jette, il lui communique un mouvement, la pierre se meut par rapport au sol et s'arrête du fait de l'interaction avec l'air et le sol. Ces exemples peuvent être multipliés à loisir. Chaque fois on observe une interaction des corps, au moins de deux d'entre eux. Ainsi, quand l'ouvrier roule le chariot, il y a interaction de trois corps : l'ouvrier, le chariot et le sol ; l'ouvrier s'appuye sur le sol quand il déplace le chariot ou l'arrête (fig. 28).

Les lois de la dynamique établissent les liens entre le mouvement du corps et les causes ayant déclenché ou modifié ce mouvement.

Il faut commencer l'étude des lois de la mécanique par les mouvements les plus simples qui peuvent être observés directement. C'est pourquoi examinons, pour commencer, le mouvement des corps relativement à la surface terrestre en supposant pour l'instant sans de raisons fondées que la Terre est immobile. Après avoir découvert les lois générales de ces mouvements, on peut en tirer certaines conclusions sur l'influence du mouvement de la Terre autour du Soleil sur les mouvements étudiés et vérifier ces déductions par l'expérience. Une série d'expériences, dont on parlera plus loin, confirmeront l'exactitude des lois trouvées pour tout mouvement des corps. Les lois de la dynamique, établies pour les mouvements des corps relativement à la surface terrestre, peuvent donc être étendues aux mouvements des corps célestes et sur cette base on peut effectuer des cal-

culs théoriques dont les déductions seront de nouveau vérifiées par des observations. Devançant l'exposé, notons que cette vérification fut réalisée déjà par Newton lui-même et, depuis, les études physiques comme les observations astronomiques confirment de façon brillante les lois de la dynamique trouvées par cette voie.

Les mouvements des corps l'un par rapport à l'autre sont très variés et leur nature se modifie, en général, dans le temps. Ces modifications se réalisent différement : par exemple, un corps se trouvait

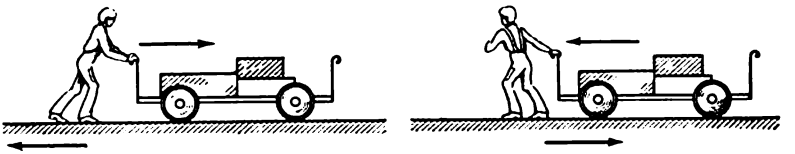


Fig. 28

au repos, s'est mis à bouger, a acquis un mouvement, a pris une vitesse, ensuite s'est arrêté et est passé à l'état de repos; ou bien un corps se déplaçait à une certaine vitesse, puis, sous l'effet d'une action, la vitesse du corps augmente et il commence à se déplacer plus rapidement ; ou encore, un corps se dirigeait vers l'est, puis a pris la direction du sud, etc.

Dans tous les cas la modification du mouvement s'accompagnait tout d'abord d'une certaine variation du vecteur vitesse du corps: la vitesse du corps modifiait sa grandeur ou sa direction ou les deux ensemble. On peut donc admettre que les interactions provoquant la variation de la vitesse du corps sont en rapport de causalité avec cette dernière.

Cette idée jaillit aussitôt quand on essaye de trouver les lois du mouvement des corps. Elle peut être formulée de la sorte : *les actions d'autres corps sur le corps donné déterminent sa vitesse.*

C'est à peu près la conception qu'avaient les anciens savants sur la loi fondamentale du mouvement telle qu'elle est rapportée par la « Physique » d'Aristote. Aristote divisait tous les mouvements en naturels et contraints ; dans la catégorie des mouvements naturels il rangeait les mouvements vers le haut et vers le bas et dans celle des mouvements contraints, tous les autres mouvements qui ne se manifestent, comme on le dira aujourd'hui, que tant qu'il y a action.

L'idée de liaison entre les actions extérieures et la vitesse du corps est sans contestation exacte à condition de l'interpréter ainsi : les actions extérieures déterminent d'une certaine façon la vitesse du corps. Mais la formulation suivante se dégageant des conceptions d'Aristote sur les causes du mouvement des corps : l'action sur le corps au moment donné détermine la vitesse au même instant, est complètement fausse. Galilée, sur la base d'une analyse minutieuse

des résultats de ses expériences, rejeta résolument cette formulation et arriva à la conclusion: *si le corps n'est pas soumis aux actions extérieures, il peut se mouvoir avec une quelconque vitesse constante ou demeurer à l'état de repos.*

Cette assertion constitue la base de la première loi de la dynamique découverte par Galilée que nous étudierons en détail au § 16.

Mais avant d'aborder l'analyse de ces assertions et de formuler les lois de la dynamique il est nécessaire d'étudier la caractéristique mécanique fondamentale de l'action des corps, la *force physique.*

§ 13. FORCE

Pour lever un seau d'eau et le maintenir avec la main, l'homme doit exercer sur le seau un effort de sa main mettant en jeu une « force »; il ressent la force avec laquelle il tire le seau vers le haut ou bien la force avec laquelle le seau tend à abaisser son bras. Quand l'ouvrier pousse un chariot chargé il applique la force de ses bras pour le mettre en marche et le faire rouler, lui communiquer une vitesse (voir fig. 28). Au cours de ces actions l'homme a l'impression que son corps exerce un effort et la force mentionnée dans les exemples précédents est en relation avec cette sensation.

Or en mécanique *on entend par force* non pas les sensations physiologiques de l'effort, mais *la cause physique de la modification de l'état de mouvement des corps apparaissant du fait de l'interaction de deux corps.* La force physique dont il s'agit en mécanique ne doit en aucun cas être confondue avec la sensation d'effort ressentie par l'homme. Par exemple, l'ouvrier, en poussant le chariot, agit sur celui-ci avec une force déterminée s'associant à la sensation d'un effort musculaire. La nature du mouvement du chariot est en rapport de causalité non pas avec ce que ressent l'ouvrier, mais avec la grandeur de la force appliquée au chariot par l'ouvrier. Si une force identique est appliquée au chariot par un autre corps, par exemple, le tracteur, l'automobile, le mouvement du chariot restera inchangé.

La force engendrée par les gaz de la poudre repousse le projectile de l'âme du canon, la force de la locomotive met en marche les wagons, la force du courant d'un fleuve fait tourner la roue à aubes. Il s'agit chaque fois d'une force physique prise pour cause de modification du mouvement du corps.

Jusque-là on a insisté sur ce que la force physique est liée à la modification du mouvement du corps; cependant on se trouve souvent en présence d'un cas particulier quand l'action de la force n'engendre pas de mouvement du corps, plus précisément, de modification du mouvement du corps, tout au moins sensible dans des conditions d'observation habituelles. Par exemple, la force insuffisante est appliquée au chariot et celui-ci ne se met pas en mouvement, bien qu'il subisse l'action d'une force. L'homme tient dans la main un

seau sur lequel s'exerce une certaine force, mais le seau reste au repos.

Dans ces cas, outre la force mentionnée, sur le corps agissent d'autres forces dont l'action « détruit » celle de la force considérée.

Si l'on applique au corps pendant un certain temps une seule force, ce dernier ne peut conserver l'état de repos. Cela découle de la première loi de la dynamique. D'autre part, si le corps se trouve au repos, toutes les forces qui lui sont appliquées s'*équilibrent*, ou autrement dit, la somme de toutes ces forces est nulle. Il faut toutefois noter que si l'état de repos du corps n'est pas perturbé sous l'action des forces équilibrées, ce corps se *déformera* sous l'action de ces forces. Dans les cas où entre la déformation et les forces il existe un rapport de causalité univoque, les déformations de certains corps (ressort, dynamomètre, etc.) peuvent servir à la mesure de la grandeur des forces.

La branche de la mécanique qui étudie les lois de l'équilibre des forces agissant sur le corps s'appelle *statique*. Les lois de la statique constituent un cas particulier des lois de la dynamique mais elles sont plus simples. C'est pourquoi on aborde quelquefois l'étude de la mécanique par la statique. Cet ordre d'exposé correspond à l'ordre historique du développement de la mécanique comme science : les lois de la statique devinrent connues beaucoup plus avant que celles de la dynamique.

§ 14. MODES DE MESURES DES FORCES CONSTANTES

En statique les forces restent constantes dans le temps et c'est pourquoi il est plus facile de les déterminer et de les mesurer. La mesure de la force en statique est habituellement une force poids d'un certain corps. *La force poids, ou tout simplement le poids, est la force avec laquelle le corps au repos agit sur un autre corps, en l'empêchant de tomber.*

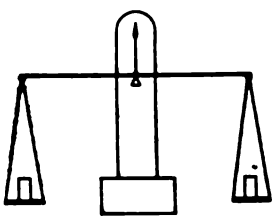


Fig. 29

Si le corps est au repos relativement au sol, il agit sur un support (suspension) avec une force déterminée propre au corps considéré. Déjà dans l'Antiquité l'homme a appris à mesurer la force poids des différents corps en la comparant au moyen de la balance à la force poids d'un corps bien déterminé dont le poids était pris pour unité.

Comme on le sait, la plus simple des balances à levier comporte : un levier à bras égaux balançant librement autour de son milieu et auquel sont suspendus des corps dont on veut comparer le poids (le principe de la balance est montré sur la figure 29). Si le levier à bras égaux auquel sont suspendus des corps est en équilibre et prend une

position horizontale, les forces poids des corps suspendus aux deux extrémités du levier sont les mêmes. On peut donc mesurer en principe la force poids de tous corps.

Par convention internationale il est pris pour unité de force le poids d'un certain corps déterminé, l'étalon. Cet étalon composé d'un alliage de platine et d'iridium est déposé à Sèvres, près de Paris. Comme la force poids dépend du lieu géographique où est mesurée la force poids du corps donné, on a adopté pour unité de force le poids du corps étalon au lieu où il est déposé. Cette unité de force a été appelée *kilogramme-force* (kgf). Dans le système SI on a adopté une autre unité de force, appelée *newton* (N), qui est inférieure au kilogramme de 9,80665 fois. Dans le système CGS l'unité de force est la dyne : 1 dyne = $= 10^{-5}$/N (voir § 18).

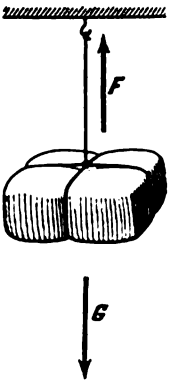


Fig. 30

La force poids est une grandeur physique vectorielle. Ainsi, par exemple, une balle de coton pend au bout d'une corde (fig. 30). La force poids G est dirigée vers le bas ; sa grandeur et sa direction sont figurées par un segment dirigé vers le bas, la longueur du segment correspondant dans une certaine échelle à la grandeur de la force poids. Dans cet exemple, outre la force poids, on peut mentionner la force de tension de la corde, force avec laquelle la corde agit sur la balle de coton ; cette force est représentée sur la figure 30 par le segment F. Les forces F et G sont égales en grandeur, mais sont de sens opposé.

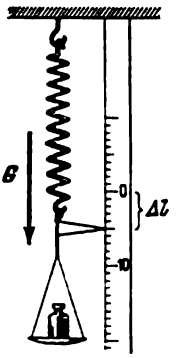


Fig. 31

Si l'on avait mesuré avec précision la longueur de la corde avant la suspension de la charge, on aurait noté après la suspension que la corde s'est un peu rallongée. La déformation de la corde est en rapport de causalité avec la force de tension de la corde. Le lien entre la force et la déformation dépend des propriétés physiques de la corde et de la grandeur de la déformation. Si la grandeur de la déformation est liée de *façon univoque* à la grandeur de la force agissant sur le corps, cette déformation est dite *élastique*.

L'exemple de corps capable de sensibles déformations élastiques est fourni par un ressort en acier. Prenons un ressort en acier et fixons-le par un bout (fig. 31), à l'autre on suspend des charges de poids différents, en mesurant chaque fois la déformation (l'élongation) du ressort avec une graduation fixe. Si l'élongation Δl du ressort n'est engendrée que par le poids G de la charge suspendue (toutes les autres

conditions restant inchangées), la déformation d'un tel ressort est élastique. C'est justement pourquoi le ressort en acier élastique est utilisé comme élément essentiel dans les instruments servant à mesurer les forces. Ces instruments s'appellent *dynamomètres* ou balances à ressort.

Le graphique montrant la dépendance entre la force F détendant le ressort du dynamomètre et l'élongation Δl du ressort est donné à la

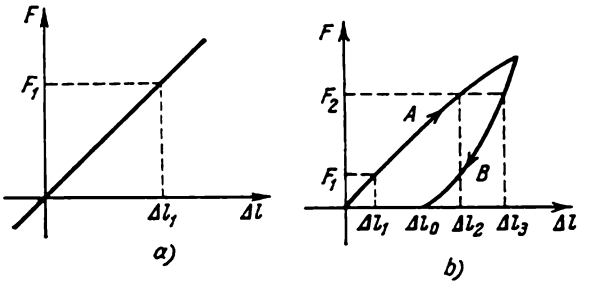


Fig. 32

figure 32, *a*. La dépendance entre la force et la déformation est figurée sur ce graphique par une ligne droite, indépendamment de la force ayant agi avant sur le ressort; sa déformation Δl_1 n'est déterminée que par la grandeur de la force F_1 agissant à l'instant donné, la grandeur de la force F_1 étant proportionnelle à la déformation Δl_1.

La déformation du corps sera non *élastique* si la dépendance entre la force et la déformation ne peut se représenter par une droite.

Si l'on se met à déterminer la dépendance de la force de l'élongation en augmentant la force, on obtiendra la courbe A (fig. 32, *b*) où à la valeur de F_1 correspond Δl_1 et à la valeur F_2 l'élongation Δl_2. On arrivera ainsi à une charge maximale (force) non indiquée sur la figure 32, *b*. Si l'on note les forces et les élongations en diminuant progressivement la charge maximale, on obtiendra une courbe B tout à fait différente, sur laquelle à la force F_2 correspond l'élongation Δl_3 et à la force F_1, l'élongation Δl_2. La charge une fois levée, l'élongation Δl_0 ne sera pas nulle et constituera une *déformation résiduelle*. Ce ressort ne convient donc pas à la mesure des forces, et on n'utilise dans les dynamomètres que des ressorts en acier de bonne qualité manifestant de façon univoque la dépendance de la force de la déformation et présentant des déformations permanentes infiniment petites.

§ 15. CONDITIONS D'ÉQUILIBRE DES FORCES AGISSANT SUR UN POINT

Possédant des charges assorties (jeu de poids), on peut graduer les dynamomètres à ressort. La précision des mesures des forces effectuées à la balance à ressort, si l'on ne prend pas de mesures spéciales, est habituellement assez faible, de beaucoup inférieure à celles réalisées avec des balances à fléaux. Mais comme il est plus facile et plus commode

de manier les dynamomètres à ressort, on s'en sert souvent aussi bien en technique que dans les expériences physiques.

Un dynamomètre gradué se trouvant en notre possession permet de graduer tous les dynamomètres dont on dispose. A cet effet réunissons les bouts des ressorts de deux dynamomètres avec un fil, puis tendons progressivement ce fil; au repos, les deux dynamomètres

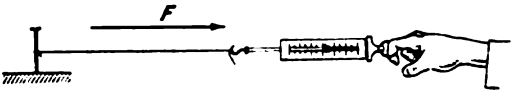


Fig. 33

doivent alors marquer la même grandeur. Sur chacune des particules du fil au repos s'exercent deux forces égales et opposées F et F_1. L'égalité vectorielle des forces peut s'écrire ainsi :

$$F + F_1 = 0. \tag{15.1}$$

Connaissant la valeur des graduations de l'un des dynamomètres, on porte les divisions correspondant aux forces déterminées sur l'échelle du second dynamomètre.

En fixant avec un fil le crochet du dynamomètre à un corps immobile, à un clou enfoncé dans la table par exemple (fig. 33), on peut déterminer la grandeur et la direction de la force avec laquelle le bras tendant le dynamomètre agit sur le clou (la direction de l'action de la force coïncide avec celle du fil). Donc pour définir une force il faut toujours spécifier non seulement la grandeur de la force mais également la direction de son action dans l'espace. La force est une *grandeur physique vectorielle.*

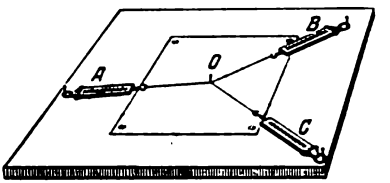


Fig. 34

Si un point est soumis à plusieurs forces s'exerçant suivant différentes directions, on peut remplacer leur action par une seule force qui est leur *résultante.* La grandeur et la direction de la résultante se déterminent, comme pour toutes grandeurs vectorielles, suivant la règle d'addition des vecteurs.

La légitimité de cette assertion se dégage des expériences très simples avec les dynamomètres. Prenons plusieurs dynamomètres gradués. Posons sur la table une feuille de papier (fig. 34) que dépasse un clou enfoncé dans la table, fixons au clou un petit anneau auquel sont attachés trois fils. Une fois les bouts des deux fils attachés au crochets des dynamomètres B et C, tendons ces derniers et fixons les anneaux des dynamomètres. Maintenant deux forces agissent sur l'anneau au point O sous un certain angle; ces deux forces ne

pourront jamais assurer l'équilibre de l'anneau : une fois le clou retiré, l'équilibre sera rompu.

Traçons sur la feuille de papier les directions d'action des forces, en portant à partir de O deux segments OB et OC (fig. 35, *a*) dont les longueurs sont à une certaine échelle proportionnelles aux indications des dynamomètres correspondants B et C. Construisons le segment OD égal à la diagonale du parallélogramme et prolongeons par O la droite OD. Ensuite attachons au troisième fil le dynamomètre A, dirigeant le fil suivant la droite OD, et tendons-le avec une force proportionnelle au segment OD. Fixons le corps du dynamomètre A (fig. 34). En enlevant le clou de l'anneau, on s'aperçoit que l'anneau conserve son équilibre ; donc la force mesurée par le dynamomètre A contrebalance l'action des forces mesurées par les dynamomètres B et C. Il est évident que les trois vecteurs correspondant aux forces F_1, F_2, F_3 forment sur le dessin un triangle fermé (fig. 35, *b*). L'égalité à zéro de toutes les forces agissant sur le point O peut s'écrire ainsi :

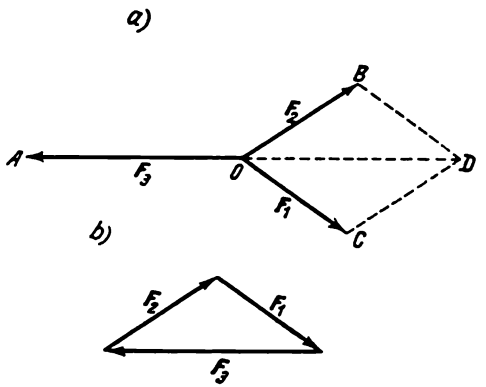


Fig. 35

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0. \tag{15.2}$$

Lorsque la somme de trois forces agissant sur un point est égale à zéro la force dirigée en sens opposé à l'une des trois forces est égale à la somme (résultante) des deux autres.

Notons qu'au lieu des dynamomètres à ressort on aurait pu prendre des poulies et des masses et réaliser avec elles l'expérience semblable à celle montrée sur la figure 34. Il faut cependant veiller à la qualité des poulies: ces dernières doivent présenter un frottement insignifiant aux axes, autrement le résultat n'aura pas la précision exigée.

Si l'on ajoute à trois forces agissant sur un point et situées dans un même plan, comme c'était le cas de l'expérience décrite plus haut (voir fig. 34), une quatrième force située dans le même plan, on peut toujours parvenir à régler la tension des fils de la sorte que les actions des quatre forces sur l'anneau s'équilibrent. Dans ce cas le graphique des vecteurs forces sera un quadrilatère fermé.

De la même façon on peut y ajouter une cinquième force et, en général, autant de forces que l'on voudra ; toutes ces forces agissant sur un point et se trouvant dans un même plan peuvent s'équilibrer.

Les conditions de l'équilibre s'énoncent ainsi : *en cas d'équilibre des forces se trouvant dans un même plan et agissant sur un point sous des angles différents, les vecteurs représentant ces forces forment un polygone fermé.*

Cette condition se justifie de même dans le cas des forces situées dans des plans différents mais agissant sur un même point, le polygone étant dans ce cas gauche (fig. 36).

Deux forces agissant sur un point sous un certain angle *ne peuvent jamais* s'équilibrer. De même que trois forces qui ne se trouvent pas dans un même plan ne peuvent à aucune condition s'équilibrer. En effet, soient trois forces $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (fig. 37) agissant sur un point et ne se trouvant pas dans un même plan. On peut faire passer un plan par

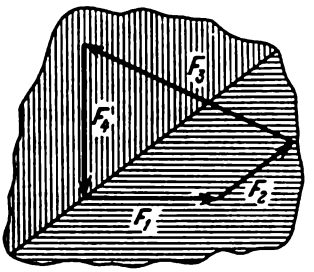


Fig. 36

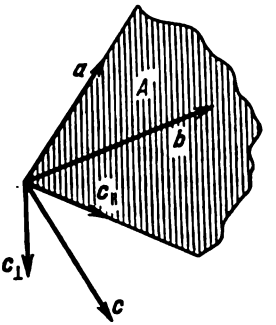


Fig. 37

les directions de deux forces quelconques. Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ les vecteurs se trouvant dans le plan A ; le vecteur force $\boldsymbol{c}$ peut alors être décomposé en deux: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_{\perp} + \boldsymbol{c}_{\parallel}$; $\boldsymbol{c}_{\perp}$ est perpendiculaire au plan A, et $\boldsymbol{c}_{\parallel}$ situé dans ce plan. La résultante de trois forces $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}_{\perp}$ se trouve dans le plan A et ne peut être équilibrée par la force $\boldsymbol{c}_{\perp}$ dirigée perpendiculairement à ce plan. Quatre (et davantage) forces agissant sur un point *peuvent* en principe s'équilibrer. En général, les forces appliquées à un point ne s'équilibrent que si les vecteurs qui les représentent forment un polygone (dans le cas général gauche) fermé. La projection de toute ligne fermée sur un axe quelconque est toujours nulle. Aussi la condition d'équilibre des forces appliquées à un point se formule-t-elle ainsi : *la somme des projections de toutes les forces sur chacun des trois axes rectangulaires doit être nulle.*

Soient $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ les forces appliquées à un point, et respectivement $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ leurs projections sur l'axe x; de façon analogue, désignons les projections de ces forces sur les axes y et z par $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ et $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_n$. On peut

alors écrire les conditions d'équilibre ainsi :

$$X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n=\sum_{i=1}^{n} X_i=0,$$

$$Y_1+Y_2+Y_3+\ldots+Y_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i=0, \qquad (15.3)$$

$$Z_1+Z_2+Z_3+\ldots+Z_n=\sum_{i=1}^{n} Z_i=0,$$

où $\sum_{i=1}^{n}$ est le signe de la somme des grandeurs qui le suivent avec des indices i différents, celles-ci prenant toutes les valeurs 1, 2, 3, . . ., n. Les conditions (15.3) sont absolument équivalentes à l'égalité vectorielle

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\ldots+\boldsymbol{F}_n=0. \qquad (15.4)$$

Si les conditions d'équilibre de toutes les forces appliquées à un point ne sont pas remplies, il y a mouvement. On examinera aux paragraphes suivants comment l'action des forces sur un point est reliée au mouvement.

Notons cependant qu'en examinant l'action d'une force on a négligé les propriétés du corps considéré comme un point matériel. On n'a supposé que le corps ne se désintégrait pas sous l'action des forces considérées. De toute évidence, le corps doit se déformer, mais on n'a pas tenu compte de ces déformations.

En somme quel est le résultat de l'action des forces constantes sur tout corps au repos? Cette action se manifeste par une certaine déformation des différentes parties du corps. Il est évident qu'au moment de l'application de la force, durant les laps de temps où s'opérait la déformation, certaines parties du corps se déplaçaient et il y avait mouvement. Mais ensuite l'équilibre s'établissait et toutes les parties du corps reprenaient leur état de repos. Donc, à l'état de repos l'action des forces ne se manifeste que par la déformation du corps. Or la déformation étant connue, on ne peut déterminer les forces mises en jeu que si la déformation du corps est élastique. Dans le cas contraire cela est impossible sans des études complémentaires très spéciales, car entre les forces et les déformations la liaison est complexe.

§ 16. FORCE ET MOUVEMENT (PREMIÈRE LOI DE NEWTON)

Comme il l'a déjà été dit (voir § 13), on entend par force une cause physique modifiant l'état de mouvement et apparaissant comme une conséquence de l'interaction des corps. Maintenant, après avoir examiné les conditions d'équilibre des forces (§ 15), on est en

mesure de préciser la définition de la force : *la force est une grandeur physique se caractérisant par l'interaction d'au moins deux corps et déterminant une certaine variation de l'état de mouvement du corps ou la variation de la forme du corps ou les deux ensemble.* L'interaction mécanique d'un corps avec d'autres ou l'interaction d'autres corps avec le corps considéré peuvent maintenant être définies au moyen des forces mises en action par les autres corps et agissant sur le corps considéré.

En introduisant la notion de force, on partage en fait le problème du mouvement ou de la déformation de plusieurs corps en interaction en deux : dans le premier, on détermine les forces appliquées à chaque corps, et dans le second, le mouvement (ou la déformation) du corps considéré sous l'action des forces déjà connues.

On sait comment mesurer et définir une force en statique mais on ne connaît pas comment cette force (ses grandeur et direction) est reliée à la variation du mouvement du corps, à la variation de l'état de mouvement et c'est justement le *problème fondamental de la dynamique.*

Avant d'aborder ce problème, notons qu'à priori on ne sait pas que la force mesurée à l'aide du dynamomètre (ou par la balance) influencera de certaine manière le mouvement du corps. Seules les expériences de mesure des forces par des dynamomètres au cours du mouvement des corps nous amènent à reconnaître qu'il existe un rapport de causalité déterminé entre les forces agissant sur le corps et son mouvement.

Le problème fondamental de la dynamique — définition des lois établissant le rapport de causalité entre les forces et le mouvement — a été complètement résolu par Newton sur la base de la loi de l'inertie de Galilée mentionnée au § 12. Cette loi porte le nom de *première loi de Newton* et s'énonce ainsi : *tout corps se trouve à l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme tant que des forces appliquées ne provoquent des variations de cet état.*

La première loi de Newton contient avant tout l'assertion que l'état de repos et le mouvement rectiligne uniforme du corps sont des états mécaniques équivalents du corps. Ensuite, on y fournit une appréciation de l'action de la force : seule une force peut modifier l'état de repos ou le mouvement rectiligne uniforme du corps. En l'absence de forces, en l'absence d'actions extérieures, le corps se meut suivant une droite à une vitesse constante.

Cela paraît étrange à première vue, car on ne connaît pas toujours d'avance toutes les forces agissant sur le corps. Par exemple, le wagon d'un train se meut de façon rectiligne et uniforme, donc la somme de toutes les forces appliquées au wagon est nulle. Et en fait, la force entraînant le wagon en avant est dans ce cas exactement égale à la force qui le tire en arrière. On néglige pour l'instant que la force qui entraîne vers l'avant est due au wagon de tête et la force qui tire

en arrière est composée des forces de résistance de l'air, de frottement des roues, etc. Mais la somme des forces qui tirent vers l'avant et vers l'arrière est égale à zéro, car le corps se meut de façon uniforme et rectiligne. Cette déduction découle de la première loi de la dynamique.

Au cours de la chute d'un corps dans le vide il n'est soumis qu'à une seule force, la force de pesanteur, et, toujours d'après la première loi, le corps ne peut se déplacer de façon uniforme, sa vitesse ne peut être constante, ce qui se confirme pleinement par des observations.

On dit quelquefois que dans un mouvement rectiligne et uniforme le corps se meut par inertie. Cela ne doit pas être interprété dans le sens que le corps se déplace du fait de l'inertie. Pour que le corps conserve son mouvement rectiligne et uniforme, il ne faut faire appel à aucune cause. Le mouvement rectiligne et uniforme du corps (mouvement par inertie) et le repos sont des états naturels de tout corps non soumis aux actions extérieures ou dont la somme est nulle. Les forces agissant sur le wagon en mouvement rectiligne et uniforme sont nulles et c'est la raison pour laquelle le wagon continue son mouvement par inertie. Soulignons qu'il s'agit ici chaque fois de forces appliquées au corps au moment donné et on néglige les forces qui ont agi antérieurement sur le wagon et ont déclenché l'état de mouvement rectiligne et uniforme.

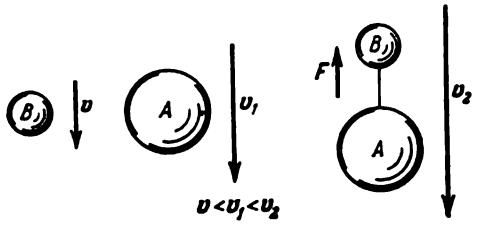


Fig. 38

Le mouvement par inertie est la propriété de tous les corps matériels, voici encore un énoncé de la loi de Galilée — Newton. L'inertie du corps n'est pas la cause du mouvement, mais sa propriété.

Galilée écrit: « Le degré de vitesse propre au corps est *invariablement* lié à sa nature alors que les causes de l'accélération ou du retardement sont des facteurs externes... » (les mots en italique sont de l'auteur) (*G. Galilée*, « Discours et démonstration... »).

Il serait intéressant de suivre la voie par laquelle Galilée est arrivé à découvrir la loi de l'inertie. Il réfuta la fausse conception d'Aristote admise par les savants de son époque suivant laquelle les corps plus lourds devaient chuter plus vite que les corps plus légers. En s'appuyant sur ses recherches, Galilée trouva par des expériences les lois de la chute des corps dans l'air, il étudia le mouvement des corps sur un plan en pente et aboutit à la conclusion qu'en l'absence de résistance de l'air tous les corps devaient chuter de la *même façon*.

Cette déduction fut confirmée postérieurement par Newton au moyen d'une expérience directe par l'observation de la chute des corps dans un tube où au préalable il a réalisé le vide. Cette expérience est souvent refaite aux leçons de physique.

Galilée confirma la justesse de l'analyse des résultats de ses expériences par le raisonnement suivant. Admettons que selon Aristote le corps lourd A chute plus vite que le corps léger B (fig. 38). Réunissons maintenant, en les liant par un fil, les deux corps, on obtient un corps plus lourd qui doit chuter plus rapidement que le corps A ; mais le corps plus léger B doit tomber plus lentement, donc dans la chute des corps liés le corps B doit retarder et tendre le fil. La force de tension F tirera donc le corps A vers le haut et le corps B, vers le bas. Le corps A, du fait d'une force complémentaire dirigée vers le *haut*, augmentera

sa vitesse de chute vers le *bas*. Cela ne peut se produire même d'après les conceptions d'Aristote admises comme correctes. Donc, l'assertion d'Aristote est fausse.

En l'absence de l'air tous les corps chutent d'un mouvement uniformément accéléré, et cette accélération pour tous les corps est la même au lieu considéré de la surface de la Terre. Lorsque les corps chutent d'une faible hauteur, la force de pesanteur reste constante et l'accélération reste également constante, tandis que la vitesse croît continûment. Les expériences sur le mouvement des corps sur un plan incliné montrent que ces derniers se déplacent sur le plan avec une accélération proportionnelle à la composante de la force de pesanteur dirigée suivant le plan incliné. Donc, pour une inclinaison nulle, autrement dit sur un plan horizontal, s'il n'y a pas de frottement, le corps se déplacera avec une vitesse constante quelconque ou demeurera au repos. Donc en l'absence de forces, la vitesse du corps reste constante. Notons que sur la base des mêmes expériences Galilée avait conclu que la force de pesanteur qu'on ne déterminait jusque-là qu'au moyen d'une balance (ou sa résultante le long du plan incliné) est proportionnelle à l'accélération du corps.

§ 17. SECONDE LOI DE LA DYNAMIQUE DE NEWTON

La première loi stipule : si un corps subit l'action des forces son mouvement ne sera pas rectiligne et uniforme. Quel mouvement aura le corps sous l'action des forces? C'est la seconde loi de la dynamique qui y répond.

Pour simplifier l'exposé, donnons au début un énoncé un peu particulier de la seconde loi de la dynamique: *le produit de la masse d'un corps par son accélération est proportionnel à la grandeur de la force agissant sur le corps considéré, les directions de la force et de l'accélération coïncidant.*

L'énoncé général donné par Newton lui-même sera exposé plus loin.

La seconde loi relie ensemble trois grandeurs : la force, l'accélération et la masse. Le sens physique ainsi que les modes de détermination des grandeurs de la force et de l'accélération ont été examinés antérieurement. On déterminera plus loin (§ 18) la signification de la troisième grandeur fondamentale de la mécanique, la masse, en analysant les expériences sur le mouvement de corps différents sous l'action des forces.

En appliquant des forces de grandeurs différentes à un même corps et en mesurant l'accélération provoquée par ces forces, on arrive à la conclusion que l'accélération est proportionnelle à la force appliquée au corps. Supposons qu'une force de tension du fil F est appliquée à un chariot posé sur des rails ; le fil est tendu par la charge G suspendue à l'autre extrêmité du fil passant par une poulie (fig. 39). La force de tension du fil est mesurée à l'aide d'un dynamomètre à ressort. En notant, au cours du mouvement, la grandeur de la force et en mesurant la distance franchie par le chariot durant

un temps déterminé, on trouvera le rapport de causalité entre l'accélération et la force.

Déterminons avant tout la nature du mouvement du chariot sous l'action d'une force constante notée par le dynamomètre. En lançant le chariot à partir d'une certaine marque A, on trouve les distances S_1, S_2, S_3, . . ., parcourues par le chariot durant 1, 2, 3, . . . laps de temps sous l'action de la même grandeur de la force F_0[1]. Il se dégage de l'expérience que le rapport des distances $S_1 : S_2 : S_3 : . . .$ est proportionnel au rapport des carrés des nombres entiers $1 : 2^2 : 3^2 : . . .$ Cette

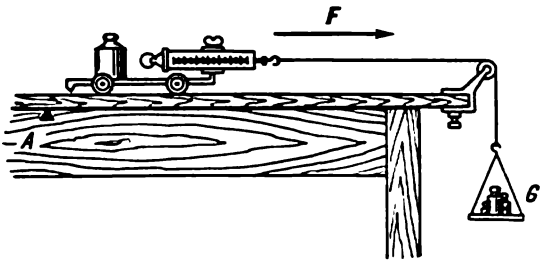


Fig. 39

variation de la distance dans le temps correspond à la formule du chemin parcouru dans un mouvement uniformément accéléré

$$S = \frac{at^2}{2},$$

où a est l'accélération et t, le temps. Le mouvement du chariot sous l'action d'une force constante sera donc un mouvement uniformément accéléré.

Cherchons maintenant la relation entre la grandeur de l'accélération et la grandeur de la force agissante. Modifions G de façon qu'au cours du mouvement le dynamomètre indique, par exemple, une force une fois et demi plus grande, $3/2\ F_0$. De manière analogue on trouve que le mouvement est uniformément accéléré, mais les distances S'_1, S'_2, S'_3, . . ., que le chariot franchit durant 1, 2, 3, . . . laps de temps, seront également une fois et demie plus grandes que les distances correspondantes S_1, S_2, S_3, . . . franchies par le chariot sous l'action de la force F_0 durant les mêmes laps de temps. Dans un mouvement uniformément accéléré, la distance franchie par le corps au cours d'un même laps de temps est proportionnelle à la grandeur de l'accélération $\left(S = \frac{at^2}{2}\right)$. On a beau modifier la force F, chaque fois la distance franchie par le chariot durant un temps déterminé sera proportionnelle à F. Les résultats de ces expériences peuvent être

[1] La charge G ne varie pas au cours de ces expériences.

écrits sous une forme générale ainsi :

$$F = ka, \tag{17.1}$$

la force est proportionnelle à l'accélération et, réciproquement, l'accélération est proportionnelle à la force.

Donc ces expériences confirment le bien-fondé de la seconde loi de la dynamique en ce qui concerne l'assertion que la force est proportionnelle à l'accélération.

Notons que ces expériences reprennent l'idée principale de l'étude classique de Galilée du mouvement sur un plan incliné, avec la seule différence qu'ici la force accélératrice est mesurée à l'aide d'un dynamomètre durant le mouvement, tandis que dans l'étude de Galilée elle n'a pu être mesurée qu'au repos.

Dans ces expériences il est important de réduire au maximum l'action sur le chariot d'autres corps, des rails et de l'air. Cela se dégage de façon évidente des expériences suivantes : détachons le fil du dynamomètre et mesurons les distances parcourues par le chariot durant deux laps de temps successifs et égaux sous l'action d'une poussée de la main. La vitesse du chariot sera choisie à peu près égale à celle des expériences sur le chariot en mouvement accéléré. Si les espaces parcourus par le chariot durant les mêmes laps de temps après la lancée sont à peu près égaux, d'après la première loi de la dynamique, les actions sur le chariot seront suffisamment petites devant la force de tension du fil.

Quoique les actions soient réelles, leur grandeur reste suffisamment petite ; donc les résultats des mesures réalisées avec un certain degré de précision confirment pleinement la justesse de la seconde loi de la dynamique. Devançant l'exposé, notons que si on avait augmenté la précision de mesure des forces, des distances et du temps tout en mesurant les actions (forces) de l'aire et des rails, on aurait confirmé une fois de plus le bien-fondé de la seconde loi de la dynamique.

§ 18. MASSE DU CORPS

Effectuons des expériences avec un véhicule mobile accéléré par une force constante F_0 en changeant chaque fois la charge du véhicule et en mesurant son accélération. Les résultats des premières expériences montrent que l'accélération engendrée par une même force *diminue avec l'augmentation de la charge.* Donc l'accélération acquise par le corps sous l'effet de la force donneé dépend non seulement de la grandeur de la force, mais également d'une certaine propriété physique du corps accéléré, celle-ci variant en fonction de la quantité de matière composant le corps. Cette propriété est appelée *inertie.* Plus l'inertie du corps est grande, moins grande est l'accélération reçue sous l'effet d'une force constante. L'inertie augmente avec l'accroissement de la charge, avec l'accroissement de la quantité de matière composant le corps donné. L'inertie du corps ne se manifeste que dans les processus dynamiques, c'est pourquoi pour des corps banaux elle peut être définie sur la base des expériences dynamiques sur des corps accélérés.

L'inertie du corps a pour mesure une grandeur physique appelée *masse* du corps. En chargeant le véhicule on augmente sa masse et, partant, on diminue son accélération acquise par le véhicule sous l'action de la même force. La grandeur de la masse peut être évaluée à l'aide des expériences sur l'accélération du corps considéré par une force déterminée en tenant compte de la seconde loi de la dynamique. La grandeur ainsi obtenue aurait dû être appelée *masse inerte*. Nous ne mentionnerons pas toujours dans la suite le mot « inerte », mais chaque fois il faut se rappeler que par le nom de « masse » on sous-entend, en l'absence d'une note spéciale, la masse inerte.

On peut choisir la masse d'un certain corps comme *unité de masse inerte* et, ensuite, comparer à celle-ci la masse de tous les autres corps. Par convention internationale, dans le système SI on prend pour unité de masse la masse de l'étalon international du kilogramme (voir p. 51). Cette unité de masse porte le nom de *kilogramme* (kg). En physique on utilise souvent une unité de masse mille fois plus petite que le kilogramme, le *gramme* (g).

Procédons maintenant à des expériences consistant à accélérer des corps différents par une force de grandeur constante. Comme il a déjà été dit, l'accélération dépend non seulement de la grandeur de la force, mais également de l'inertie du corps, ou autrement, de la grandeur de sa masse inerte. Il s'ensuit de la seconde loi que dans ces expériences l'accélération varie en raison inverse de sa masse inerte. Soit F_0 la force appliquée à un corps de masse unitaire et a_1, l'accélération de ce corps. Le corps de masse inconnue reçoit une accélération a_2 sous l'effet de la même force. Alors selon la seconde loi

$$F_0 = km_1a_1 = km_2a_2, \tag{18.1}$$

où k est un coefficient dépendant du choix des unités. De la dernière égalité il se dégage que :

$$m_2 = m_1\frac{a_1}{a_2}. \tag{18.2}$$

Par cette méthode, on peut, en principe, mesurer la grandeur de la masse de tous corps. On indiquera dans la suite d'autres méthodes de mesure de la masse,mais qui dérivent en réalité du procédé exposé. Imaginons maintenant que des expériences analogues sont réalisées avec un tel corps sur une surface horizontale lisse. Supposons que dans ces expériences la direction de la force horizontale appliquée au corps varie chaque fois par rapport au corps ; cela peut être obtenu en modifiant la direction de la force appliquée ou en tournant au préalable de façon quelconque le corps. On constate alors que quelle que soit la direction de la force horizontale appliquée au corps ou quelle que soit la rotation subie par le corps, l'accélération sera toujours proportionnelle à la force appliquée et sa direction coïncidera

chaque fois avec la direction de la force appliquée. Donc la *masse* est une *grandeur scalaire*.

Désignant la grandeur de la masse inerte par m, on peut écrire la seconde loi de la dynamique ainsi :

$$\boldsymbol{F} = km\boldsymbol{a}, \tag{18.3}$$

où $\boldsymbol{F}$ est la force (vecteur), $\boldsymbol{a}$, l'accélération (vecteur) et k, un certain coefficient dépendant du choix des unités. La présence du coefficient dépendant de la grandeur et des dimensions des unités choisies dans l'une des lois fondamentales de la physique offre des inconvénients. On choisit donc habituellement la grandeur de l'unité de masse (et sa dimension) de manière que le coefficient soit sans dimension et ait une grandeur égale à l'unité, $k = 1$.

C'est ainsi qu'en adoptant dans la formule (18.3) pour unité de masse 1 kg et pour unité d'accélération 1 m/s² et en posant $k = 1$, on obtient l'unité dérivée dans le système SI de la force, le *newton* (N) :

$$1\text{N} = 1\ \text{kg} \cdot 1\ \text{m/s}^2.$$

Le système SI est adopté en U.R.S.S. comme système à préférer. Dans ce système on adopte pour unités fondamentales, outre le kilogramme, le mètre et la seconde, les unités suivantes : unité de courant 1 A (*ampère*), unité de température thermodynamique 1 K (*Kelvin*), unité d'intensité lumineuse 1 cd (*candela*), unité de quantité de matière 1 mole.

On utilise en physique d'autres systèmes d'unités. Ainsi, en adoptant pour unités fondamentales la masse de 1 g, la longueur de 1 cm et le temps de 1 s, on choisit la grandeur de l'unité de force de sorte que le coefficient k dans la seconde loi de Newton soit une grandeur égale à une unité sans dimension. C'est le système CGS (centimètre, gramme, seconde). Dans ce système la force est également une unité dérivée et sa formule de dimension s'écrit ainsi :

$$[F] = \text{g}\cdot\text{cm/s}^2. \tag{18.4}$$

Cette unité de force porte le nom de *dyne* (dyn).

En technique on préfère le système d'unités des mécaniciens où les unités fondamentales sont : le kilogramme-force (kgf), le mètre (m), la seconde (s). L'unité de masse est une unité dérivée qui est également choisie de façon que le coefficient k soit égal à l'unité dans la loi de Newton. L'unité de masse est égale à la masse d'un corps auquel la force d'un kilogramme communique une accélération de 1 m/s². Il est évident que l'unité de masse des mécaniciens (c'est-à-dire m) est égale à la masse d'un corps de 9,81 kg.

L'analyse des expériences examinées dans ce paragraphe ainsi que de tous les phénomènes mécaniques qui se caractérisent par des mouvements de faibles vitesses montre que la masse d'un corps est une grandeur constante. Or, comme l'ont montré les recherches sur

des particules très rapides dont la vitesse s'approche de celle de la lumière, la masse de tout corps ne reste pas constante, elle dépend de la vitesse du mouvement. Dans la mécanique moderne d'Einstein il est démontré que la masse est égale à

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{18.5}$$

où m_0 est la masse constante du corps à la vitesse $v \sim 0$. Comme dans les mouvements habituels $v \ll c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s, on peut considérer avec une très grande précision que dans ces cas la masse reste une grandeur constante (pour plus de détails, voir § 155).

§ 19. FORME GÉNÉRALE DE LA SECONDE LOI DE NEWTON

La seconde loi de la dynamique a été énoncée par Newton sous une forme plus générale, différente de celle donnée au paragraphe précédent. Pour caractériser l'état mécanique d'un corps en mouvement, on introduit encore une grandeur, la *quantité de mouvement* du corps (ou *impulsion*). La quantité de mouvement d'un corps est une grandeur physique vectorielle égale numériquement au produit de la masse par la vitesse et dont la direction coïncide avec la direction de la vitesse du corps. Si l'on désigne la quantité de mouvement d'un corps de masse m par $\boldsymbol{K}$, alors pour une vitesse $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{K} = m\boldsymbol{v}. \tag{19.1}$$

L'unité de quantité de mouvement n'a pas de nom spécial. Dans le système SI la quantité de mouvement a pour dimension : kg·m/s. Ainsi si un corps a une masse de 10 kg et sa vitesse est de 2 m/s, sa quantité de mouvement sera

$$10 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m/s} = 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Newton énonça la seconde loi de la dynamique ainsi : « *La variation de la quantité de mouvement est proportionnelle à la force agissante et s'effectue suivant la direction de la droite de l'action de cette force.* »

Dans le langage moderne cette loi peut s'énoncer ainsi : *la dérivée de la quantité de mouvement d'un corps est égale* [1] *en grandeur à la force appliquée et coïncide avec elle en direction.*

Si $\boldsymbol{K}$ est la quantité de mouvement du corps, $\boldsymbol{F}$ la force appliquée, on aura pour tout moment de temps

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{K}}{dt}, \quad \text{ou } \boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}). \tag{19.2}$$

[1] Si toutes les grandeurs sont mesurées dans le même système d'unités.

Et c'est seulement dans le cas où la masse du corps reste constante dans le temps qu'on peut sortir de sous le signe de dérivation la grandeur de la masse et écrire

$$F = m\frac{dv}{dt}, \tag{19.3}$$

où $\frac{dv}{dt}$ est l'accélération du corps. Donc c'est seulement dans le cas particulier, il est vrai, très fréquent, que la formule ancienne est valable.

Dans le cas d'un corps dont la masse varie durant le mouvement, il faut utiliser la seconde loi sous sa forme générale (avec la quantité de mouvement) qui traduit correctement les lois dynamiques dans tous les cas de mouvement du point matériel.

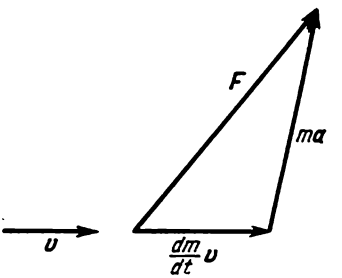


Fig. 40

La forme générale de la seconde loi de la dynamique s'est avérée juste également dans la théorie de la relativité. Comme il a été mentionné plus haut, suivant cette théorie la masse dépend du module de la vitesse du corps mobile (18.5). Donc c'est l'expression (19.2) qui est vraie et non pas l'expression (19.3). La loi de la dynamique s'énonce alors ainsi :

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}v + ma. \tag{19.4}$$

Avec la variation de la grandeur de la vitesse on voit varier la masse m, et dans le cas général la force F ne coïncide pas en direction avec l'accélération a et l'accélération n'est pas proportionnelle à la force.

Comme on le verra dans ce qui suit (§ 156), c'est seulement quand la force est dirigée suivant la direction de la vitesse v ou quand la force est normale à la vitesse que l'accélération a et la force F coïncident en direction. Dans les autres cas la situation est à peu près celle montrée à la figure 40. Dans la mécanique de Newton $\frac{dm}{dt}v \ll ma$, la masse m différant très peu de la constante m_0. Même pour des vitesses terrestres aussi grandes que la vitesse cosmique ($v = 30$ km/s), le rapport $v/c = 10^{-4}$, la masse différant de m_0 de $5 \cdot 10^{-9}$ fraction de l'unité. Pour des vitesses « techniques » habituelles cette fraction est encore plus petite. Il va de soi qu'il ne s'agit pas de vitesses des particules dans les accélérateurs, etc. v y étant proche de c et, par suite, la mécanique de Newton doit céder place à la mécanique plus précise d'Einstein.

Dans la première et la seconde lois de Newton il ne s'agit que de la force appliquée au seul corps considéré et on ne mentionne pas d'autres corps d'où cette force émane. La force caractérise l'interaction d'au moins deux corps ; le rôle du second corps dans les phénomènes dynamiques se manifeste dans la troisième loi de Newton qui, en fait, est inséparable des deux premières.

§ 20. TROISIÈME LOI DE NEWTON

La troisième loi de la dynamique de Newton s'énonce ainsi: « *A l'action est toujours opposée une réaction égale ; autrement dit, les interactions mutuelles de deux corps sont égales entre elles et dirigées dans des sens opposés.* »

Dans la première et la seconde lois il s'agissait de la force s'exerçant sur le corps considéré et des résultats de l'application de cette force indépendamment du corps d'où cette force émane en négligeant l'origine de la force agissante. En fait, la variation de l'état de mouvement d'un corps ne se produit qu'à la suite de l'interaction de plusieurs corps. Dans chaque cas concret, lorsqu'on envisage une force quelconque, on indique toujours deux corps: celui sur lequel la force agit et celui qui provoque la force.

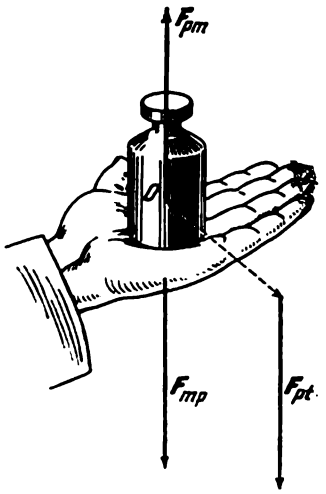


Fig. 41

Si la force appliquée à un certain corps A est engendrée par un second corps B, on désignera cette force par F_{AB}.

La troisième loi stipule : si le corps B agit sur le corps A avec une force F_{AB}, le corps A, à son tour, agit obligatoirement sur le corps B avec la force F_{BA} égale en grandeur et de signe opposé à la force F_{AB} ; les deux forces sont supportées par une même droite. La troisième loi traduit le fait que *la force est le résultat de l'interaction de deux corps différents.*

A des fins d'analyse du phénomène et pour définir le mouvement du corps, dans les deux premières lois on n'a étudié qu'un aspect de l'interaction. En fait, il y a toujours interaction et il n'existe pas de force sans contreforce. Il est évident que les dénominations « action » et « réaction » sont conventionnelles, l'une pouvant être prise pour l'autre et inversement.

Par exemple, sur la main est posé un poids, la main agissant sur le poids avec la force F_{pm} dirigée vers le haut et appliquée au poids, tandis que le poids, de son côté, agit sur la main avec la force F_{mp} dirigée vers le bas et appliquée à la main (fig. 41). Commen-

çons maintenant à soulever et à abaisser la main. D'après la troisième loi

$$F_{pm} + F_{mp} = 0. \tag{20.1}$$

Cette égalité a *toujours* lieu, indépendamment du fait que la main soit mobile ou au repos avec la charge.

La troisième loi ne révèle rien sur la grandeur des forces et ne fait que constater qu'elles sont égales. Il est important de noter ici que la troisième loi traite des forces appliquées à des corps *différents*.

Dans le cas de l'interaction de deux charges électriques mobiles les choses deviennent plus compliquées. Ainsi, en étudiant les forces d'interactions de deux charges lancées comme c'est montré sur la figure 42, on constate que l'interaction électrique des charges se conforme à la troisième loi de Newton, mais l'interaction magnétique n'y répond pas. Le champ magnétique de la charge *2* au point où se trouve la charge *1* est nul, il n'y a pas d'action de la charge *2* sur la charge *1*; le champ magnétique de la charge *1* au point où se trouve la charge *2* diffère du zéro, la charge *1* agit sur la charge *2* avec une force dirigée suivant la normale au plan du dessin.

Le fait est que dans l'étude de l'interaction des charges mobiles il faut tenir compte de l'impulsion du champ électromagnétique, ce que l'on fait en électrodynamique.

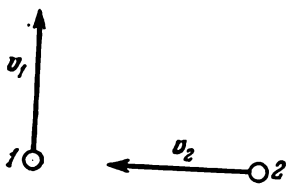


Fig. 42

Les trois lois fondamentales de la dynamique formulées par Newton étaient connues avant lui. Il écrivait: « J'ai exposé les principes adoptés par les mathématiciens et confirmés par de nombreuses expériences. Utilisant les deux premières lois ..., Galilée a découvert que la chute des corps est proportionnelle au carré du temps ... A l'aide de ces deux lois et de la troisième le chevalier Christopher Wren, John Wallis et Christiaan Huygens, les plus grands géomètres de notre époque, ont dégagé les lois du choc et de la réflexion des corps ...» Mais avant Newton on ne savait pas que ces trois lois constituaient le fondement de toute la mécanique. Seul Newton, en étudiant et en analysant les mouvements des corps différents, montra que tous les phénomènes mécaniques aussi compliqués qu'ils soient obéissaient aux trois lois de la dynamique, et il est le seul qui réussisse à échafauder sur la base de ces lois un système harmonieux de la mécanique scientifique. Il est donc en bonne justice d'attacher le nom de Newton à ces lois.

§ 21. FORCES, LA DEUXIÈME ET LA TROISIÈME LOIS DE NEWTON

Lorsqu'on étudie des mouvements ou on résout des problèmes mécaniques, on voit surgir des malentendus, dus à ce qu'on ne parvient pas du premier coup à saisir la différence entre les conséquences

logiques de la seconde et de la troisième lois de la dynamique. Montrons-le sur des exemples.

L'analyse de chaque problème mécanique débute par la détermination des forces et des corps agissant sur le corps considéré ainsi que par quoi elles se définissent. Ensuite, utilisant la seconde loi, on détermine si le besoin s'en ressent, l'accélération du corps compte tenu des conditions imposées à ces forces par la troisième loi. Examinons quelques problèmes.

1) Un poids est posé sur la paume de la main. Supposons que la main se meut de façon quelconque. Déterminons les forces appliquées à la main et au poids et cherchons l'accélération du poids.

L'égalité (20.1) découle de la troisième loi et elle nous est d'aucun secours pur la détermination de l'accélération du poids. Pour déterminer l'accélération, il faut connaître toutes les forces complémentaires appliquées au poids de la part des autres corps. Outre la force de la main F_{pm}, sur le poids agit la force de pesanteur, c'est-à-dire la force de son interaction avec la Terre[1], que nous désignerons par F_{pt}. On peut maintenant trouver l'accélération du poids. Le poids est sollicité par une force équivalente à la somme de deux forces, qui, selon la seconde loi, est égale au produit de la masse du poids par son accélération :

$$F_{pt} + F_{pm} = m_p a_p. \tag{21.1}$$

Donc, si la force de pesanteur F_{pt} est supérieure à la force de la main F_{pm}, l'accélération sera dirigée vers la Terre ; et inversement, si la force de la main est supérieure à la force de pesanteur l'accélération sera dirigée vers le haut.

La grandeur et la direction des forces ne déterminent que l'accélération et non pas la vitesse, de sorte qu'on ne peut dire dans quelle direction se déplacera le poids pour $F_{pt} > F_{pm}$: il peut se mouvoir avec une accélération vers le bas ou avec un ralentissement vers le haut. De façon rigoureuse, si l'accélération est dirigée vers le bas, la vitesse, par contre, peut prendre une direction quelconque : vers le haut, vers le bas et même de côté. La direction de la vitesse au moment donné n'est pas, en général, liée à la direction de l'accélération, mais l'accélération se détermine de façon univoque par les forces agissantes.

Si l'accélération du poids est nulle, la somme des forces appliquées au poids est également nulle ; autrement dit, l'action de la main sur le poids F_{pm} est égale et de sens opposé à la force de pesanteur F_{pt}. Cette condition remplie, le poids peut se trouver au repos ou être animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse quelconque.

---

[1] La résistance de l'air est très faible et on peut la négliger dans ces raisonnements.

2) Une charge est suspendue par un ressort à un support (fig. 43). Admettons que le support auquel est fixé le ressort forme bloc avec la table immobile sur le sol. Considérons donc trois corps : la charge, le ressort et la Terre (avec la table et le support). Entre ces corps il y a interaction de forces montrée schématiquement sur la figure 44, où les trois corps sont dessinés séparément. De la part de la Terre sur la charge agit la force F_{cht} (pesanteur de la charge) et sur le ressort la force F_{rt} (pesanteur du ressort). De la part de la charge sur le ressort agit la force F_{rch} et de la part du support (de

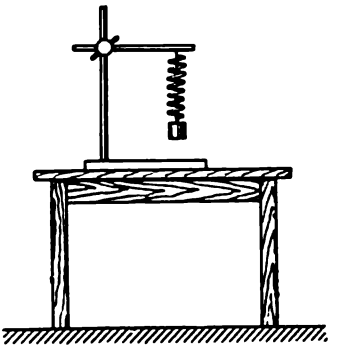


Fig. 43

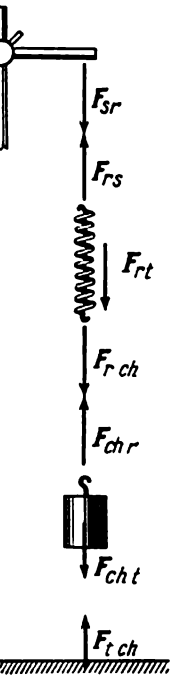


Fig. 44

la Terre), la force F_{rs}. Selon la troisième loi, on doit toujours avoir les égalités suivantes :

$$F_{cht} + F_{tch} = 0\,; \quad F_{rch} + F_{chr} = 0\,; \quad F_{rs} + F_{sr} = 0, \tag{21.2}$$

et selon la seconde loi

$$\begin{aligned} F_{cht} + F_{chr} &= m_{ch} a_{ch}, \\ F_{rs} + F_{rch} + F_{rt} &= m_r a_r, \\ F_{sr} + F_{tch} + F_{tr} &= m_t a_t, \end{aligned} \tag{21.3}$$

où m_{ch}, m_r, m_t sont respectivement les masses de la charge du ressort et de la Terre, tandis que a_{ch}, a_r, a_t, leurs accélérations. Mais comme le système de référence est lié à la Terre, l'accélération $a_t = 0$[1]. Généralement, la masse du ressort ou son poids sont faibles devant la masse ou le poids de la charge et on peut donc dans nombre de

[1] Il n'en découle pas que $m_t a_t = 0$, car m_t est très grande ($m_t \to \infty$).

problèmes considérer que $m_r = 0$ et $F_{rt} = F_{tr} = 0$. L'équation (21.3), traduisant la seconde loi de Newton, peut alors s'écrire ainsi :

$$F_{cht} + F_{chr} = m_{ch} a_{ch}, \quad F_{rs} + F_{rch} = 0,$$
$$F_{sr} + F_{tch} = m_t a_t. \tag{21.4}$$

Pour le ressort (vu que sa masse est négligeable)

$$F_{rs} + F_{rch} = 0 \tag{21.5}$$

d'après la seconde loi. La condition (21.5) traduit que la force de tension du ressort (« impondérable ») est toujours, quelles que soient les conditions, égale aux deux bouts. La force appliquée à l'une des extrémités du ressort est exactement égale à la force appliquée à l'autre extrémité. Or d'après la troisième loi, ces forces sont égales en grandeur aux forces (F_{sp}, F_{chr}) avec lesquelles le ressort agit sur les corps qui le tendent. Ainsi donc le ressort « impondérable »[1] « transmet » la force sans modification, qu'il soit mobile ou au repos. C'est pourquoi on considère toujours la tension du ressort ou du fil comme une force émanant des deux bouts du ressort ou du fil.

La force F_{cht} agissant sur la charge du côté de la Terre (force de pesanteur) n'est plus égale à la force F_{chr} avec laquelle le ressort agit sur la charge. La différence entre ces forces détermine l'accélération de la charge. Notons que si à l'instant donné $F_{chr} > F_{cht}$ la force du ressort est supérieure à celle de la pesanteur ; cela ne signifie pas que la charge remonte, mais seulement que l'accélération est dirigée vers le haut. La force du ressort F_{chr} et la force de pesanteur F_{cht} ne sont pas égales l'une à l'autre (selon la seconde loi). La différence entre ces forces assure l'accélération correspondante de la charge.

Si la charge et le ressort sont au repos, leurs accélérations sont nulles : $a_{ch} = a_r = 0$. Dans ce cas dans les deux premières équations de (21.3) les seconds membres seront nuls. La force du ressort F_{ch} appliquée à la charge sera égale en grandeur à la force de pesanteur F_{cht} et, d'après la troisième loi, également à la force avec laquelle la charge tend le ressort F_{rch} et qu'on appelle force poids. Donc, à l'état de repos trois forces différentes sont égales en grandeur absolue : F_{cht}, la force de pesanteur ; F_{chr}, la force de tension du ressort et F_{rch}, la force poids de la charge. La force poids et la force de pesanteur sont simplement égales, $F_{cht} = F_{rch}$.

Notons que si l'on ne peut négliger le poids du ressort (plus précisément, la force de pesanteur F_{rt}) on aura également en statique aux deux bouts du ressort des forces de tension inégales. D'après la seconde équation (21.3) on aura dans ce cas, pour $a_r = 0$,

$$F_{rs} + F_{rch} = -F_{rt}. \tag{21.6}$$

[1] En général, tout corps « impondérable » ; par exemple, c'est le cas des fils utilisés dans les expériences citées.

La force de tension au bout supérieur du ressort F_{rs} sera plus grande à celle de la tension du ressort à son bout inférieur F_{rch} de la grandeur de la force de pesanteur du ressort F_{rt}.

Si, par contre, le poids du ressort est très faible par rapport au poids de la charge, on peut négliger la force F_{rt} ($F_{rt}=0$). Alors dans des conditions statiques (la charge au repos) toutes les forces étudiées seront égales en grandeur l'une à l'autre. Outre les égalités (21.3), qui sont toujours vraies, on aura aussi les égalités deduites des équations (21.3) :

$$F_{cht}+F_{chr}=0,$$
$$F_{rs}+F_{rch}=0,$$
$$F_{sr}+F_{tch}=0. \quad (21.7)$$

C'est seulement dans ce cas que les six forces d'interaction entre les trois corps : la Terre, la charge et le ressort, sont égales en grandeur ; trois d'entre elles, F_{cht}, F_{sr}, F_{rch} sont dirigées vers le bas, les autres, vers le haut.

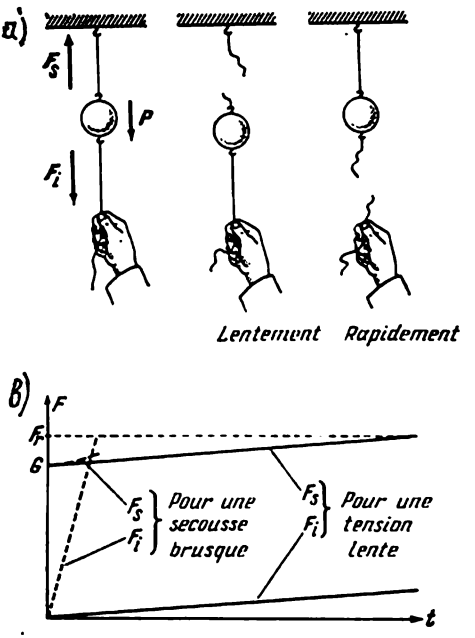


Fig. 45

Soulignons une fois de plus que d'après la troisième loi l'égalité des forces appliquées à des corps différents a toujours lieu. L'égalité à zéro de la somme des forces appliquées à un corps n'est réalisée que pour les corps se trouvant au repos ou en mouvement rectiligne uniforme (d'après la seconde loi).

L'égalité approchée des forces appliquées à un corps n'a lieu que dans le cas particulier où l'on peut négliger la masse du corps sur lequel les forces agissent, ou plus précisément, quand le produit de la masse par l'accélération pour le corps considéré est très petit devant la grandeur de chaque force mise en œuvre. Par exemple, dans l'expérience avec l'accélération du chariot (voir fig. 39) on a négligé la masse du ressort du dynamomètre et admis que les indications du dynamomètre sont celles de la statique.

Dans des chocs, les accélérations étant très grandes, on ne peut toujours négliger les masses faibles.

3) Rôle de l'inertie du corps dans la transmission de la force. Une charge de masse m pend au bout d'un fil, on lui attache par le bas un fil de même épaisseur qu'en

haut (fig. 45, *a*). Si l'on commence à tendre lentement et progressivement le fil inférieur, c'est le fil supérieur qui rompra. Si on tire brusquement sur le fil inférieur on rompra facilement le fil inférieur.

Il évident que la force de tension du fil inférieur F_i (force avec laquelle le fil agit sur la charge) et la force de tension du fil supérieur F_s ainsi que la force de pesanteur de la charge P doivent être égales à sa masse m multipliée par l'accélération de la charge a:

$$F_i + F_s + P = ma. \tag{21.8}$$

La force F_s est dirigée vers le haut et les autres vers le bas. L'accélération a lorsque le fil inférieur est tendu, est également dirigée vers le bas. Donc l'égalité (21.8) peut s'écrire de la sorte:

$$F_i - F_s + P = ma,$$

ou

$$F_i - F_s = ma - P. \tag{21.9}$$

Les fils sont considérés comme impondérables et, partant, on laisse tomber les autres forces. Lorsque le fil est tendu lentement, le phénomène se produit de façon « quasi statique », l'accélération a de la charge est infiniment petite, et l'égalité (21.9) se réduit à

$$F_s - F_i = P. \tag{21.10}$$

La force de tension du fil supérieur est toujours plus grande que la force de tension F_i du fil inférieur de la grandeur P.

La situation est absolument différente au moment de la secousse brusque du fil inférieur. Le fil supérieur doit se tendre rapidement pour agir sur la charge avec une force accrue correspondant à la tension du fil inférieur. Donc au cours de la secousse la charge acquerra une certaine accélération a vers le bas et d'autant plus grande que la force F_i appliquée de bas est intense. Dans ce cas la force de tension du fil inférieur F_i peut dépasser la tension du fil supérieur F_s. Il découle de l'égalité (21.9) que si $ma > P$, $F_i > F_s$. Si la différence de tension des fils et la force de pesanteur communiquent à la charge une accélération a supérieure à l'accélération de la force de pesanteur, la tension du fil inférieur sera plus grande que celle du fil supérieur.

Notons que le déplacement de la masse de la charge est infime, quant à l'accélération elle peut être très grande, car le temps mis pour l'accélérer est suffisamment petit.

Il est utile d'examiner le graphique de variation des forces dans le temps pour une tension lente et une brusque secousse (fig. 45, *b*). Lorsque le fil est tendu lentement, les deux forces augmentent presque également, mais la force de tension du fil supérieur F_s dépasse toujours F_i de la grandeur correspondant au poids de la charge. Pour un accroissement rapide de la force de tension du fil inférieur, cette dernière atteint rapidement la valeur F_r à laquelle il y a rupture du fil, quant à la force de tension du fil supérieur elle augmente

relativement lentement. Notons que lorsqu'on explique ces expériences on doit porter une attention particulière à l'allongement du fil supérieur : l'augmentation de longueur, même très petite, du fil supérieur est nécessaire pour que la force de tension puisse croître. Dans la secousse brusque, pendant qu'augmente la déformation du fil supérieur, la tension du fil inférieur atteint sa valeur limite ; l'inertie de la charge s'oppose au déplacement rapide du corps ; de façon rigoureuse, il faut pour cela une force d'une intensité que ne peut lui fournir le fil inférieur. Cette analyse montre que les expériences décrites seront toujours réussies si la longueur du fil supérieur est suffisamment grande.

4) Le cheval et le traîneau. D'habitude, lorsqu'on étudie la troisième loi, on cite l'exemple d'un cheval traînant un traîneau et on pose la question suivante : le traîneau agit sur le cheval

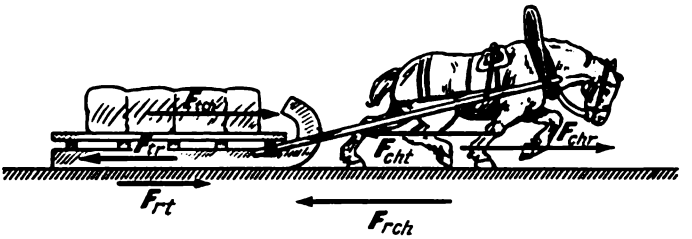


Fig. 46

avec une force égale à celle que le cheval applique au traîneau; mais pourquoi alors c'est le cheval qui tire le traîneau et non pas l'inverse ?

Les exemples envisagés nous amènent à conclure que la troisième loi ne permet pas de résoudre le problème de l'accélération du corps. La question y est posée de façon incorrecte. Il s'agit en l'occurrence de l'égalité de forces appliquées à des corps différents, ce qui ne suffit pas encore pour résoudre le problème de l'accélération du cheval et du traîneau. Il faut connaître les autres forces agissant sur le cheval et le traîneau, et c'est seulement alors qu'on pourra déterminer l'accélération des corps (du cheval et du traîneau).

Sur la figure 46 on a montré toutes les forces s'exerçant dans ce cas sur les trois corps (le traîneau, le cheval et la route); on les a tracées de la même façon que dans l'exemple 1. Les forces F_{cht} et F_{tch} caractérisent l'interaction du cheval et du traîneau ($F_{cht} = F_{tch}$), les forces F_{rt} et F_{tr}, les forces de frottement entre le traîneau et la route ($F_{rt} = F_{tr}$), et F_{rch} et F_{chr}, les forces de cohésion entre le cheval et la route ($F_{rch} = F_{chr}$). Chaque égalité représente toujours des forces égales dirigées dans des sens opposés et appliquées à des différents corps en interaction (selon la troisième loi). Si $F_{chr} > F_{tr}$ ou si la force appliquée au cheval du côté de la route (F_{chr})

est supérieure à la force de frottement du traîneau (F_{tr}), le traîneau et le cheval possèdent une accélération dirigée vers l'avant (selon la seconde loi). Les forces F_{tch} et F_{cht} ne peuvent rien y changer. Si $F_{chr} < F_{tr}$, le cheval et le traîneau ont une accélération dirigée vers l'arrière. Ce n'est que dans un mouvement rectiligne uniforme que toutes les forces indiquées sur la figure 46 sont égales en grandeur.

On propose au lecteur de déterminer quelles forces sont égales d'après la troisième loi et quelles forces sont égales d'après la seconde loi.

Tous ces exemples montrent que la troisième loi de la dynamique traduit avant tout le fait que la cause de la variation de l'état de mouvement d'un corps quelconque est obligatoirement au moins un autre corps qui subit en même temps l'action du premier corps. Cela signifie que le mouvement d'un corps quelconque est engendré ou arrêté du fait de l'interaction avec un autre corps; le mouvement est pour ainsi dire *transmis* d'un corps à l'autre.

§ 22. MOUVEMENT D'UN CORPS SOUS L'EFFET DE FORCES DONNÉES

L'exemple le plus simple d'un tel mouvement est la « chute » libre d'un corps, le mouvement d'un corps dans le champ de pesanteur. *On appelle champ de forces un espace en chaque point duquel sur la particule (corps) placée en ce point agit une force déterminée.*

En général, on appelle champ physique vectoriel un tel domaine de l'espace à chaque point duquel correspond une grandeur physique vectorielle connue. C'est ainsi, par exemple, qu'autour des corps fixes électriquement chargés se forme un champ électrique continu de vecteur d'intensité $\boldsymbol{E}$. A chaque point de l'espace correspond un vecteur $\boldsymbol{E}$ définissant la force

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}, \tag{22.1}$$

sollicitant la charge ponctuelle e située en ce point de l'espace.

Autour des conducteurs fixes parcourus par un courant continu se crée un champ magnétique du vecteur d'induction $\boldsymbol{B}$ qui définit la force

$$\boldsymbol{F} = e\,|\,\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}\,|, \tag{22.2}$$

agissant sur la charge électrique ponctuelle e se mouvant avec la vitesse $\boldsymbol{v}$ et se trouvant au point de l'espace où le vecteur d'induction possède l'intensité $\boldsymbol{B}$. Notons que si l'on mesure les grandeurs en unités SI $\left([e] = A\cdot s;\ [E] = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{A}\cdot\text{s}^3};\ [B] = \frac{\text{kg}}{\text{A}\cdot\text{s}}\right)$, la force sera donnée en newtons.

Lorsqu'une particule chargée se déplace dans un champ électrique uniforme $\boldsymbol{E}$, elle est sollicitée par une force constante $\boldsymbol{F}$, égale

en tous les points du champ, car dans un champ uniforme le vecteur E est le même en tous les points du champ. Donc le mouvement sera un mouvement uniformément accéléré.

Le mouvement d'un corps dans le champ de pesanteur près de la surface terrestre se manifeste de façon analogue. Si les dimensions du domaine de l'espace sont petites devant le rayon de la Terre, le champ de pesanteur y peut être considéré comme uniforme. Dans ce cas le mouvement du corps s'effectue avec une accélération constante g ($g = 9{,}81$ m/s^2). Dans un champ électrique continu uniforme le mouvement d'une particule chargée est un mouvement uniformément accéléré

$$w = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}. \qquad (22.3)$$

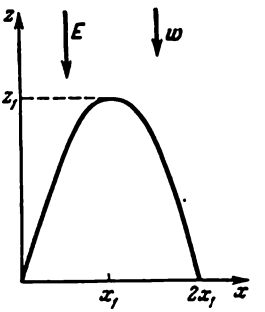


Fig. 47

Ces mouvements ont été étudiés au § 10.

Dans les deux cas la trajectoire du mouvement de la particule se trouve dans le plan passant par le point de la position de la particule à l'instant $t = 0$ et par les vecteurs w et v_0, menés à partir de ce point. La trajectoire est une *parabole*. En effet, prenons l'équation du mouvement (10.9) sous la forme vectorielle et écrivons-la en projections, en posant que l'origine des coordonnées se trouve au point r_0 et le mouvement s'effectue dans le plan (x, z), alors

$$r - r_0 = xi + zk, \quad v_0 = v_x i + v_z k, \quad w = -wk,$$

l'accélération étant dirigée du côté des valeurs négatives de z. Les équations du mouvement en projections sur les axes x et z se mettent sous la forme

$$x = v_x t, \quad z = v_z t - \frac{1}{2} wt^2. \qquad (22.4)$$

Ce sont les équations de la parabole dans le plan (x, z) passant par l'origine des coordonnées (pour $t = 0$). Eliminant des deux équations le temps t, on obtient la trajectoire du mouvement en coordonnées x et z (fig. 47) :

$$z = \frac{v_z}{v_x} x - \frac{w}{2v_x} x^2. \qquad (22.5)$$

C'est l'équation de la parabole dont le sommet se trouve au point x_1, z_1. Le temps t_1 au bout duquel la particule atteint le sommet de la parabole s'obtient de la condition : $\frac{dz}{dt} = 0$ à l'instant t_1, ou

$$\frac{dz}{dt} = v_z - wt_1 = 0, \quad t_1 = \frac{v_z}{w}.$$

Portant t_1 dans l'équation (22.4), on trouve les coordonnées du sommet de la parabole :

$$x_1 = \frac{v_x v_z}{w}, \quad z_1 = \frac{v_z^2}{2w}.$$

En chutant, la particule traversera l'axe x à la distance $2x_1 = 2v_x t_1 = \frac{2v_x v_z}{w}$ (« éloignement »). On peut montrer que pour la valeur donnée de v_0 l'éloignement maximal est atteint pour $v_x = v_z = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0$ et est égal à v_0^2/w ; la hauteur maximale est égale à $v_0^2/2w$ pour $v_x = 0$ et $v_z = v_0$.

Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme. Le champ électrique agit sur une charge au repos comme sur une charge mobile, la force étant indépendante de la vitesse de la charge et n'est fonction que de sa position. La force est toujours dirigée suivant le vecteur champ $\boldsymbol{E}$.

La situation est touet différente quand une particule chargée est mobile dans un champ magnétique. Dans le champ magnétique la particule n'est sollicitée par une force que lorsque sa vitesse $v \neq 0$, sur une particule au repos le champ magnétique n'agissant pas.

D'après la formule (22.2) la force $\boldsymbol{F}$ est égale à la charge e multipliée par le produit vectoriel de la vitesse $\boldsymbol{v}$ par le vecteur d'induction magnétique $\boldsymbol{B}$. Donc la force $\boldsymbol{F}$ est normale au plan passant par les vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{B}$ et est égale à

$$F = evB \sin \alpha,$$

où α est l'angle entre les vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{B}$. La direction de la force $\boldsymbol{F}$ est déterminée par la *règle de la vis à filet droit* : si on fait tourner une vis à filet droit dans un écrou, fixé dans le plan des vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{B}$, du vecteur $\boldsymbol{v}$ vers le vecteur $\boldsymbol{B}$ dans le sens du plus petit angle α qu'ils forment, la vis se déplacera suivant la direction de la force $\boldsymbol{F}$ (voir fig. 14).

Donc si la vitesse $\boldsymbol{v}$ coïncide en direction avec le vecteur $\boldsymbol{B}$ la force $\boldsymbol{F} = 0$, le champ n'agissant pas également dans ce cas sur la particule mobile. La force $\boldsymbol{F}$ est toujours normale à la vitesse $\boldsymbol{v}$ et, par suite, son action ne modifie pas la grandeur (module) de la vitesse v. Sous l'action de $\boldsymbol{F}$ ce vecteur vitesse ne fait que pivoter comme dans un mouvement uniforme sur le cercle.

On peut donc se représenter le mouvement de la particule dans un champ magnétique uniforme d'induction $\boldsymbol{B}$ comme composé de deux parties. Décomposons la vitesse de la particule $\boldsymbol{v}$ en deux composantes :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\parallel} + \boldsymbol{v}_{\perp},$$

où $v_{\parallel}$ est parallèle au vecteur d'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ et $v_{\perp}$ est normal à ce dernier; on aura alors

$$\boldsymbol{F} = e\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}] = e\,[(\boldsymbol{v}_{\parallel} + \boldsymbol{v}_{\perp})\,\boldsymbol{B}] = e\,[\boldsymbol{v}_{\perp}\,\boldsymbol{B}], \tag{22.6}$$

car $[\boldsymbol{v}_{\parallel}\boldsymbol{B}] = 0$.

L'accélération $\boldsymbol{F}/m$ est toujours normale à $\boldsymbol{B}$, donc la composante de la vitesse de la particule $v_{\parallel}$ ne varie pas dans le temps et la particule se meut dans la direction de $\boldsymbol{B}$ à la vitesse constante $v_{\parallel}$. D'autre part, la composante de la vitesse $v_{\perp}$ dans le plan normal à $\boldsymbol{B}$ varie de la sorte que l'accélération égale d'après (22.6) à $\frac{e\,[\boldsymbol{V}_{\perp}\boldsymbol{B}]}{m}$ soit toujours perpendiculaire à $v_{\perp}$ et ait pour grandeur

$$\frac{e}{m}\,v_{\perp}B. \tag{22.7}$$

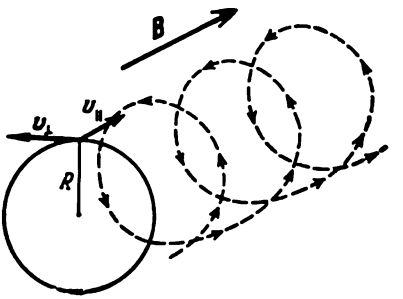


Fig. 48

Le module de $v_{\perp}$ ne varie donc pas. La particule se mouvra de la sorte que sa projection sur le plan normal à $\boldsymbol{B}$ acquiert un mouvement uniforme sur le cercle de rayon R à la vitesse linéaire $v_{\perp}$. Le rayon du cercle R s'obtient de la condition d'égalité de l'accélération centripète et de (22.7):

$$\frac{v_{\perp}^2}{R} = \frac{e}{m}\,v_{\perp}B;$$

d'où

$$R = \frac{mv_{\perp}}{eB}. \tag{22.8}$$

Le temps d'une rotation

$$\tau = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{eB}. \tag{22.9}$$

Il ne dépend pas de $v_{\perp}$ et n'est fonction que de la grandeur du champ B et du rapport e/m de la particule.

Le mouvement résultant se compose donc de la somme de deux mouvements: d'un mouvement uniforme à la vitesse $v_{\parallel}$ le long de la ligne parallèle à $\boldsymbol{B}$ et d'un mouvement uniforme sur le cercle de rayon R à une vitesse de grandeur constante $v_{\perp}$. Le mouvement résultant est un mouvement hélicoïdal (fig. 48).

Au cours du mouvement, la composante de la vitesse $v_{\parallel}$ ne varie ni en grandeur, ni en direction, tandis que $v_{\perp}$ ne varie pas en grandeur, mais se modifie constamment en direction.

Les équations du mouvement de la particule s'obtiennnent de la façon suivante. Posons $B = Bi$, $B_y = B_z = 0$, le champ étant dirigé suivant l'axe x il vient alors

$$v_{\parallel} = v_x i, \quad v_{\perp} = v_y j + v_z k.$$

Les grandeurs v_x et $v_{\perp} = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$ sont des constantes. Elles sont définies par la valeur initiale du vecteur vitesse v_0.

Si la particule de vitesse v_0 se trouvait à l'instant $t = 0$ à l'origine des coordonnées et

$$v_0 = v_x i + v_y j,$$

la coordonnée x variera suivant la loi

$$x = v_x t. \tag{22.10}$$

La projection de la particule sur le plan (y, z) constitue un mouvement suivant un cercle de rayon R (22.8) à la vitesse $v_{\perp} = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$. La vitesse $v_{\perp}$ de la particule pour $t = 0$ est égale à

$$v_{\perp} = v_y j,$$

c'est-à-dire que la composante normale de la vitesse initiale est dirigée suivant l'axe y; les valeurs des projections de la vitesse $v_{\perp}$ sur les axes y et z varieront alors, comme on le voit sur la figure 49, suivant la loi

$$v_y = v_{\perp} \cos \frac{v_{\perp}}{R} t, \quad v_z = v_{\perp} \sin \frac{v_{\perp}}{R} t. \tag{22.11}$$

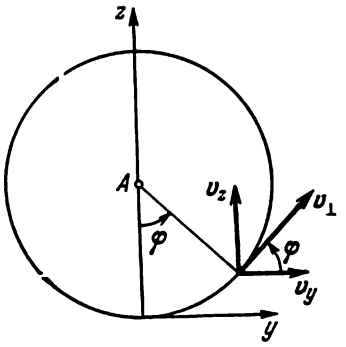


Fig. 49

La grandeur $\varphi = \frac{v_{\perp}}{R} t$ est l'angle dont pivote durant le temps t le rayon vecteur mené du centre A vers la projection de la particule sur le plan (y, z). On peut introduire ici la notion de vitesse angulaire de rotation, c'est-à-dire la vitesse de variation de l'angle φ; par définition, elle est égale à

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_{\perp}}{R}. \tag{22.12}$$

Maintenant on peut écrire également comment varient les coordonnées de la particule y et z en tenant compte de (22.11) et (22.12):

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t v_y \, dt_1 = v_{\perp} \int_0^t \cos \omega t_1 \, dt_1 = R \sin \omega t, \\ z(t) &= \int_0^t v_z \, dt_1 = v_{\perp} \int_0^t \sin \omega t_1 \, dt_1 = R (1 - \cos \omega t). \end{aligned} \tag{22.13}$$

En définitive les égalités (22.10) et (22.13) traduisent le mouvement d'une particule chargée à partir de l'origine des coordonnées à la vitesse initiale $v_0 = v_x i + v_{\perp} j$ dans un champ magnétique uniforme $B = Bi$.

Notons que la grandeur du rayon de rotation R et la vitesse initiale v_0 définissent le rapport e/m de la particule chargée. Le principe de fonctionnement des instruments destinés à déterminer e/m est basé sur cette relation. Le schéma d'un dispositif très simple peut être représenté sous la forme suivante.

Posons que le champ uniforme est dirigé suivant l'axe z et occupe un certain domaine $Oabd$ près de l'origine des coordonnées (fig. 50). Dans ce domaine pénètre, à la vitesse v_0 dirigée parallèlement à l'axe y, au point C une particule chargée. Ayant décrit un demi-cercle de rayon R sous l'action du champ B, la particule sort du domaine du champ au point A. Mesurant la distance $CA = 2R$ et connaissant la grandeur v_0 d'après (22.8), on trouve

$$\frac{e}{m}=\frac{v_0}{BR}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}\right]. \qquad (22.14)$$

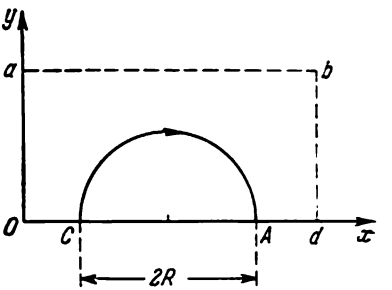


Fig. 50

Mouvement d'une particule chargée dans des champs uniformes électrique et magnétique en chaque point desquels les vecteurs E et B coïncident en direction. Les particules pénétrant dans le champ avec une certaine vitesse v_0, perpendiculaire à E, se devient sous l'action de E dans la direction du vecteur champ, et sous l'action de B, en biais, dans le plan normal au vecteur champ. Déterminons ces déviations en posant que la longueur du secteur du champ le long de la vitesse v_0, égale à l, est très petite devant le rayon de courbure R de la trajectoire de la particule dans le champ magnétique d'induction B, ou $l \ll R = \frac{mv_0}{eB}$.

Supposons que les particules pénètrent dans le domaine du champ à l'origine des coordonnées dans la direction des x négatifs de l'axe, les vecteurs E et B du champ étant dirigés suivant l'axe z. Quelles seront les coordonnées des particules y et z à la distance l de l'origine des coordonnées O dans le plan normal à l'axe x?

A l'aide de (22.3) et (22.4) et tenant compte que $t = l/v_0$, calculons la déviation des particules sous l'action du champ électrique E le long de l'axe z:

$$z=\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{l^2}{v_0^2}. \qquad (22.15)$$

La déviation le long de l'axe y sous l'action du champ magnétique B sera évaluée approximativement ($l \ll R$) (fig. 51):

$$y = R\,(1 - \cos\alpha).$$

Posant l'angle α suffisamment petit, on peut écrire approximativement:

$$R\alpha \approx l, \quad 1-\cos\alpha \approx \frac{\alpha^2}{2}.$$

Donc, en tenant compte de (22.8), il vient

$$y \approx \frac{l^2}{2R} = \frac{eBl^2}{2mv_0}. \tag{22.16}$$

De (22.15) et (22.16) il se dégage que le rapport

$$\frac{y}{z} = \frac{B}{E} v_0 = \operatorname{cotg} \beta \tag{22.17}$$

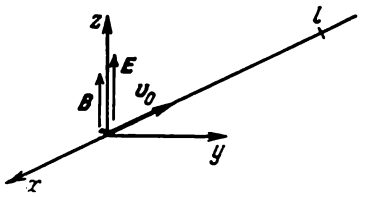
peut être utilisé à la détermination de la vitesse v_0 si E et B sont connus.

Si on élimine des équations (22.15) et (22.16) la vitesse des particules v_0, il vient

$$y^2 = \frac{eB^2l^2}{2mE} z, \tag{22.18}$$

autrement dit, on a l'équation de la parabole.

Les particules aux vitesses v_0 différentes, mais présentant un même rapport e/m décrivent une même parabole (fig. 52). D'un autre côté, les points se trouvant sur la droite $z = y \operatorname{tg} \beta$ correspondent pour toutes les particules à la même vitesse égale à $v_0 = \frac{E}{B} \operatorname{cotg} \beta$, comme cela ressort de (22.17).



Ces principes fondamentaux ont servi de base à la construction

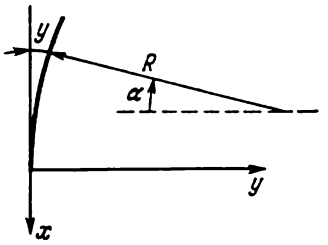


Fig. 51

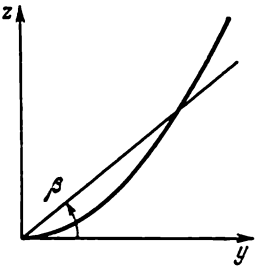


Fig. 52

d'instruments permettant de mesurer le rapport e/m des particules chargées. Les instruments construits sur la base de ces principes ont permis pour la première fois de détecter les isotopes des éléments chimiques. Les dérogations à la loi des paraboles (22.18) observées pour des particules très rapides traduisent les variations relativistes de la masse dues aux changements de la vitesse du mouvement.

§ 23. MOUVEMENTS LIÉS D'UN CORPS

On entend par mouvement *libre* le mouvement d'un corps provoqué par des forces déterminées, quand la trajectoire et la vitesse du corps ne sont assujetties à aucune contrainte. Le mouvement libre commence à partir d'une position connue pour une vitesse initiale donnée.

Dans d'autres problèmes de la mécanique on rencontre des mouvements liés d'un corps, quand la trajectoire du corps est assujettie à des contraintes déterminées [1]. Par exemple, le glissement d'un corps sur un plan incliné, le mouvement d'un wagon sur des rails, le mouvement sur le cercle d'une bille attachée à un fil, le roulement d'une sphère sur un plan horizontal, le mouvement de deux corps liés par un fil, ce sont tous des mouvements liés. Le corps glissant sur un plan incliné se maintient obligatoirement sur ce plan, la sphère reste également sur le plan horizontal, etc.

Le mouvement lié d'un corps doit respecter, indépendamment des forces mises en action, certaines conditions qu'on appelle en mécanique *liaisons*. Les liaisons imposées au mouvement d'un corps quelconque sont le fait des corps « indéformables », le plus souvent, c'est de la surface de ces corps qu'émane la contrainte. Bien que dans le mouvement des corps sur les surfaces d'autres corps les corps qui réalisent la liaison se déforment, cette déformation est si faible qu'on peut la négliger et poser que la trajectoire du mouvement est en quelque sorte donnée et indépendante de la grandeur des forces qui lui sont appliquées.

Dans le mouvement lié, le corps est soumis, outre les forces extérieures (données, connues), à des forces engendrées par les corps réalisant la liaison; ces forces sont appelées *réactions* ou *forces de liaison*.

En présence des liaisons, le problème du mouvement d'un corps se résout différemment de celui du mouvement du corps libre, car les réactions ne sont pas connues au préalable. C'est pourquoi dans les équations du mouvement du corps figurent, outre les forces données, des réactions des liaisons inconnues. Ensuite sur la base des conditions du problème, par exemple, en s'appuyant sur la forme connue de la trajectoire, on forme des équations complémentaires permettant de déterminer les réactions inconnues et l'accélération du corps.

La voie suivie dans la solution de tous les problèmes dynamiques est, en principe, simple : d'après la seconde et la troisième lois de la dynamique, on établit l'équation du mouvement en déterminant au préalable les grandeurs inconnues et en tenant compte des conditions imposées au mouvement par les liaisons. Par cette

[1] Les contraintes peuvent également être imposées à la vitesse du corps.

voie on obtient toujours un nombre suffisant d'équations indépendantes permettant de déterminer les grandeurs inconnues. La meilleure façon de montrer comment procéder est de prendre des exemples. On examinera plus bas une série d'exemples types de mouvement lié en compliquant progressivement les données du problème. Examinons les cas suivants.

1) Mouvement du corps sur un cercle dans un plan horizontal. Une bille attachée à un fil effectue un mouvement suivant le cercle (fig. 53). La force d'action du fil sur la bille (réaction de liaison) F dépend de la grandeur absolue de la vitesse v avec laquelle la bille tourne sur le cercle.

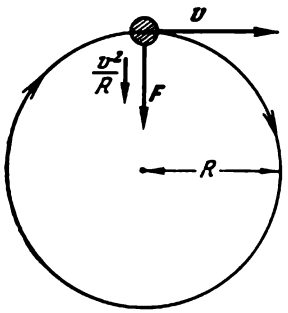


Fig. 53

En observant le mouvement de la bille, on ignore d'habitude la grandeur de la force F, la vitesse v et le rayon R étant seuls connus. Ces données permettent de trouver l'accélération w de la bille. Comme on le sait (§ 9), l'accélération centripète est égale à $\frac{v^2}{R}$. On peut donc affirmer que le fil, s'il ne s'est pas rompu, sollicite la bille avec une force F égale à $\frac{mv^2}{R}$. La force F qui est une réaction de liaison dépend de la forme de la trajectoire du mouvement (R), de la masse du corps mobile (m) et de la vitesse (v). La force de liaison (en l'occurrence la force de tension du fil) imprime à la bille une accélération centripète.

Quelquefois la réaction de liaison est complètement indépendante de la nature du mouvement du corps, mais pour la bonne compréhension de l'action mutuelle des forces engendrées par les corps dans le mouvement il est important de la connaître. Par exemple, lors du glissement du corps sur un plan horizontal sans frottement contre sa surface, la force de liaison (réaction) est toujours dirigée perpendiculairement au plan, normalement aux déplacements possibles du corps et elle n'est donc pas liée ni à l'accélération ni à la vitesse du corps. Mais la force de pesanteur et les composantes normales au plan des autres forces sont équilibrées par la force de liaison (réaction).

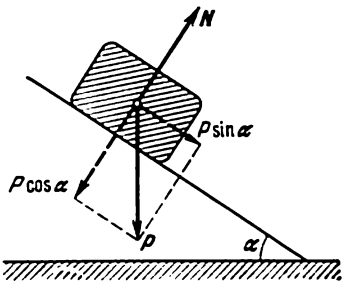


Fig. 54

Il en est de même dans le glissement d'un corps sur un plan incliné sans frottement sur sa surface (fig. 54). S'il n'y a pas de

frottement entre le corps et le plan, les forces d'interaction du corps et du plan sont normales à ce dernier : la réaction est normale à la surface de liaison.

Les liaisons pour lesquelles la réaction est toujours normale au déplacement du corps sont dites des *liaisons parfaites* ou *sans frottement*.

2) Mouvement du corps sur un plan incliné sans frottement. Quelles sont les forces appliquées au corps se trouvant au moment donné sur le plan incliné? La force de pesanteur P et la réaction du plan incliné N. Comme il n'y a pas de frottement (la surface est parfaite) la réaction N est normale au plan. Les deux forces étant appliquées au corps, ce n'est que sous l'action de ces forces qu'il se mettra en mouvement sur le plan incliné. On n'examine que le cas où le corps en mouvement est constamment en contact avec le plan incliné. La somme des composantes de toutes les forces suivant la direction perpendiculaire au plan de glissement doit donc être nulle.

Substituons à la force de pesanteur P deux composantes : la composante normale $P \cos \alpha$ et la composante parallèle $P \sin \alpha$ (voir fig. 54). Comme l'accélération est dirigée parallèlement au plan de glissement

$$N = P \cos \alpha. \tag{23.1}$$

Donc la réaction N n'influe pas sur l'accélération du corps mobile sur le plan, mais assure seulement son mouvement suivant ce plan.

La composante de la force de pesanteur $P \sin \alpha$, parallèle au plan et dirigée vers le bas, déterminera l'accélération du corps. En effet,

$$M \frac{dv}{dt} = P \sin \alpha = Mg \sin \alpha, \quad \frac{dv}{dt} = g \sin \alpha, \tag{23.2}$$

où M est la masse du corps. L'accélération est donc constante dans le temps et l'allure du mouvement sans frottement sur un plan incliné sera à peu près celle des corps en chute libre, mais avec moindre accélération seulement.

Au cas d'une faible accélération, il est possible de procéder à des mesures suffisamment précises du chemin et du temps ; c'est pourquoi pour étudier les lois de la chute des corps on utilise, comme l'a déjà fait Galilée, un plan incliné.

Dans le cas considéré la force de liaison (réaction) (23.1) ne varie pas au cours du mouvement du corps. Elle n'est fonction que de la force de pesanteur appliquée au corps et de la pente du plan.

3) Mouvement du corps sur une trajectoire courbe. Dans des cas plus complexes la grandeur des réactions de liaison dépend fortement du mouvement du corps, comme on l'a vu dans le premier exemple du mouvement de la bille suivant un cercle. Cherchons les réactions de liaison d'une locomotive qui

suit une trajectoire courbe dans un plan horizontal. Soit v la vitesse de la locomotive, constante en valeur absolue, mais cette dernière varie, en général, en direction et donc la locomotive présente une accélération (fig. 55). Ayant déterminé cette accélération w et connaissant la masse de la locomotive M, cherchons la force accélératrice, normale à la trajectoire engendrée par la poussée latérale des rails sur les rebords des roues de la locomotive. Comme la vitesse de la locomotive ne varie pas en grandeur, l'accélération est

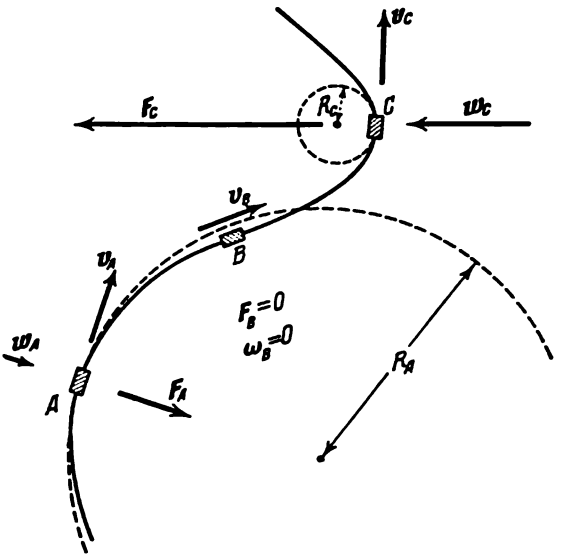


Fig. 55

obligatoirement perpendiculaire à la vitesse et donc aux rails. A chaque moment donné on peut remplacer la portion du chemin parcouru par la locomotive par un très petit arc de cercle de rayon déterminé R et le mouvement de la locomotive par le mouvement sur le cercle de ce rayon (fig. 56, *a*). Dans ce cas l'accélération de la locomotive w (fig. 56, *b*) est dirigée vers l'intérieur du cercle et est égale à

$$\frac{dv}{dt}=v\frac{d\alpha}{dt}=v\frac{dS}{dt}\frac{1}{R}=\frac{v^2}{R}, \tag{23.3}$$

où R est le rayon du cercle, dS l'accroissement du chemin durant le temps dt.

La réaction engendrant la variation de la vitesse de la locomotive prend au point A (voir fig. 55) la valeur

$$F_A=M\frac{v^2}{R_A}, \tag{23.4}$$

où R_A est le rayon de courbure de la voie au point considéré. Au point B $R_B \to \infty$, car en ce point la voie est droite et la locomotive n'est sollicitée par aucune force horizontale de la part des rails, la composante horizontale de la réaction étant nulle. Au point C la poussée latérale des rails F_C est de sens contraire et sa grandeur est fonction du rayon de courbure en ce point.

Notons que les raisonnements énoncés restent également au cas où la vitesse du mobile n'est plus constante en grandeur. Mais alors l'accélération de la locomotive ne sera plus normale aux rails.

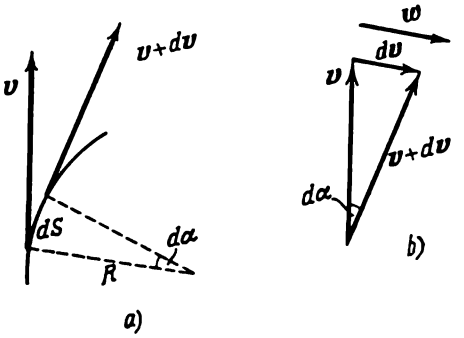


Fig. 56

La liaison de la composante de l'accélération, normale à la ligne des rails, avec la vitesse v au moment donné reste la même (voir formule (23.3)) et par suite la force de la poussée latérale des rails sur les roues sera également définie par la formule (23.4).

Le mouvement de la locomotive à chaque moment considéré est assimilé à un mouvement sur un certain cercle dont les dimensions sont déterminées par la courbure de la voie au point considéré. (En mathématique on appelle courbure de la courbe au point donné la grandeur inverse au rayon du cercle tangent à la courbe au point donné.) C'est pourquoi la force de pression latérale des rails sur les roues de la locomotive, qui engendre l'accélération dirigée vers un certain centre, comme au cas du mouvement suivant un cercle, peut être appelée *force centripète*. La seule différence est qu'en cas de mouvement sur un cercle le centre vers lequel est dirigée la force centripète est fixe et ne varie pas dans le temps. Dans le cas général de mouvement d'un corps sur une courbe donnée, concrétisé par l'exemple du mouvement de la locomotive, le centre vers lequel est dirigée cette force modifie, en général, sa position en chaque point et se trouve sur la droite perpendiculaire à la tangente à la courbe au point donné [1].

[1] Cette ligne est dénommée la *normale* à la courbe au point donné.

Lorsqu'on étudie un mouvement aux liaisons bien définies, on admet que la solidité des corps réalisant la liaison est suffisante. Si le corps jouant le rôle de liaison ne peut imprimer au corps mobile la force nécessaire, la liaison se détruit. Par exemple, si le rail est détraqué, la locomotive, pour une vitesse suffisante, quittera la voie aux points d'incurvation.

Durant l'accélération ou le ralentissement du train il existe d'autres forces qui agissent sur la locomotive de la part des rails, en l'accélérant ou le ralentissant suivant la direction des rails.

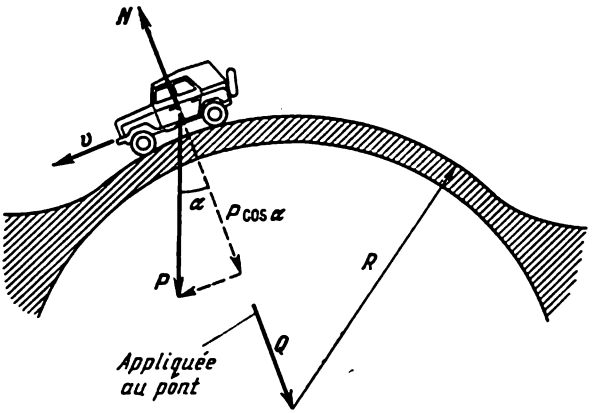


Fig. 57

Ce sont les forces de frottement ou d'adhérence de la roue avec le rail. Ces forces sont également le fait de l'interaction des rails et de la locomotive, mais comme elles « n'obligent pas » la locomotive à rester sur les rails on ne les considère pas comme des réactions de liaison, bien qu'en principe il n'existe pas, du point de vue de la dynamique, de différence entre elles. Les forces d'adhérence des rails et des roues sont fonctions de la pression de vapeur dans les cylindres de la locomotive mais elles ne peuvent dépasser une certaine grandeur. Cette grandeur dépend du poids de la locomotive et du matériau utilisé pour la fabrication des rails et des roues de la locomotive. Si on applique aux roues une force suffisamment grande, les roues patineront. On reviendra en détail sur les forces d'adhérence et de frottement au ch. VIII.

4) Mouvement de l'automobile sur un pont. Examinons encore un exemple, celui d'une automobile traversant un pont courbe (fig. 57); les réactions de liaison dépendent, ici aussi, bien de la vitesse du mouvement que des forces appliquées au corps. On négligera les forces de frottement sur le pont; dans ce cas la force de la pression normale du pont sur l'automobile N avec la

composante de la force de pesanteur suivant la normale au pont au point donné $P \cos \alpha$ communique à l'automobile l'accélération centripète $\frac{v^2}{R}$, où v est la vitesse de l'automobile et R le rayon du pont. Selon la seconde loi de la dynamique

$$\frac{mv^2}{R} = P \cos \alpha - N, \tag{23.5}$$

où m est la masse de l'automobile. Il s'ensuit que la réaction de liaison est égale à

$$N = P \cos \alpha - \frac{mv^2}{R},$$

c'est-à-dire qu'elle dépend des forces appliquées ($P \cos \alpha$), de la vitesse v, de la forme de la trajectoire (R), et de la masse du corps (m).

Notons que toutes les forces examinées sont appliquées à l'automobile, le corps mobile; au pont (à la liaison) n'est appliquée que la force de pression de l'automobile sur le pont Q, qui, d'après la troisième loi de Newton, est égale et opposée à N.

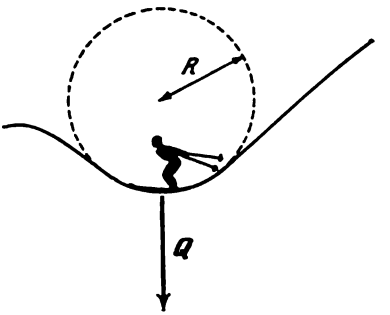


Fig. 58

Une analyse analogue peut être réalisée également pour le cas d'un skieur descendant d'une montagne et se trouvant dans la position indiquée sur la figure 58; la pression du skieur sur le sol Q est alors supérieure à son poids P.

Bref, en analysant les mouvements liés du corps, on introduit, outre les forces connues données (par exemple, les forces de pesanteur dans les exemples examinés), des forces inconnues, des réactions de liaison, et on établit les équations de la dynamique. L'accélération est obtenue à partir d'autres conditions du problème, par exemple, d'après la vitesse et la forme da la trajectoire du corps. Connaissant l'accélération, la masse du corps et les forces qui lui sont appliquées, on peut déterminer au besoin les réactions de liaison.

Dans les exemples cités plus haut les liaisons déterminent la trajectoire du mouvement du corps. Mais les liaisons et les contraintes imposées au mouvement d'un corps peuvent être du type tout à fait différent, par exemple, les liaisons se créant dans les cas quand tous les corps ou plusieurs corps sont liés par des liens non extensibles ou par des tiges indéformables. Dans ce cas aussi on peut considérer les forces de tension des liens entre les corps comme des réactions de liaison. S'il est connu d'avance que tous les corps liés

possèdent une même accélération, on peut alors considérer tout le système comme un seul corps et ne tenir compte que des forces extérieures appliquées au système. Mais au cas où il s'avère nécessaire de connaître la grandeur de la tension des liens (grandeur des réactions) il faut établir les équations comprenant ces forces.

Examinons encore deux exemples de mouvement avec liaison: l'un simple, l'autre plus compliqué.

5) Mouvement de véhicules liés. Deux véhicules réunis par un fil roulent sur des rails sous l'action de la force de pesanteur d'une charge P (fig. 59). Les masses des véhicules sont M_1 et M_2, la masse du fil et celle de la poulie A pouvant être négligées.

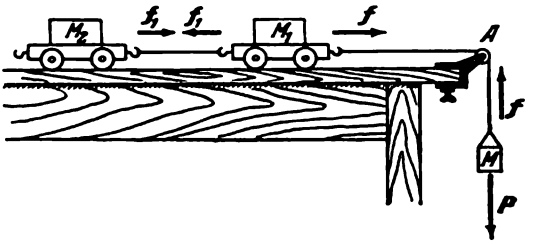


Fig. 59

Les rails sont horizontaux. Les forces de pesanteur des véhicules et les forces agissant sur les véhicules de la part des rails (si on néglige les forces de frottement) seront donc perpendiculaires à la direction du mouvement possible des véhicules, et on peut passer outre en déterminant l'accélération des véhicules. Les réactions des rails n'influent pas sur l'accélération du système. Les fils étant supposés inextensibles, la vitesse et l'accélération des trois corps (deux véhicules et la charge) seront donc les mêmes en grandeur, c'est la condition imposée par la liaison au mouvement des véhicules.

Désignons la grandeur de la force de tension du fil entre la charge et le premier véhicule par f et la force de tension du fil liant les véhicules par f_1, la force de pesanteur de la charge étant notée par P. Rappelons que le fil est supposé dénué de masse et ne peut que tirer. Ecrivons les équations de la dynamique pour chaque corps séparément.

Pour la charge:

$$M\frac{dv}{dt}=P-f, \tag{23.6}$$

pour le premier véhicule:

$$M_1\frac{dv}{dt}=f-f_1, \tag{23.7}$$

pour le second véhicule :

$$M_2 \frac{dv}{dt} = f_1. \tag{23.8}$$

On a formé les équations du mouvement pour chaque corps séparément. Mais puisque les fils sont inextensibles, on pourrait considérer tous les trois corps comme formant un seul système ; les forces de tension des fils seraient alors des forces intérieures et ne joueraient aucun rôle dans la détermination de l'accélération de tout le système, mais la masse de tout le système mobile serait égale à $M_1 + M_2 + M$, et la force extérieure appliquée au système ne serait que la force de pesanteur P. En effet, additionnant les équations (23.6), (23.7) et (23.8), il vient

$$(M_1 + M_2 + M) \frac{dv}{dt} = P. \tag{23.9}$$

Comme $P = Mg$, où g est l'accélération due à la force de pesanteur, l'accélération des véhicules et de la charge sera :

$$\frac{dv}{dt} = g \frac{M}{M + M_1 + M_2}. \tag{23.10}$$

Notons que l'accélération du système de corps sera constante, tandis que la vitesse dépend encore du temps et des conditions initiales, ou plus précisément, du temps et de la vitesse acquise par le véhicule au moment initial[1].

Si, par contre, il est nécessaire de déterminer les forces de tension des fils (ce qui est souvent important de savoir), il faut porter dans les équations (23.6), (23.7) et (23.8) la grandeur de l'accélération tirée de l'équation (23.10). Il est évident que la tension du fil maintenant la charge sera toujours plus grande que la tension du second fil.

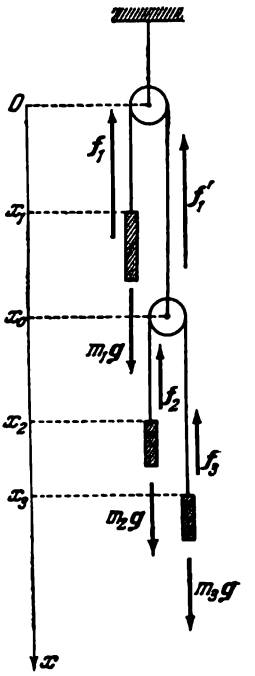


Fig. 60

6) Mouvement de trois charges suspendues à des poulies. Déterminer l'accélération des charges et la tension des fils inextensibles dans le système montré à la figure 60, les poulies et les fils étant supposés impondérables et les frottements négligeables.

Désignons les tensions des fils par f_1, f_2 et f_3 et les coordonnées des charges par x_1, x_2 et x_3, comme c'est indiqué sur la figure 60. Considérant la direction vers le bas comme positive, écrivons les

[1] On appelle moment initial l'instant après lequel le système n'est sollicité que par la force P.

équations de la dynamique pour les trois charges:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1 g - f_1, \quad m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = m_2 g - f_2, \quad m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} = m_3 g - f_3, \tag{23.11}$$

où m_1, m_2, m_3 sont les masses des charges, g, l'accélération de la force de pesanteur. Puisque les poulies n'ont pas de masse, les forces de tension des fils doivent satisfaire aux égalités suivantes:

$$f_2 = f_3, \quad f_1 = f_1' = f_2 + f_3. \tag{23.12}$$

Introduisons maintenant les conditions imposées par les liaisons aux mouvements des trois charges. Comme les fils sont inextensibles, on a

$$x_1 + x_0 + \pi r = l_1, \quad x_2 - x_0 + x_3 - x_0 + \pi r = l_2, \tag{23.13}$$

où l_1 et l_2 sont les longueurs des fils, x_0 la coordonnée de l'axe de la poulie mobile, r le rayon des poulies. Eliminant des équations (23.13) la grandeur x_0, on obtient la condition imposée par la liaison aux coordonnées de tous les corps:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2l_1 + l_2 - 3\pi r. \tag{23.14}$$

Cette condition lie les vitesses et les accélérations de tous les corps. Si l'on dérive l'identité (23.14) deux fois, on obtient la relation entre les accélérations des charges, définie par liaison:

$$2\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{d^2x_3}{dt^2} = 0. \tag{23.15}$$

Maintenant six équations (23.11), (23.12) et (23.15) contiennent six inconnues: trois accélérations et trois forces de réaction (tension des fils). En résolvant ces équations, on trouve les accélérations des charges. Soustrayant de la première équation (23.11) les deux suivantes et tenant compte de l'égalité (23.12), on obtient

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} - m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} - m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} = (m_1 - m_2 - m_3)\, g. \tag{23.16}$$

Soustrayant de la seconde équation (23.11) la troisième, il vient

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} - m_3 \frac{d^2x_2}{dt^2} = (m_2 - m_3)\, g. \tag{23.17}$$

Résolvant les trois équations (23.15), (23.16) et (23.17) aux trois inconnues, on obtient en définitive

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = \frac{(m_1m_3 - 3m_1m_2 + 4m_2m_3)\, g}{4m_2m_3 + m_1m_2 + m_1m_3}. \tag{23.18}$$

Portant ce résultat dans l'équation (23.17), on trouve $\frac{d^2x_2}{dt^2}$, puis on trouve $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ à partir de l'équation (23.15). S'il s'avère né-

cessaire de connaître la tension des fils, il faut porter les accélérations obtenues dans l'équation du mouvement (23.11).

Sans former les équations dynamiques (23.11) pour chacune des charges, il est difficile de résoudre un tel problème, car il n'est pas facile de saisir aussitôt la condition (23.15) entre les accélérations imposée par les liaisons. Les erreurs souvent commises dans la solution de ce problème proviennent de la fausse interprétation des signes (des forces et des accélérations), on attire donc l'attention du lecteur sur le fait que toutes les grandeurs (forces et accélérations) dirigées vers le bas sont considérées comme positives. Quant à la direction effective de l'accélération, elle ne sera connue qu'après la solution de l'équation (23.18).

CHAPITRE III

QUANTITÉ DE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE CORPS

§ 24. PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

L'application de la seconde et de la troisième lois de la dynamique à un système composé de plusieurs corps en interaction aboutit à des conclusions très importantes dont le *principe de conservation* (ou de constance) *de la quantité de mouvement* est le corollaire.

Examinons d'abord, pour simplifier les raisonnements, rien que deux corps en interaction, par exemple, deux billes sur une surface horizontale en verre entre lesquelles se trouve un ressort serré (fig. 61).

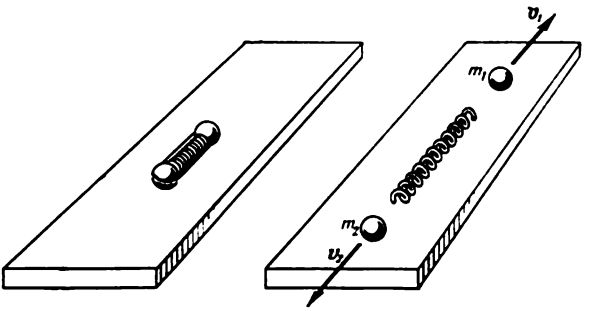


Fig. 61

On suppose négligeable la force de frottement des billes contre le verre. Les billes sont liées par un fil de sorte que le ressort demeure comprimé entre ces dernières. Les masses des billes sont m_1 et m_2, quant à la masse du ressort elle est si petite qu'on peut la supposer égale à zéro (on pouvait se dispenser de le faire, mais alors il aurait fallu tenir compte de l'interaction de trois corps). Si à un certain moment on brûle le fil, le ressort agira sur la bille m_1 avec la force $\boldsymbol{F}_{12}$ et sur la bille m_2 avec la force $\boldsymbol{F}_{21}$, égale et opposée. La masse du ressort étant négligeable, on peut dire que la première bille agit sur la seconde par l'intermédiaire du ressort et que

$$\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{F}_{21}=0. \tag{24.1}$$

En effet, d'après la troisième loi de la dynamique les forces suivantes sont égales et opposées :

$$\boldsymbol{F}_{1n}+\boldsymbol{f}_{n1}=0, \quad \boldsymbol{F}_{2n}+\boldsymbol{f}_{n2}=0,$$

où f_{n1} et f_{n2} sont les forces d'action des billes sur le ressort et F_{1n} et F_{2n}, les forces d'action du ressort sur les billes. La masse du ressort étant considérée comme nulle, d'après la seconde loi de la dynamique on aura

$$f_{n1}+f_{n2}=0.$$

Donc

$$F_{1n}+F_{2n}=0,$$

et il est évident que

$$F_{1n}=F_{12}, \quad F_{2n}=F_{21}.$$

Il en découle l'égalité (24.1). Sur la masse m_1 agit la force F_{12}, sur la masse m_2, la force F_{21}. Sous l'action de ces forces les billes acquièrent les accélérations a_1 et a_2 qu'on obtient des équations suivantes:

$$m_1a_1=F_{12}, \quad m_2a_2=F_{21}. \tag{24.2}$$

Additionnant ces égalités et tenant compte de (24.1), il vient

$$m_1a_1+m_2a_2=0. \tag{24.3}$$

Rappelons que m_1v_1 est la quantité de mouvement de la première bille et m_2v_2 de la seconde, quant aux accélérations elles sont

$$a_1=\frac{dv_1}{dt}, \quad a_2=\frac{dv_2}{dt}; \tag{24.3}$$

portant ces expressions dans l'équation (24.3), il vient

$$\frac{d}{dt}(m_1v_1+m_2v_2)=0. \tag{24.5}$$

Soulignons avant tout: l'équation déduite (24.5) est indépendante de la grandeur et de la nature des forces d'interaction des billes; l'essentiel est que ces forces remplissent toujours la condition (24.1). L'égalité (24.5) signifie que la somme des quantités de mouvement des billes reste *constante* durant l'action de répulsion du ressort comme après cette action, tant que les billes ne soient sollicitées par des forces extérieures.

Cette conclusion est vraie pour n'importe quels deux autres corps, car l'exemple des billes n'a été pris que pour mieux faire image.

Donc, *la quantité de mouvement d'un système composé de deux corps ne peut se modifier sous l'effet des forces d'interaction de ces corps.*

Imaginons un certain nombre de corps isolés des autres corps et formant un système mécanique unique; dans ce cas les forces d'interaction de ces corps sont des forces *intérieures* [1] par rapport au

[1] Les forces intérieures sont les forces d'action entre les corps formant le système isolé.

système considéré. Si le système isolé est composé d'un grand nombre de corps, le principe de conservation de la quantité de mouvement s'applique au système en bloc. En effet, soit un système composé de trois corps de masses m_1, m_2, m_3 (fig. 62). On peut alors écrire pour le premier corps l'équation

$$m_1 a_1 = f_{12} + f_{13},$$

pour le second

$$m_2 a_2 = f_{21} + f_{23},$$

pour le troisième

$$m_3 a_3 = f_{31} + f_{32}.$$

Additionnant les trois équations et tenant compte de la troisième loi de la dynamique, il vient

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 = 0,$$

ou

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3) = 0, \tag{24.6}$$

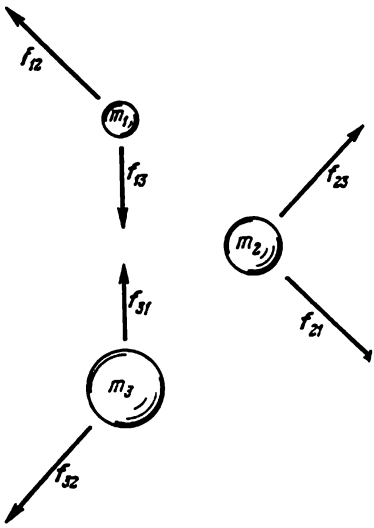


Fig. 62

où, comme toujours, a_1, a_2, a_3 sont les accélérations de chacun des corps et v_1, v_2, v_3, les vitesses correspondantes.

Désignons la somme des quantités de mouvement de tous les corps par K, alors le principe de conservation de la quantité de mouvement (24.6) s'écrira ainsi :

$$\frac{dK}{dt} = 0, \tag{24.8}$$

ou

$$K = \text{const}. \tag{24.7}$$

La quantité de mouvement d'un système de corps ne peut se modifier sous l'effet de forces intérieures.

Le principe de constance de la quantité de mouvement peut être dégagé facilement pour tout nombre de corps formant un système isolé. La quantité de mouvement du système K est une somme vectorielle des quantités de mouvement de tous les corps composant le système :

$$K = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i. \tag{24.8}$$

En vertu de la troisième loi de la dynamique toutes les forces *intérieures* remplissent la condition

$$f_{ki} + f_{ik} = 0 \tag{24.9}$$

pour toute valeur des indices k et i, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, et $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, où n est le nombre de corps entrant dans le système.

Si les corps ne sont pas soumis à des forces extérieures, on peut, pour chaque corps, écrire :

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}, \tag{24.10}$$

où m_i est la masse d'un certain corps d'ordre i, v_i, sa vitesse et $\sum_{k=1}^{n} f_{ik}$, la force à laquelle il est soumis de la part des autres corps. Additionnons maintenant les équations (24.10) pour tous les corps et il vient

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f_{ik}. \tag{24.41}$$

D'après la condition (24.9) la somme de toutes les forces intérieures est nulle, donc

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dv_i}{dt} = 0,$$

ou

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i = 0. \tag{24.12}$$

C'est justement l'expression du principe de la constance de la quantité de mouvement d'un système de corps mobiles en l'absence de forces extérieures. Elle peut être écrite également sous la forme de la formule (24.7).

Concluons ce qui a été exposé. Le principe de conservation de la quantité de mouvement s'applique au cas d'interaction de plusieurs corps : la quantité de mouvement de ce système reste *constante* si les forces *extérieures*, ou forces engendrées par des corps ne figurant pas dans le système, sont absentes.

La quantité de mouvement, ou impulsion, est une *grandeur vectorielle* et, par suite, sont constantes aussi bien sa valeur absolue que sa direction. La quantité de mouvement de chacun des corps du système peut varier, mais la quantité totale du système reste constante.

La quantité de mouvement de tout corps ne peut se modifier sans que la quantité de mouvement des autres corps du système ne change de la même grandeur. *La quantité de mouvement se transmet d'un corps à l'autre en ne disparaissant jamais, ou : la quantité de mouvement de tout système isolé de corps est une grandeur vectorielle qui reste tout le temps invariable.*

La notion de quantité de mouvement a été introduite par Descartes qui a également formulé le principe philosophique de la conservation, ou de l'invariance, de la quantité de mouvement des corps

de l'Univers. La discussion qui a suivi a partagé les savants sur la question de la grandeur à attribuer à la quantité de mouvement: mv ou mv^2? C'est seulement quand fut énoncé le principe de conservation de l'énergie (voir § 37) que cette discussion fut close. La question fut définitivement tranchée avec une suprême netteté par F. Engels dans son article bien connu « La mesure du mouvement. Le travail » [1].

§ 25. TRANSMISSION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT D'UN CORPS À L'AUTRE

Dans l'interaction de forces de deux corps il se produit toujours la transmission d'une quantité de mouvement d'un corps à l'autre. La nature de modifications des forces au cours de cette interaction

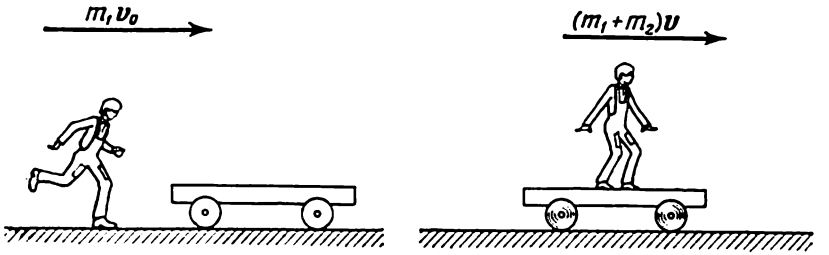


Fig. 63

peut être fort complexe et l'analyse du phénomène constitue un problème délicat. Or l'utilisation du principe de conservation de la quantité de mouvement permet facilement d'aboutir au résultat de l'interaction sans étude détaillée des forces mises en jeu. Le mieux est de montrer sur des exemples comment on procède dans ce cas.

1) L'homme saute en courant sur un véhicule. En sautant sur une plate-forme posée sur des rails (fig. 63), l'homme possède la vitesse v_0 et une quantité de mouvement $K = m_1 v_0$, où m_1 est la masse de l'homme. Le véhicule étant immobile, sa quantité de mouvement est nulle. En sautant sur le véhicule, l'homme s'y arrête, et entre le véhicule et les pieds de l'homme des forces sont engendrées; la force qui agit sur l'homme l'a freiné, tandis que la force (réaction) appliquée au véhicule lui a communiqué un mouvement. L'action de ces forces cessera aussitôt que l'homme et le véhicule auront acquis la même vitesse, c'est-à-dire quand l'homme s'immobilisera sur le véhicule. Si les forces de frottement du véhicule contre les rails sont faibles et le frottement de l'air est négligeable, la quantité de mouvement du système (véhicule

[1] F. Engels. Dialectique de la Nature. Paris, 1952, p. 91.

plus l'homme) ne variera pas du fait de cette interaction mutuelle. La quantité de mouvement de l'homme $m_1 v_0$ *se redistribuera*: le véhicule recevra une partie de la quantité de mouvement que possédait l'homme en sautant sur lui. La vitesse acquise par l'homme et le véhicule peut être déterminée sur la base du principe de conservation de la quantité de mouvement. Elle sera égale à

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0. \tag{25.1}$$

La réponse ne dépend pas de la durée de l'action réciproque des forces des pieds de l'homme et du véhicule ainsi que de la nature de

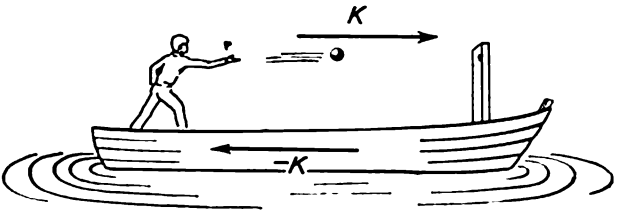


Fig. 64

leur variation dans le temps. Entre l'homme et le véhicule il y a eu un choc parfaitement mou.

On appelle choc parfaitement mou l'interaction de deux corps aux vitesses différentes après lequel ils acquièrent une même vitesse.

Le mécanisme du choc, le mode d'action des forces dans le temps, ainsi que leur intensité, tout cela n'est d'aucune utilité pour la détermination de la vitesse après le choc.

Quelquefois des objections sont soulevées par ceux qui, pour la première fois, sont confrontés avec l'assertion que la quantité de mouvement se transmet toujours d'un corps à un autre. Le plus souvent ces objections prennent la forme d'exemples qui, soi-disant, réfutent ce principe. Examinons un de ces exemples.

2) Un garçon lance une boule de neige contre le mur. Admettons que la boule de neige jetée par le garçon une fois le mur atteint s'y accole ou retombe sur le sol près de lui. Le garçon a communiqué à la boule de neige une quantité de mouvement $K = mv$, qui après avoir frappé le mur, a « perdu » sa quantité de mouvement. Qu'en est-il « devenu » et à qui s'est transmise la quantité de mouvement de la boule de neige?

Pour se représenter de façon nette le processus de transmission de la quantité de mouvement, supposons que le garçon et le mur sont placés sur un bateau et que le garçon lance un morceau de terre glaise contre le mur, tout étant initialement au repos (fig. 64).

Le bateau joue ici le rôle de la Terre dans l'exemple précédent. Après la lancée, la quantité de mouvement du morceau de glaise reçue à la suite de l'interaction avec le garçon, debout dans le bateau, est prise au système « garçon — bateau » et, par suite, tout ce système, au cours du vol de la glaise, possédera une quantité de mouvement opposée et égale en grandeur à $K = mv$. La quantité de mouvement du système « bateau, garçon et morceau de glaise » est constante et égale à zéro.

Dans un choc mou contre le mur, il y a interaction de la glaise avec le bateau par l'intermédiaire du mur, mais cette fois ils possèdent tous les deux des quantités de mouvement égales et opposées qui, une fois additionnées, donnent une quantité de mouvement nulle. Donc au cours du vol de la glaise le bateau était en mouvement sous la secousse due au garçon lançant le morceau de glaise, puis s'arrêtait après l'impact de la glaise contre le mur. D'après les lois de la dynamique les quantités de mouvement engendrées par l'impact et la secousse sont égales et opposées. Il ne se produit donc dans ce cas aucune « destruction » ou « création » de la quantité de mouvement.

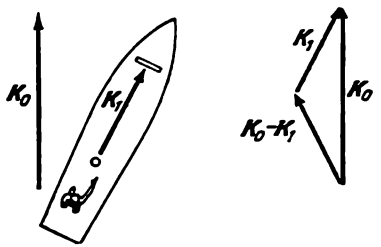


Fig. 65

Notons en outre que notre raisonnement ne se modifiera pas si le bateau était en mouvement avant la lancée du morceau de glaise: tout le système possédait une quantité de mouvement non nulle; après la lancée, la quantité de mouvement du système « garçon — bateau » s'est modifiée de la quantité de mouvement de la glaise et, après son impact contre le mur, la même quantité de mouvement s'est rétablie, les directions du mouvement du bateau et du vol de la glaise pouvant être quelconques. Soit K_0 la quantité de mouvement de tout le système avant la lancée; représentons-la par un certain vecteur sur le dessin (fig. 65); si la quantité de mouvement du morceau de glaise est K_1, il reste au bateau une quantité de mouvement $K_0 - K_1$, après l'impact de la glaise contre le mur tout le système possédant de nouveau la quantité de mouvement K_0.

Il est évident que le système « garçon — bateau » perdra une quantité de mouvement si la glaise, au lieu de heurter le mur, tombe dans l'eau. Il restera au système une quantité de mouvement $K_0 - K_1$, la quantité K_1 étant transmise à l'eau. Mais si l'on inclut dans le système la Terre, on constatera de nouveau que la quantité de mouvement se conserve.

On peut de la même façon interpréter les phénomènes dans le cas où la boule de neige, lancée par le garçon, frappe le mur et transmet

au mur (à la Terre) la quantité de mouvement « apparue » du fait de l'interaction du garçon avec la Terre.

Pour simplifier les raisonnements, on a supposé que le choc contre le mur était parfaitement mou, c'est-à-dire que la boule de neige ne rebondissait pas sur le mur après l'impact, mais s'y accolait ou tombait à côté. Le même phénomène a lieu dans le cas du choc élastique, quand la boule rebondit sur le mur. Il est vrai qu'après le choc le bateau sera projeté vers l'avant, mais la quantité de mouvement du système « bateau, garçon et morceau de glaise » restera inchangée; en effet, aussitôt que la glaise retombe dans le bateau et s'immobilise, tout le système revient au repos. En outre, dans les raisonnements précédents on a supposé absent le frottement du bateau contre l'eau (ou les forces de résistance au mouvement).

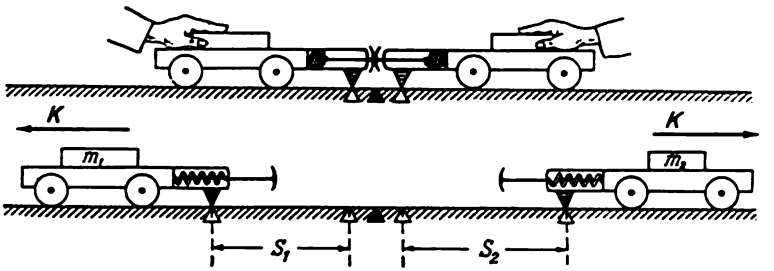


Fig. 66

Mais si l'on avait également tenu compte de ces forces d'interaction en comprenant dans le système de corps l'eau, on aurait démontré de même que la quantité de mouvement est constante.

3) Mesure de la masse. Les expériences avec les billes repoussées par un ressort suggèrent une possibilité de comparaison (ou de mesure) par cette voie de la masse de deux corps. En effet, observons le mouvement imprimé à deux corps sous l'action réciproque de ces deux corps; déterminons par expérience les vitesses acquises par les corps du fait de l'interaction, et, en s'appuyant sur le principe de conservation de la quantité de mouvement, cherchons le rapport des masses de ces deux corps à partir du rapport des vitesses. Par exemple, si l'une des billes repoussées par le ressort a une masse unité, le rapport inverse des valeurs absolues des vitesses des billes donnera la masse de la seconde bille dans ces unités.

Dans la pratique il est peut être plus commode d'effectuer ces expériences avec des véhicules posés sur des rails et repoussés par des tampons (fig. 66). Après avoir serré les véhicules l'un contre l'autre, on les lâche et on mesure les distances S_1 et S_2 parcourues par les véhicules en des laps de temps égaux. Les distances S_1 et S_2 sont proportionnelles aux vitesses des véhicules et sont donc en

raison inverse des masses de ces véhicules m_1 et m_2:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{S_2}{S_1}. \tag{25.2}$$

4) Choc parfaitement mou de deux boules. Soient deux boules de masses m_1 et m_2 qui, dans la lancée à des vitesses v_1 et v_2, se heurtent à un certain moment, « s'agglutinent » et poursuivent leur mouvement comme un seul corps (fig. 67). On est ici en présence d'un choc parfaitement mou. Il n'est pas difficile de déterminer le mouvement des boules après la collision si l'on connaît la quantité de mouvement des deux boules avant le choc. Soit

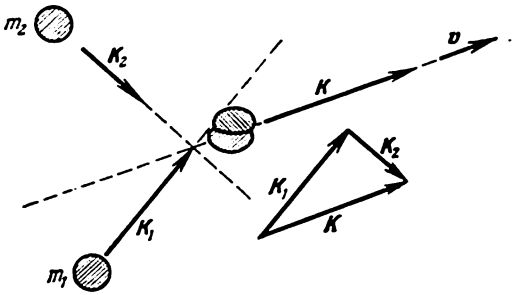


Fig. 67

$K_1 = m_1v_1$ la quantité de mouvement de la première boule et $K_2 = m_2v_2$, celle de la seconde, après l'impact la quantité de mouvement étant donc $K_1 + K_2 = K$. La direction prise par les boules se modifiera, mais la quantité de mouvement du système ne variera pas. La vitesse des boules v après le choc parfaitement mou sera égale à

$$v=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}. \tag{25.3}$$

Un projectile en vol éclate en deux parties; dans ce cas également la quantité de mouvement ne se modifiera pas au cours de l'explosion: la somme vectorielle des quantités de mouvement des éclats sera égale à la quantité de mouvement du projectile si l'on néglige dans l'exploison les forces de résistance de l'air. Il en est de même quand le projectile éclate en un nombre plus grand de morceaux.

On peut citer de nombreux exemples analogues tirés de la vie quotidienne ou empruntés au domaine technique. On conseille au lecteur d'en rechercher quelques-uns. Notons qu'en résolvant des problèmes de mécanique il faut toujours vérifier s'ils ne se prêtent pas à une solution en faisant appel au principe de conservation de la

quantité de mouvement. Dans ce cas il n'est pas besoin de rechercher le mode d'action des forces entre les corps dans le temps, de même que de savoir comment elles sont appliquées, la solution du problème se simplifiant grandement en faisant appel au principe de conservation de la quantité de mouvement.

En qualité d'exercice on propose de déterminer d'après la figure 68 le rapport des quantités de mouvement et le rapport des masses de deux points matériels en choc mou, si sur le dessin sont données à une échelle déterminée les positions des masses m_1 et m_2 pour un certain moment avant le choc ainsi que les directions du mouvement.

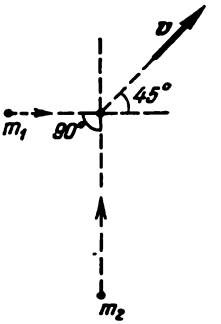


Fig. 68

§ 26. IMPULSION D'UNE FORCE

La seconde loi de Newton (§ 19) peut s'écrire ainsi

$$d(mv) = F\,dt \tag{26.1}$$

et elle s'énonce de la sorte: *l'accroissement de la quantité de mouvement durant le temps dt est égal à l'impulsion de la force F durant le même temps dt.* La grandeur physique vectorielle $F\,dt$ est appelée impulsion de la force durant le temps dt. L'impulsion de la force $F\,dt$ est une grandeur infiniment petite caractérisant l'action de la force durant le laps de temps dt.

Si on examine l'action d'une force variable non pas durant le temps dt, mais durant le laps de temps $t_2 - t_1$, il faut diviser ce temps en des intervalles dt infiniment petits, déterminer les impulsions $F\,dt$ pour chaque intervalle dt et les additionner ensemble. Cette somme est appelée intégrale et est désignée, comme on le sait, ainsi:

$$\int_{t_1}^{t_2} F\,dt = P. \tag{26.2}$$

La grandeur vectorielle P est l'impulsion de la force F pour le temps $t_2 - t_1$. Si la force est constante en grandeur et en direction

$$P = F(t_2 - t_1), \tag{26.3}$$

c'est-à-dire que l'impulsion de la force est égale au produit de la force constante par le temps durant lequel elle est appliquée.

On peut intégrer les deux membres de l'égalité (26.1):

$$\int_{t_1}^{t_2} d(mv) = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt = P. \tag{26.4}$$

Si la vitesse du corps à l'instant t_1 était v_1 et à l'instant t_2 est devenue v_2, l'expression (26.4) peut être écrite ainsi :

$$mv_2 - mv_1 = P. \tag{26.5}$$

En effet, $d(mv)$ est un accroissement infiniment petit de la quantité de mouvement durant le temps dt ; si l'on rassemble tous ces accroissements durant le temps $t_2 - t_1$ puis on les additionne, on obtiendra évidemment l'accroissement durant le temps $t_2 - t_1$ égal à $mv_2 - mv_1$.

Ainsi donc *l'accroissement de la quantité de mouvement durant un certain temps est égal à l'impulsion de la force appliquée au cours du même temps.*

Par exemple, une pierre pesant 1 N tombe sur le sol. L'impulsion de la force appliquée à la pierre durant 5 s est $P = 5$ N·s, la quantité de mouvement de la pierre s'accroissant durant ces 5 s de la même grandeur dans la direction du sol. Donc durant 5 s il s'est produit un accroissement de la vitesse de la pierre qui, suivant la formule (26.5), est égal à

$$v_2 - v_1 = \frac{P}{m} = e\,\frac{5\,\mathrm{N\cdot s}}{\frac{1}{9{,}81}\,\mathrm{kg}} \approx e\cdot 50\ \mathrm{m/s},$$

où e est le vecteur unitaire dirigé vers le bas suivant la verticale. La réponse obtenue est absolument indépendante de la trajectoire de la pierre qui peut décrire une verticale ou une parabole ; ce qui importe c'est que durant ces 5 s elle n'était sollicitée que par la force de pesanteur.

Dans cet exemple il faut se rappeler que la masse du corps pesant 1 N est égale à $\frac{1}{9{,}81}$ kg.

Quoique l'accroissement de la quantité de mouvement soit exactement égal à l'impulsion de la force appliquée (il s'agit de l'accroissement engendré par cette seule force), il faut toutefois distinguer l'accroissement de la quantité de mouvement et l'impulsion de la force en ayant en vue les cas quand le corps est aussi soumis à d'autres forces. Par exemple, un ouvrier imprime un mouvement au wagonnet en restant sur place. L'accroissement de la quantité de mouvement du wagonnet est égal à l'impulsion de la force P de l'ouvrier si l'on néglige la force de frottement. De son côté, le wagonnet a communiqué à l'ouvrier l'impulsion $-P$, mais l'ouvrier n'a pas subi d'accroissement de la quantité de mouvement, car il est resté sur place.

Il y a impulsion, mais pas d'accroissement et cela rien que du fait que sur l'ouvrier agissent d'autres forces : les forces qui lui sont appliquées de la part de la Terre lui ayant communiqué durant ce laps de temps une impulsion de sens contraire. Si l'ouvrier n'était pas soumis aux forces agissant du côté de la Terre, il aurait reçu la même quantité de mouvement. Aussi dit-on quelquefois que l'impulsion est l'accroissement *possible* de la quantité de mouvement

du corps, si celui-ci n'était soumis qu'à l'action de cette seule impulsion.

Mais on ne parlera toujours que de la quantité de mouvement *réelle* du corps et non de la quantité de mouvement possible et de l'impulsion *réelle* de la force appliquée au corps. Il y a donc une différence essentielle entre ces grandeurs se traduisant dans le fait que l'existence d'une impulsion déterminée de la force appliquée au corps ne signifie aucunement qu'il s'est produit un accroissement de la quantité de mouvement d'une même grandeur.

C'est seulement quand on détermine l'*impulsion de la résultante* de toutes les forces appliquées au corps au cours d'un certain temps qu'on peut considérer que l'accroissement de la quantité de mouvement est égal (en grandeur et en direction) à l'impulsion de la résultante de toutes les forces durant le temps considéré. On peut donc dire que l'accroissement de la quantité de mouvement et l'impulsion de la résultante de toutes les forces sont des grandeurs identiques.

Au paragraphe suivant, on appliquera le principe de conservation de la quantité de mouvement à l'analyse du mouvement du corps à masse variable.

§ 27. LOIS DU MOUVEMENT DES CORPS À MASSE VARIABLE

Il y a des phénomènes au cours desquels les corps mobiles modifient leur masse. Le corps perd dans le mouvement une certaine fraction de sa masse. Il s'en sépare des particules de matière composant le corps ou, au contraire, de nouvelles particules s'y ajoutent. Par exemple, le mouvement de l'arroseuse arrosant avec de l'eau la rue, le mouvement du train se délestant le long de la voie du ballast de sable, le chargement et le déchargement d'une plate-forme en marche, le mouvement de la fusée rejetant un jet de gaz après la combustion du propergol ou de la poudre, etc. On examinera maintenant les mécanismes régissant ces phénomènes.

Dans tous ces cas on voit varier au cours du mouvement non seulement la vitesse, mais également la masse du corps mobile. Les lois générales de ces mouvements ont été étudiées par I. V. Mechtcherski et C. E. Tsiolkovski; ce dernier les appliqua à la mise au point d'un projet technique de vaisseau spatial à réaction.

Etudions le mouvement de l'arroseuse se délestant de l'eau en arrosant la rue (fig. 69). Supposons que le jet d'eau ait une vitesse constante c par rapport au véhicule arroseur, coïncidant en direction avec la vitesse du véhicule v par rapport à la route. La force appliquée au véhicule du fait de la cohésion des roues avec la route, une fois le moteur mis en marche, est F et elle est dirigée vers l'avant. La force F est une force extérieure, car elle émane de la Terre. La

dépense d'eau est constante dans le temps si la vitesse d'écoulement c et la section de la tuyère rejetant l'eau sont invariables.

Désignons par μ la masse d'eau éjectée par seconde, alors M, masse de l'arroseuse et de l'eau, décroîtra uniformément dans le temps, la vitesse de la variation de la masse étant

$$-\frac{dM}{dt} = \mu, \tag{27.1}$$

on peut écrire la loi de conservation de la masse ainsi :

$$dM + \mu\, dt = 0, \tag{27.2}$$

où dM est la perte de masse de l'arroseuse remplie d'eau durant dt et $\mu\, dt$, la masse de l'eau s'écoulant durant dt. Dans l'équation (27.1)

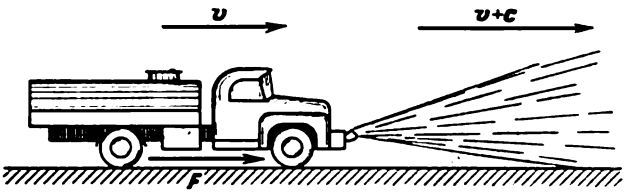


Fig. 69

le signe moins souligne que la masse M diminue ; le débit μ est par convention une grandeur positive.

Appliquons au système de corps (l'arroseuse et l'eau rejetée) le principe de conservation de la quantité de mouvement qui stipule l'égalité de la variation de la quantité de mouvement à l'impulsion des forces extérieures [1].

Supposons qu'à l'instant t l'arroseuse possède la masse M et une vitesse v, la quantité de mouvement à ce moment étant Mv. Au bout d'un certain laps de temps dt, à l'instant $t + dt$, la masse de l'arroseuse sera $M - \mu\, dt$ et la vitesse de son mouvement $v + dv$; la masse de l'eau éjectée durant dt sera $\mu\, dt$ et la vitesse de son mouvement relativement à la Terre $v + c$. La quantité de mouvement à l'instant $t + dt$ est alors

$$(M - \mu\, dt)(v + dv) + \mu\, dt\,(v + c).$$

En soustrayant de l'expression précédente Mv, on obtient la variation de la quantité de mouvement durant le temps dt qu'on égale à l'impulsion des forces extérieures $F\, dt$. En négligeant le terme de

[1] Dans l'exemple donné tous les vecteurs s'alignent sur une même droite. En les projetant sur cette droite, il devient possible de se servir de l'écriture scalaire.

second ordre infiniment petit $\mu\, dt\, dv$, on obtient

$$M\, dv + \mu c\, dt = F\, dt,$$

ou

$$M \frac{dv}{dt} = F - \mu c. \tag{27.3}$$

L'équation (27.3) est l'*équation de Mechtcherski* pour le corps éjectant une partie de sa masse vers l'avant avec la vitesse c et d'un débit μ par seconde. L'équation peut maintenant être lue ainsi : le produit de la masse par l'accélération du corps est égal à la force appliquée F moins la *force de réaction* de la masse éjectée, égale au produit du débit de la masse μ par la vitesse relative c des particules éjectées.

Il apparaît une force de réaction, car on la communiqué aux particules éjectées une vitesse c. Les particules d'eau étaient au repos par rapport à l'arroseuse mais une certaine force leur imprima une accélération par rapport au véhicule grâce à laquelle elles acquièrent la vitesse c. La force opposée à cette dernière est appliquée, en vertu de la troisième loi de la dynamique, à l'arroseuse et est dirigée du côté opposé à la vitesse de l'eau éjectée ; c'est la force de réaction mentionnée.

On peut démontrer, dans le cas le plus général, que pour un corps éjectant par seconde des particules de masse μ à la vitesse relative c dirigée de façon quelconque la force de réaction est égale à $f_r = -\mu c$. Effectuons cette démonstration. D'un corps durant le temps dt se sépare une particule de masse $\mu\, dt$ et, une fois séparée, acquiert une vitesse v_1 par rapport à la Terre (fig. 70). A l'instant t le corps possédait la quantité de mouvement

$$Mv.$$

A l'instant suivant $t + dt$ le corps restant possède la quantité de mouvement

$$(M - \mu\, dt)\,(v + dv).$$

La vitesse du corps varie durant ce temps de dv, la masse séparée $\mu\, dt$ ayant la quantité de mouvement

$$\mu\, dt v_1.$$

Donc la variation de la quantité de mouvement de tout le système durant le temps dt sera

$$(M - \mu\, dt)\,(v + dv) + \mu\, dt v_1 - Mv = M\, dv + \mu\, dt\,(v_1 - v) - \mu\, dt\, dv.$$

En vertu de la seconde loi de la dynamique, la variation de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force extérieure F appliquée au corps durant ce temps. Soit

$$M\, dv + \mu\, dt\,(v_1 - v) = F\, dt,$$

car on peut négliger le terme de second ordre infiniment petit $\mu\, dt\, dv$. Divisant par dt les deux membres de l'égalité et transportant le

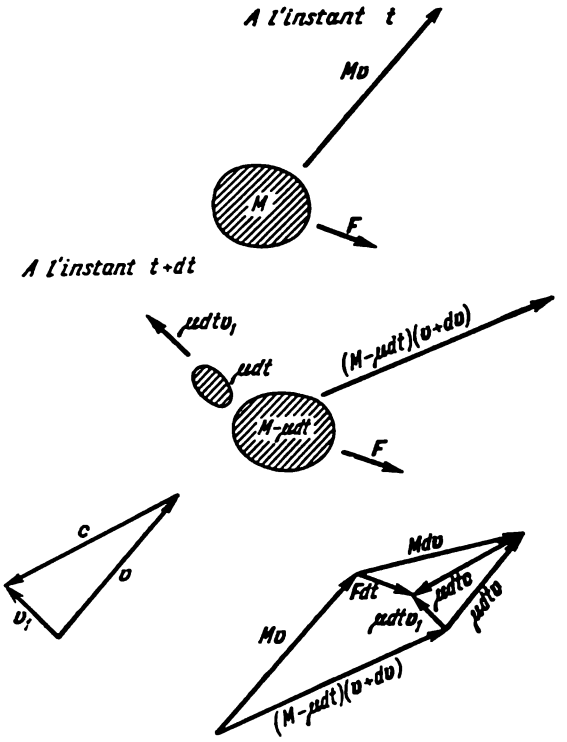


Fig. 70

terme avec μ dans le second membre, il vient

$$M\frac{dv}{dt} = F + \mu(v - v_1).$$

Si c est la vitesse relative de la particule éjectée, $v + c = v_1$, ou $v - v_1 = -c$, donc

$$M\frac{dv}{dt} = F - \mu c. \tag{27.4}$$

La réaction est dirigée dans le sens *opposé* à la vitesse d'éjections des particules se séparant du corps.

Par exemple, dans le mouvement d'un engin à réaction près de la surface terrestre (fig. 71) la force extérieure F sera composée de la force d'attraction de la Terre P et de la force de résistance de l'air X, l'accélération de l'engin dépendant encore de la grandeur et

de la direction de la réaction $-\mu c$. En variant au cours du mouvement l'intensité et la direction de la réaction, on peut commander le vol.

Notons que si l'on avait examiné au lieu des particules éjectées les particules qui s'ajoutaient au corps mobile et augmentaient de

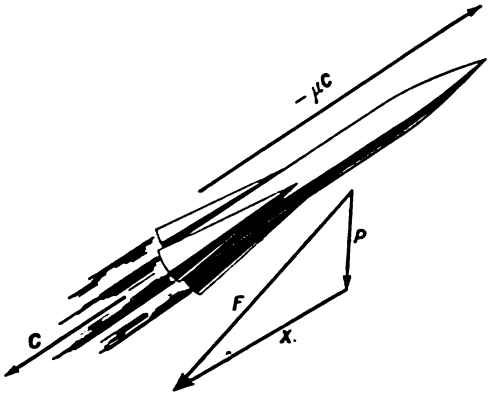


Fig. 71

ce fait leur masse, on aurait également l'équation (27.4) avec la seule différence que le signe de la force de réaction μc serait inverse, à savoir

$$M\frac{dv}{dt}=F+\mu c, \tag{27.5}$$

où c est la vitesse des particules ajoutées par rapport au corps. On propose, en guise d'exercice, de déduire cette formule.

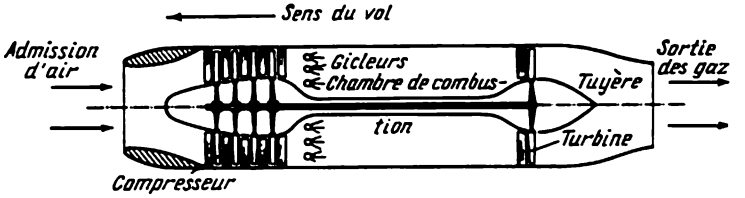


Fig. 72

Utilisant la formule (27.4), on peut déterminer la poussée d un turboréacteur (ou d'un statoréacteur) qui, en vol, aspire sur son chemin l'air, le compresse, y brûle le combustible et le rejette à une grande vitesse en arrière sous forme de gaz incandescents. Dans un turboréacteur il y a un compresseur d'air mis en action par une turbine placée dans l'écoulement des gaz éjectés (fig. 72).

Dans le statoréacteur il n'y a ni compresseur ni turbine. Il est composé d'une tuyère de section variable où le combustible est brûlé dans l'air aspiré et compressé dans l'avion en mouvement (fig. 73). Le statoréacteur n'est capable de fournir une poussée qu'en mouvement, tandis que le turboréacteur aspirant l'air au moyen d'un compresseur peut développer une poussée au départ de l'avion.

Il est évident que la quantité d'air éjectée par le turboréacteur est égale à celle qu'il aspire. Soit un avion volant à la vitesse v, le moteur aspirant et éjectant par seconde μ_a. Le moteur éjecte les gaz à la vitesse c avec le combustible dont le débit par seconde est μ_{com}. Comme l'air de l'atmosphère se trouve au repos, son aspiration développe une réaction de sens opposé $\mu_a v$ s'exerçant sur l'avion.

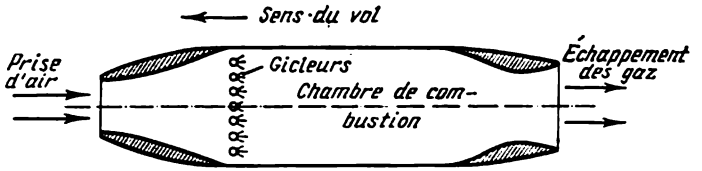


Fig. 73

L'éjection du jet de gaz (air et produits de combustion) engendre une réaction dirigée vers l'avant et égale à $(\mu_a + \mu_{com})\,c$. Donc la réaction résultante du turboréacteur (ou du statoréacteur), dirigée vers l'avant, sera

$$\mu_a (c - v) + \mu_{com} c.$$

Dans la pratique $\mu_{com} \ll \mu_a$ et, approximativement, on peut donc estimer de façon assez précise que la réaction d'un turboréacteur ou d'un statoréacteur sera

$$\mu_a (c - v).$$

Le mouvement de l'avion muni d'un tel moteur peut être assimilé approximativement au mouvement d'un corps de masse constante si on néglige le combustible brûlé. Il découle de la dernière expression que pour obtenir une poussée il faut que la vitesse c d'éjection des particules soit supérieure à la vitesse v de vol. Pour augmenter la force de poussée du moteur, il est nécessaire d'élever la vitesse des gaz d'échappement et la consommation d'air par le moteur. Quelle que soit la complexité des processus se déroulant au sein du moteur — prise d'air, fonctionnement du compresseur, consommation du combustible, comportement de la turbine à gaz, etc.—, pour déterminer la poussée il ne faut connaître que deux grandeurs: μ_a et la vitesse c.

La grandeur de la poussée peut encore s'évaluer de la façon suivante: la masse d'air μ_a reçoit par seconde, relativement à la Terre,

la quantité de mouvement $\mu_a (c - v)$ sous l'action de forces dues à l'avion. Donc, d'après le principe de conservation de la quantité de mouvement, la quantité de mouvement de l'avion doit augmenter également chaque seconde de la même grandeur par rapport à la Terre; c'est pourquoi $\mu_a (c - v)$ est égale à l'impulsion de la poussée du moteur à réaction par seconde, et l'impulsion de la force par seconde est égale à la force elle-même.

Les raisonnements précédents s'appliquent à tout moteur à réaction hydraulique, où au lieu de l'air c'est l'eau qui est aspirée et rejetée.

La situation est différente pour un *moteur-fusée* à propergol solide (poudre) ou liquide. Dans ce cas le combustible et le comburant se trouvent dans l'appareil en vol, c'est pourquoi la force de poussée du moteur-fusée est toujours égale à $-\mu c$, quelle que soit la vitesse de vol de l'engin muni de ce moteur; la poussée est indépendante du milieu environnant et est développée au cours d'un vol dans le vide.

La dépendance de la vitesse de la fusée du temps ainsi que sa liaison avec la masse peuvent se déduire de la formule (27.4) à la condition que le mouvement s'effectue sous l'action de la seule force de réaction. Soit M_0 la masse de la fusée au moment initial; à l'instant t elle sera $M = M_0 - \mu t$. D'après la formule (27.4) on peut écrire

$$M \frac{dv}{dt} = \mu c, \quad \text{ou} \quad (M_0 - \mu t)\, dv = \mu c\, dt, \tag{27.6}$$

considérant que la vitesse des gaz éjectés par la fusée c est toujours dirigée vers l'arrière suivant la tangente à la trajectoire. Si on récrit l'équation précédente sous la forme:

$$\frac{dv}{c} = \frac{\mu\, dt}{M_0 - \mu t}.$$

il est facile d'intégrer les deux membres. Alors

$$\frac{1}{c}(v - v_0) = \int_0^t \frac{\mu\, dt}{M_0 - \mu t} = \ln M_0 - \ln (M_0 - \mu t) = \ln \frac{M_0}{M_0 - \mu t} = \ln \frac{M_0}{M}.$$

D'où

$$v - v_0 = -c \ln \left(1 - \frac{\mu t}{M_0}\right)$$

et

$$M_0 = M \exp \left(\frac{v - v_0}{c}\right). \tag{27.7}$$

C'est la *formule de Tsiolkovski*. L'abaque de cette dernière est donnée à la figure 74. S'il faut communiquer à la masse M une

vitesse v, sa masse initiale doit être égale à M_0 pour une vitesse initiale v_0 qui, en particulier, peut être nulle. Avec l'accroissement de la vitesse finale v, la masse initiale M_0 croît exponentiellement. Pour $(v - v_0) \gg c$ le rapport M_0/M devient très grand. C'est la raison des principales difficultés techniques auxquelles se heurte la construction des fusées spatiales atteignant des vitesses de l'ordre de 10 km/s. L'accroissement de la vitesse des gaz éjectés permet de réduire notablement la masse initiale et, partant, de faciliter la tâche des constructeurs.

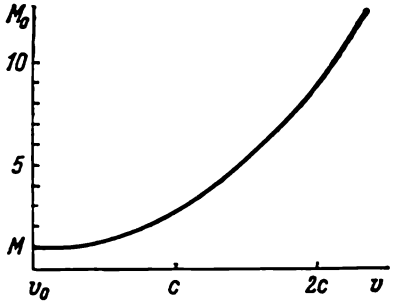


Fig. 74

Au cours du mouvement de la fusée dans les couches denses de l'atmosphère, il est nécessaire de surmonter les forces de résistance de l'air, c'est pourquoi la masse initiale de la fusée doit dépasser la masse calculée précédemment ; toutefois si la fusée traverse les couches denses de l'atmosphère à faible vitesse, quand les forces de résistance sont relativement petites, l'augmentation exigée de la masse initiale M_0 est minime.

CHAPITRE IV

TRAVAIL ET ÉNERGIE

§ 28. NOTION DE L'ÉNERGIE

La quantité de mouvement peut être prise pour une mesure définie du mouvement mécanique du corps. Cependant cette mesure ne permet pas toujours d'évaluer les variations du mouvement du corps. Par exemple, dans un choc parfaitement mou de deux boules identiques se précipitant l'une à l'encontre de l'autre il se produit une « disparition » du mouvement. Avant le choc les boules étaient en mouvement et après, elles sont au repos et ne possèdent plus de mouvement. Le principe de conservation de la quantité de mouvement est toujours vrai : avant le choc les boules possédaient des quantités de mouvement égales et dirigées dans des sens opposés, la quantité de mouvement du système était nulle, après le choc la quantité de mouvement demeurait également nulle. Appliquer le principe de conservation de la quantité de mouvement à l'une des boules est un non-sens, car elle est sollicitée dans le choc par une force extérieure, la pression de la seconde boule.

Après le choc l'état des deux boules s'est, en principe, modifié : les boules se déplaçaient et possédaient un mouvement mécanique ; puis un état de repos s'est établi, le mouvement de chacune des boules a cessé, les boules ont perdu leur mouvement, en outre, comme le montre l'expérience, la température de chacune des boules s'est élevée après le choc. Donc, la quantité de mouvement (le principe de conservation de la quantité de mouvement), dans ce cas concret, ne peut servir de mesure de la modification de l'état mécanique du corps. Le fait que les boules se sont échauffées dans le choc a une importance de principe : leur mouvement mécanique « a disparu » mais à sa place est apparue une nouvelle forme de mouvement de la matière, la chaleur. Les expériences ont montré que la quantité de chaleur obtenue dans le choc de deux boules n'est pas proportionnelle à la somme des quantités de mouvement que les boules possédaient séparément avant le choc. Mais cette confrontation est impossible : la quantité de mouvement est une grandeur vectorielle, et la somme vectorielle des quantités de mouvement des deux boules est égale à zéro. Comme la quantité de chaleur est un scalaire, il aurait, peut-être, fallu comparer la somme des modules des quantités de mouvement des boules avec la quantité de chaleur obtenue. Mais, comme le montre l'expérience, la somme des modules des quantités

de mouvement des boules n'est également pas proportionnelle à la quantité de chaleur reçue. Il faut donc une autre mesure au mouvement mécanique du corps, différente de la quantité de mouvement, surtout indispensable dans les cas de transformation du mouvement mécanique du corps en d'autres formes de mouvement de la matière.

Cette mesure, convenant à tous les cas, est l'*énergie*. Dans toutes les transformations de la matière l'énergie se conserve. Comme le mouvement de la matière est éternel, *l'énergie est la mesure quantitative du mouvement de la matière dans toutes les formes de ce mouvement.*

La question de principe de l'expression numérique de la liaison de l'énergie d'un corps mobile avec les autres grandeurs physiques caractérisant son mouvement mécanique ainsi que le mouvement sous ses autres formes fut définitivement éclaircie par la science il y a environ un siècle. Et, depuis, le principe de conservation de l'énergie est une *loi fondamentale* de la nature.

Avant de parler de la mesure de l'énergie du mouvement mécanique, il faut tout d'abord s'arrêter sur une grandeur physique importante, le *travail*, qui joue le principal rôle dans la transmission du mouvement mécanique et de l'énergie d'un corps à l'autre.

§ 29. TRAVAIL ET ÉNERGIE

Prenons deux exemples présentant une action de la force, mais où il n'y a pas de transformation de la quantité de mouvement. Premier exemple : un corps est sur une table. Deuxième exemple : une locomotive sur une voie rectiligne entraîne des wagons à une vitesse constante. Dans le premier, comme dans le deuxième exemple, une force extérieure agit sur le corps et sur les wagons dans l'un des cas c'est la force de pesanteur qui agit sur le corps au repos et dans l'autre, la poussée de la locomotive qui est appliquée un certain temps aux wagons. Dans les deux cas il n'y a pas de variation de la quantité de mouvement : le corps reste au repos et les wagons poursuivent leur mouvement avec une vitesse constante. Pourquoi dans les deux cas il ne se produit pas de modification de la quantité de mouvement, c'est aussitôt évident : au corps et aux wagons sont appliquées d'autres forces et la résultante de toutes les forces est chaque fois nulle.

Or il y a une différence de principe entre les deux exemples. Dans le premier, quand le corps se trouve sur la table, la force est appliquée en permanence, en n'entraînant aucune modification dans le corps lui-même et les corps environnants. Dans le second, la force est également appliquée de façon permanente, il n'y a pas aussi de changement dans la quantité de mouvement, mais ici l'action de la force est en liaison avec certains processus fort compliqués se déroulant dans les corps environnants. Pour que la force de pesanteur agisse sur le corps, il faut que la Terre, d'où la force émane, ne subisse

aucune modification. Pour que la force de la locomotive agisse sur les wagons, il faut une certaine pression de vapeur dans la chaudière et une consommation de cette vapeur, il faut une certaine dépense de combustible et de l'eau. Pour que la locomotive puisse développer une poussée, il faut lui communiquer une certaine quantité d'énergie obtenue par consommation du combustible. Dans ce cas l'action ininterrompue de la poussée est liée à une série de processus complexes se déroulant au sein des corps environnants.

Mais quelle est la différence entre les deux phénomènes décrits du point de vue de la mécanique? Elle ne consiste, dans le premier cas, que dans le fait que le point d'application de la force *reste au repos* et, dans le second, que le point d'application de la force (poussée) *se déplace* à une certaine vitesse. L'expérience montre que la quantité de combustible brûlé par la locomotive durant un certain temps, toutes les autres conditions restant inchangées, est proportionnelle au produit de la poussée par le chemin parcouru par la locomotive au cours du même temps. Aussi dans tous les phénomènes analogues un rôle essentiel est-il joué par une grandeur physique appelée *travail* dont *la mesure est donnée par le produit de la force par le déplacement*; le travail sert de mesure de la transmission du mouvement (au sens général) d'un corps à l'autre au moyen d'une force.

Donc *le travail est la mesure de transmission du mouvement d'un corps à l'autre, ou la mesure de transfert d'énergie d'un corps à l'autre.* Selon la définition de F. Engels « ...le travail est donc le changement de forme du mouvement, considéré sous son aspect quantitatif » [1]).

Comme il découle des propositions fondamentales de la philosophie matérialiste, le mouvement de la matière est éternel, seules les formes du mouvement de la matière sont diverses. Dans la Nature se déroulent constamment des processus traduisant des transformations d'une forme de mouvement à une autre. Il existe donc une mesure du mouvement de la matière commune à tous les phénomènes et qui est la même pour toutes les formes de mouvement de la matière; cette mesure, comme on l'a indiqué, est l'*énergie* du corps considéré (ou du système de corps).

Déjà les anciens philosophes avançaient l'idée que le mouvement de la matière était indestructible et cette pensée constitua la base des doctrines philosophiques de grands savants des époques postérieures, tels que R. Descartes, M. V. Lomonossov et autres, mais c'est seulement au XIX siècle que la loi universelle dite *principe de conservation de l'énergie* a été reconnue par tous les savants et, en premier lieu, par les physiciens en qualité de loi fondamentale de la Nature.

---

[1] F. Engels. Dialectique de la Nature Paris 1952, p. 102.

Chaque corps, ou système de corps, possède une certaine réserve d'énergie. Dans tous les processus et phénomènes il y a transport d'énergie d'un corps à un autre ou de certaines parties du corps vers d'autres. En physique, les formes de mouvement des corps (matière) peuvent être variées (mécanique, calorifique, électromagnétique, etc.), mais *l'énergie est l'unique mesure quantitative du mouvement de la matière dans toutes les formes de manifestation de ce mouvement.*

Dans certains phénomènes naturels la forme de mouvement de la matière reste invariable: un corps chaud élève la température du corps froid, une pierre monte vers le haut puis retombe sur la terre, etc. Dans d'autres, il y a passage d'une forme de mouvement à une autre: une balle frappe une planche et s'y enfonce en s'échauffant, le mouvement mécanique s'est transformé en forme calorifique du mouvement de la matière; une locomotive entraîne des wagons, la forme calorifique du mouvement produite par la combustion du charbon se transforme en forme mécanique; une bille roule sur une table puis s'arrête, la forme mécanique est devenue calorifique, etc. Mais dans tous ces cas la quantité d'énergie fournie (sous l'une ou l'autre forme) à un autre corps est exactement égale à la quantité d'énergie reçue par le second corps.

On dit habituellement: « énergie mécanique », « énergie thermique », « énergie électromagnétique », etc.; on sous-entend par là la grandeur d'énergie de la forme mécanique du mouvement du corps considéré, la grandeur d'énergie de la forme calorifique du mouvement, etc. Il n'existe pas d'énergie de formes différentes: seules existent des formes différentes du mouvement de la matière, l'énergie étant la mesure commune du mouvement de la matière. Et ce n'est que pour abréger que l'on dira, comme il a été indiqué plus haut, « énergie mécanique », « énergie thermique », etc.

Au cas où il n'est question que de la forme mécanique du mouvement ou de phénomènes et processus dans lesquels a lieu un transfert d'une forme mécanique de mouvement à une autre ou inversement, la grandeur examinée ci-dessus, — le travail mesuré par le produit de la force par le déplacement (par le déplacement du point d'application de la force), — est la mesure de la quantité d'énergie transmise. Aussi l'unité fondamentale de l'énergie est-elle d'ordinaire choisie égale à l'unité du travail.

Dans le système SI l'unité de travail et d'énergie est le joule (J) égal au travail d'une force de 1 N sur un déplacement de 1 m. Dans le système physique CGS l'unité de travail et d'énergie est l'erg égal au travail produit par une dyne sur un déplacement de 1 cm. Il est facile de calculer que

$$1\,\text{J} = 10^7 \text{ ergs.}$$

§ 30. TRAVAIL DE LA FORCE

Quand une force agit sur un corps mobile, les directions de la force et de la vitesse de mouvement coïncidant, il se produit toujours un transfert d'énergie à partir du corps d'où émane la force à celui sur lequel elle agit. Dans ce cas le travail de la force est considéré comme *positif*. La valeur positive du travail correspond à un transfert d'énergie du corps « propulsant » au corps « propulsé ».

Si, par contre, les directions de la force et du déplacement sont opposées, l'énergie est au contraire transférée au corps d'où émane la force. Le travail de la force dans ce cas est considéré comme négatif.

Au cas où les directions de la force et de son déplacement sont différentes, la grandeur du travail est égale à la projection de la force sur la direction du déplacement multipliée par la grandeur du déplacement ou : la grandeur du travail est égale au *produit scalaire* du vecteur force par le vecteur déplacement.

Ainsi, par exemple, si le corps *1* agit sur le corps *2* avec une force F_{21} et le corps *2* s'est déplacé de dS_2, le corps *1* a accompli un travail sur le corps *2* dont la grandeur est égale à

$$dA = F_{21}\, dS_2, \qquad (30.1)$$

ou au produit scalaire du vecteur force par le vecteur déplacement.

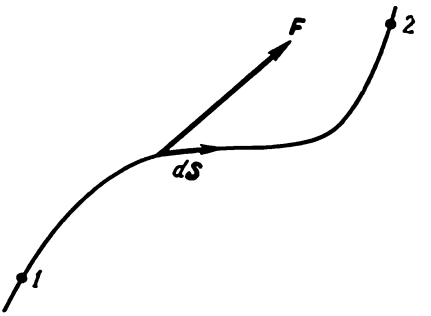


Fig. 75

Si $dA > 0$, cela signifie que le corps *1* a transmis l'énergie au corps *2* ; si $dA < 0$, c'est le corps *2* qui a transmis l'énergie au corps *1*. Si le déplacement dS_2 est perpendiculaire à la force F_{21}, $dA = 0$, il n'y a pas de transfert d'énergie entre les corps. Le travail n'est accompli que par la composante de la force suivant la direction du déplacement ; on peut donc écrire le travail ainsi :

$$dA = F_{21}\, dS_2 \cos \alpha, \qquad (30.2)$$

où α est l'angle entre la force F_{21} et la direction du déplacement dS_2.

Quand la force varie avec le déplacement du point d'application aussi bien en grandeur qu'en direction, il faut calculer le travail élémentaire dA sur chaque secteur infiniment petit de trajectoire dS tel que $dA = F\, dS$ et, ensuite, sommer les valeurs de tous les travaux élémentaires le long de tout le chemin parcouru, par exemple, du point *1* au point *2* (fig. 75). Autrement dit, il faut intégrer F par rapport à dS du point *1* au point *2*.

Ainsi donc le travail de la force F le long du chemin allant de *1* à *2* se désigne ainsi :

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 F\,dS. \tag{30.3}$$

Comment trouve-t-on la valeur de A dans le cas concret considéré? La réponse ne peut être donnée qu'après avoir reconnu les changements de F le long du chemin parcouru.

§ 31. ÉNERGIE POTENTIELLE DE DÉFORMATION

Lorsque le corps se déforme sous l'action d'une force extérieure quelconque, le point d'application de la force déformante se déplace, et le système d'où émane la force effectue un travail qui est la mesure de l'énergie transférée au corps déformé. Si c'est un *corps élastique* qui se déforme, le travail est dépensé à l'augmentation de la réserve d'énergie du corps déformé portant le nom d'*énergie potentielle de déformation*.

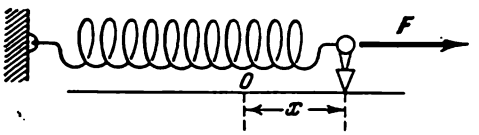


Fig. 76

En effet, pour un corps élastique les grandeurs de la déformation et de la force sont univoquement liées, quelle que soit la direction de variation de la déformation. Ainsi par exemple, en comprimant le corps de la grandeur dS, on dépense une énergie $dA = F\,dS$. Si on permet au corps de se détendre de la grandeur dS, il agira sur ce secteur avec une force F de même intensité mais de direction opposée et accomplira un travail de même grandeur dA. De plus, il transmettra l'énergie de déformation au corps que le corps comprimé sollicite au cours de son extension. Il est évident que l'énergie potentielle de déformation d'un corps élastique peut être utilisée toute entière en travail.

Habituellement la grandeur de la déformation est fonction de l'intensité de la force ayant entraîné la déformation ; l'intensité de la force variera avec la modification de la déformation, tandis que la grandeur du travail ne sera plus égale au produit de la force par le déplacement, car la force est variable et est fonction du déplacement du point d'application. Au cas où la déformation est proportionnelle à la force en action, il est facile de calculer le travail qu'il faut dépenser pour aboutir à la déformation requise. Supposons qu'il faut tendre un ressort (fig. 76) tel que

$$F = kx, \tag{31.1}$$

où F est la force appliquée au ressort; x l'allongement du ressort sous l'action de cette force; k un coefficient constant appelé *coefficient de rigidité* (ou tout simplement *rigidité*) du ressort. Le coefficient k a la dimension de N/m et est numériquement égal à la force qui déforme le ressort d'une unité de longueur. Le travail qu'il faut dépenser pour allonger le ressort de x à $x + dx$ est évidemment égal à $F\,dx$, ou $kx\,dx$. Donc le travail total pour un allongement de $x = 0$ à $x = x_0$ sera égal à

$$A = \int_0^{x_0} F\,dx = k\int_0^{x_0} x\,dx = \frac{1}{2}kx_0^2, \tag{31.2}$$

et ce travail est égal à l'énergie potentielle du ressort allongé (ou comprimé) de la grandeur x_0 et possédant un coefficient de rigidité k.

La force du ressort comprimé peut être appliquée à un corps quelconque se déplaçant à mesure que le ressort se détend. Pour un ressort parfaitement élastique sa force d'action est définie par l'égalité (31.1), et le travail du ressort en extension sera donc égal au travail dépensé à sa compression; l'énergie du ressort comprimé sera entièrement transmise au corps sur lequel agissait le ressort en se détendant.

§ 32. ÉNERGIE CINÉTIQUE DU CORPS

Quand la force agit sur le corps et le corps se meut sous l'action de cette force, le point d'application de la force se déplace, le système d'où émane la force accomplit un travail, l'énergie du corps mobile croît de la grandeur du travail réalisé. Tout corps en mouvement constitue la forme la plus simple du mouvement de la matière; la mesure de ce mouvement est une certaine réserve d'énergie de mouvement et c'est cette réserve qu'on appelle *énergie cinétique*.

La grandeur de l'énergie cinétique, ou de l'énergie du mouvement du corps, peut être déterminée d'après la grandeur du travail qu'il faut accomplir pour déclencher ce mouvement du corps. Soit F la force agissant sur le corps de masse m et l'entraînant dans un mouvement de vitesse v_0 de l'état de repos; le travail de la force F sur le chemin parcouru par le corps durant le temps de la croissance de sa vitesse de zéro à v_0 servira alors à augmenter l'énergie cinétique du corps. En vertu de la seconde loi de la dynamique, on a toujours

$$m\frac{dv}{dt} = F; \tag{32.1}$$

multiplions les deux membres de l'égalité par dS qui est l'accroissement du chemin franchi par le corps:

$$m\frac{dv}{dt}\,dS = F\,dS = dA. \tag{32.2}$$

Souvenons-nous que $v = \frac{dS}{dt}$, donc l'égalité (32.3) peut s'écrire ainsi :

$$mv\,dv = F\,dS. \tag{32.3}$$

Dans cette égalité on a le produit scalaire du vecteur v par le vecteur dv, ou $v\,dv \cos \alpha$. La grandeur $dv \cos \alpha = dv_S$ est la projection de l'accroissement de la vitesse sur sa direction (direction de la tangente à la trajectoire du corps) ou sur la direction du vecteur dS à l'endroit considéré. Donc dv_S est l'accroissement du module du vecteur vitesse durant le temps dt. On peut donc écrire l'égalité (32.3) ainsi :

$$mv\,dv_S = md\left(\frac{v^2}{2}\right) = F\,dS. \tag{32.4}$$

Maintenant intégrons les premier et second membres de l'égalité (32.4) quand la vitesse croît de zéro à v_0 :

$$m\int_0^{v_0} d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \int_0^{t} F\,dS = A, \quad A = \frac{mv_0^2}{2}. \tag{32.5}$$

C'est ainsi que pour un corps de masse m en mouvement avec la vitesse v_0 l'énergie cinétique est égale à

$$\frac{mv_0^2}{2}.$$

Le système d'où émane la force F mettant en mouvement le corps *accomplit* un travail ; il fournit une certaine énergie au corps. Au contraire, quand le corps, possédant une vitesse, est freiné ou s'arrête, la force qui le freine accomplit également un travail, mais ce travail est négatif (le déplacement et la force sont dirigés dans des sens opposés), le corps freiné reçoit une énergie égale à la diminution de l'énergie cinétique du corps mobile. Le corps mobile *a transmis* l'énergie au corps qui l'avait freiné. Quant à la forme en laquelle s'est transformée l'énergie cinétique elle dépend des conditions physiques.

Par exemple, une balle frappe une planche et s'y enfonce ; la planche reçoit une forte secousse et commence à se mouvoir. L'énergie cinétique de la balle, dans ce cas, s'est transformée en chaleur et en énergie cinétique du mouvement de la planche après l'impact de la balle. Ce choc de la balle est un exemple de choc mou. Dans un choc mou une partie de l'énergie cinétique se transforme en énergie thermique. Dans un choc parfaitement mou, les deux corps étant immobiles après le choc, toute l'énergie cinétique est transformée en chaleur.

§ 33. CHOC PARFAITEMENT MOU DE DEUX CORPS

Un corps de masse m_1 se déplace à la vitesse v_1 et percute un corps de masse m_2 possédant la vitesse v_2. Si après l'impact les deux corps acquièrent une *même* vitesse v, ce choc est dit *parfaitement mou* [1]. La vitesse du mouvement des corps v après le choc parfaitement mou peut être déterminée sur la base du principe de conservation de la quantité de mouvement, comme il a été indiqué au § 25. Après le choc, la vitesse, en grandeur et en direction, en vertu de la formule (25.3), sera :

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \tag{33.1}$$

où v_1 et v_2 sont les vitesses avant le choc des corps possédant respectivement les masses m_1 et m_2. L'énergie cinétique des corps après le choc aura la grandeur suivante [2] :

$$E_{\text{ap}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v^2 = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \tag{33.2}$$

Tandis qu'avant le choc l'énergie cinétique était

$$E_{\text{av}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \tag{33.3}$$

Déterminons les « pertes » de l'énergie mécanique, ou la partie de l'énergie qui, au cours du choc, s'est transformée en énergie thermique ; de l'égalité (33.3) soustrayons (33.2) :

$$E_{\text{av}} - E_{\text{ap}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \tag{33.4}$$

La grandeur $v_1 - v_2$ constitue la vitesse relative du mouvement des corps avant le choc. C'est pourquoi l'énergie transformée en chaleur dépend du rapport entre les masses des corps s'entrechoquant $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ et la vitesse relative de leur mouvement avant le choc. L'énergie des « pertes » peut être assimilée à l'énergie cinétique d'une certaine *masse efficace*

$$m_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

se déplaçant avec la vitesse relative $v' = v_1 - v_2$. Sous cette forme la formule permettant de déterminer les « pertes » d'énergie mécanique dans un choc parfaitement mou est facile à retenir et se prête facilement à l'anaylse et aux calculs.

[1] Il serait plus correct de dire : « choc de corps parfaitement mous », mais on a pris l'habitude d'utiliser cette appellation abrégée du choc.

[2] Notons que $v^2 = v^2$.

Par exemple, si l'un des corps est très grand par rapport à l'autre ($m_2 \gg m_1$), alors

$$m_0 = \frac{m_1}{1+(m_1/m_2)} \approx m_1$$

et les pertes d'énergie mécanique sont égales à l'énergie cinétique du mouvement relatif du petit corps.

La quantité de chaleur dégagée au cours du choc de l'obus plein contre le blindage d'un char en mouvement (ou d'un avion) et qui

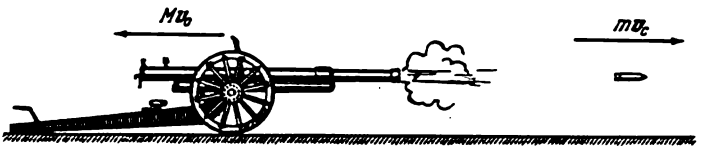


Fig. 77

s'y est enfoncé sera pratiquement égale à l'énergie cinétique de l'obus. Pour déterminer l'énergie cinétique de l'obus, il faut prendre sa vitesse par rapport au blindage.

Les conséquences mécaniques du coup de feu d'une pièce d'artillerie avec recul (fig. 77) ou de l'explosion d'un projectile, etc. sont analogues à celles observées dans un choc mou, seule la direction des processus varie. Dans ces cas deux corps (ou davantage) avaient avant l'explosion une même vitesse et une certaine énergie cinétique. Au cours de l'explosion de la charge l'obus et le canon, sous la pression des gaz de combustion de la poudre, acquièrent des vitesses différentes et une certaine énergie cinétique. Si l'on connaît les masses de l'obus et de la pièce d'artillerie, la vitesse avant le coup de feu et la quantité d'énergie mécanique acquise à la suite du coup de feu, alors, sur la base du principe de conservation de la quantité de mouvement, on peut calculer la vitesse du projectile et de la pièce d'artillerie après le coup de feu.

§ 34. CHOC ÉLASTIQUE

Dans un choc élastique de deux corps, par exemple de deux boules en ivoire ou en acier bien trempé, il se produit une déformation élastique des boules. Les surfaces des boules choquées s'enfoncent et la pression, par suite de la déformation des boules, modifie leur vitesse.

L'analyse des conséquences du choc des corps élastiques pleins étant relativement compliquée, examinons au début le cas le plus simple, celui du *choc central* de deux boules homogènes. On appelle choc central un choc dans lequel les vitesses des boules s'entre-

choquant coïncident avant l'impact en direction avec la ligne des centres des boules (fig. 78, *a*).

Le choc se réalise à peu près de la façon suivante. Au contact des boules (fig. 78, *b*), les forces qui leur sont appliquées (F_1 et F_2) augmentent avec l'accroissement de la déformation jusqu'à ce que les vitesses des deux boules deviennent égales (fig. 78, *c*). A ce moment les déformations atteignent leur maximum, puis elles commencent à diminuer, les forces de déformation écartant les boules (fig. 78, *d*) jusqu'à ce qu'elles se séparent; après quoi les boules se déplaceront à des vitesses différentes (fig. 78, *e*).

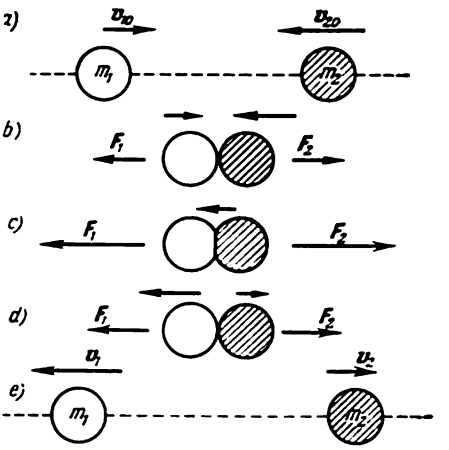


Fig. 78

L'étude détaillée de la déformation des boules dans un choc est un problème très complexe. Mais on peut assez facilement déterminer les vitesses des boules après le choc, une fois connues les grandeurs des masses des boules et leurs vitesses avant le choc et si l'énergie mécanique ne se transforme pas en chaleur. En effet, dans ce cas durant la première partie du choc (au cours du rapprochement des boules) l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle de déformation et durant la seconde partie du choc (au cours de l'écartement des boules), l'énergie potentielle redevient entièrement de l'énergie cinétique.

Donc, en vertu du principe de la constance de la quantité de mouvement et du principe de conservation de l'énergie, on peut écrire :

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{34.1}$$

et

$$\frac{1}{2}(m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2) = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2), \tag{34.2}$$

où m_1 et m_2 sont les masses des boules, v_{10} et v_{20}, leurs vitesses avant le choc, et v_1 et v_2, après le choc.

Les vecteurs vitesses des boules après le choc élastique se disposeront sur la droite joignant leurs centres, puisque les forces d'interaction seront dirigées au cours du choc, du fait de la symétrie, suivant la même droite. Les équations (34.1) et (34.2) peuvent pren-

dre la forme :

$$\begin{aligned} m_1(v_{10}-v_1) &= m_2(v_2-v_{20}), \\ m_1(v_{10}^2-v_1^2) &= m_2(v_2^2-v_{20}^2). \end{aligned} \tag{34.3}$$

Divisant la seconde équation par la première, il vient

$$v_{10}+v_1=v_2+v_{20}. \tag{34.4}$$

Multipliant l'équation (34.4) par m_1 et additionnant avec la première équation de (34.3), on détermine la vitesse du second corps après le choc :

$$v_2=\frac{2m_1v_{10}-(m_1-m_2)v_{20}}{m_1+m_2}. \tag{34.5}$$

La formule donnant la vitesse du premier corps après le choc s'obtient facilement en remplaçant les indices 1 par 2 et 2 par 1 dans la formule (34.5) :

$$v_1=\frac{2m_2v_{20}-(m_2-m_1)v_{10}}{m_2+m_1}. \tag{34.6}$$

Si les masses des boules sont les mêmes et l'une d'elles se trouve au repos, par exemple $v_{20}=0$, après le choc la vitesse de la première boule sera nulle et la seconde boule se déplacera avec la vitesse de la première v_{10}.

Mais le même résultat peut être obtenu directement sur la base des principes de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. En effet, puisque la masse des boules est la même, la loi de conservation de la quantité de mouvement exige que la somme des vitesses des deux boules soit égale après le choc à la vitesse de la première boule avant le choc. Le principe de conservation de l'énergie exige que la somme des carrés des vitesses après le choc soit égale au carré de la vitesse avant le choc. L'observation simultanée de ces deux conditions n'est possible que dans le cas où la vitesse de l'une des boules est nulle après le choc, or ce n'est que la vitesse de la première boule mobile avant le choc qui peut s'annuler, car c'est la seule boule qui est ralentie par le choc.

Dans un choc élastique central de boules homogènes de même masse, ces dernières « échangent » leurs vitesses. En effet, posons dans les formules (34.5) et (34.6) $m_1=m_2=m$ et on obtient

$$v_2=v_{10}, \quad v_1=v_{20}. \tag{34.7}$$

On peut se représenter de façon assez claire le principe du mécanisme du choc élastique de deux boules en examinant le choc de deux boules rigides après avoir « intercalé » entre elles un ressort.

Attachons à l'une des boules un ressort dont la masse est faible devant celle de chacune des boules (ressort « impondérable »); initialement les vitesses des

boules sont dirigées suivant la droite joignant leurs centres, de sorte que la force du ressort serré est également dirigée suivant cette droite des centres. Les valeurs des grandeurs sont données à la figure 79.

Les résultats de l'action des forces élastiques de déformation des boules dans le choc sont les mêmes que ceux de l'action du ressort dont la masse est presque nulle. L'énergie cinétique du système en mouvement avant le choc est $\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = 0{,}0540$ J. Au cours du choc, l'énergie potentielle croît, le ressort se resserre tant que les vitesses des boules ne s'égalisent; durant ce laps de temps la première boule est ralentie et la seconde est accélérée. La vitesse des boules en cet instant est

$$v = \frac{K}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}14}{0{,}3} \approx 0{,}467 \text{ m/s}$$

et l'énergie potentielle maximale du ressort est donc

$$0{,}0540 - \frac{0{,}3 \cdot 0{,}467^2}{2} \approx 0{,}0215 \text{ J.}$$

Ensuite, le ressort commence à se détendre; il est évident que la force du ressort ralentit alors la première boule en lui communiquant une vitesse de —0,0667 m/s de sens opposé et accélère la seconde boule jusqu'à la vitesse de 0,733 m/s; ces grandeurs peuvent se déterminer d'après les formules (34.5) et (34.6).

Les vitesses des boules après le choc ne dépendent pas de la rigidité du ressort. Ce qui importe, c'est que le ressort est parfaitement rigide, car après le choc il est dénué d'énergie.

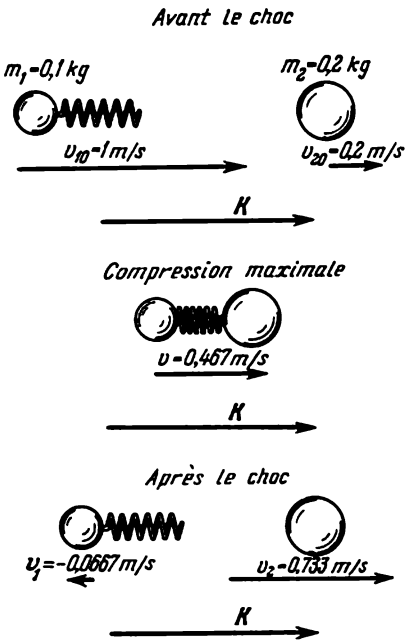


Fig. 79

Mais la durée du choc, la durée du resserrement et celle de la détente du ressort dépendent notablement de la rigidité de ce dernier et de la masse des boules. Plus le ressort est rigide, plus bref est le choc. On peut montrer que la durée du choc pour des masses égales est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{k}}$, où k est le coefficient de rigidité du ressort.

Comme dans un choc seules agissent les forces d'écartement (et non pas d'attraction !), l'accroissement de la vitesse de chaque boule dû au choc est toujours dirigé à partir de la seconde boule.

Si au cours du choc se manifestaient des forces d'attraction, la situation serait inverse: l'accroissement de la vitesse de chaque boule après le choc serait dirigé vers la seconde boule. On peut réaliser ce choc de deux boules à l'aide d'un fil « impondérable ». Soient deux boules liées par un tel fil et qu'on communique à l'une d'elles une vitesse (fig. 80, *a*); aussitôt le fil tendu, il se produit un choc entraînant l'action des forces d'attraction. Si le fil est parfaitement rigide, le mouvement sera composé: quand les vitesses des deux corps s'égaliseront

(fig. 80, *b*), le fil se tendra à sa longueur maximale, puis il se rétrécira en accélérant m_1 et en ralentissant m_2, tant que sa longueur n'atteigne la valeur initiale. A ce moment la masse m_1 se déplacera plus vite que la masse m_2 et le fil n'exercera aucune influence sur le mouvement ultérieur des boules qui se rapprocheront à une vitesse constante (fig. 80, *c*).

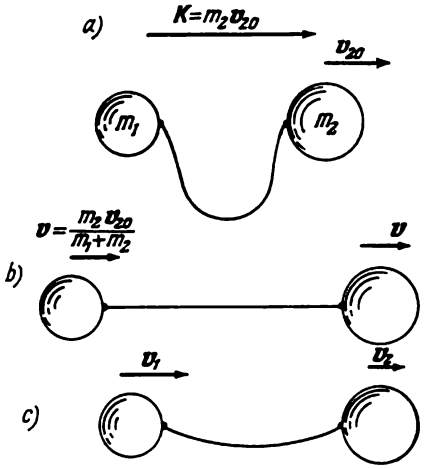


Fig. 80

On a examiné en détail le choc central de deux boules. La situation ne changera pas au cas du choc de deux corps quelconques si la vitesse initiale est dirigée suivant la droite joignant les centres des masses de ces corps et si les forces d'interaction sont également dirigées le long de cette droite des centres. Dans le cas contraire, le choc constituera un phénomène complexe sortant du cadre de ce cours.

L'image de la collision des boules dans un choc non central sera tout à fait autre. Il se produit dans ce cas un rapprochement mutuel des boules du fait de la déformation et un « glissement » de la surface de l'une des boules par rapport à l'autre. Pour se représenter le mécanisme du choc, décomposons les vecteurs vitesses des deux boules

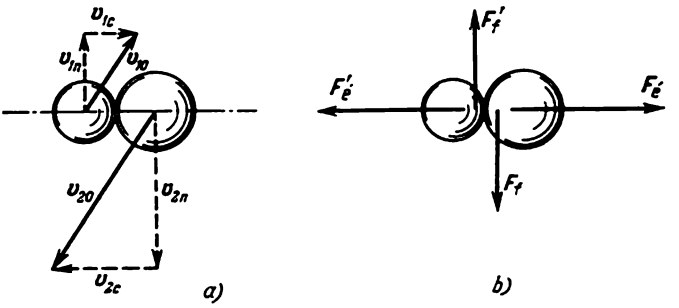


Fig. 81

avant le choc sur la direction de la droite des centres et sur celle perpendiculaire à cette droite (fig. 81).

Il est évident que le « glissement » sur la surface des boules engendrera des forces de frottement F_f et F_f', qui, jointes aux forces élastiques d'interaction $F_é$ et $F_é'$, donneront la variation de la vitesse des boules après le choc. En outre, les forces de frottement provoque-

ront la rotation des boules autour du centre. C'est seulement quand les forces de frottement F_f sont très petites par rapport aux forces élastiques $F_é$, c'est-à-dire si $F_f \ll F_é$, qu'on peut négliger l'action des forces de frottement.

Il est maintenant relativement simple de résoudre le problème du choc. En effet, à cette condition les grandeurs des composantes normales de la vitesse des boules v_{1n}, v_{n2} ne varient pas dans le choc, tandis que les deux composantes de la vitesse le long de la droite des centres peuvent être évaluées après le choc sur la base des principes de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement de la façon déjà utilisée pour le choc central. Ecrivons ces équations :

$$m_1 v_{1c} + m_2 v_{2c} = m_1 v'_{1c} + m_2 v'_{2c}, \tag{34.8}$$

$$m_1 (v_{1n}^2 + v_{1c}^2) + m_2 (v_{2n}^2 + v_{2c}^2) = \\ = m_1 (v'^2_{1c} + v_{1n}^2) + m_2 (v'^2_{2c} + v_{2n}^2);$$

seules deux grandeurs sont ici inconnues : v'_{1c} et v'_{2c}.

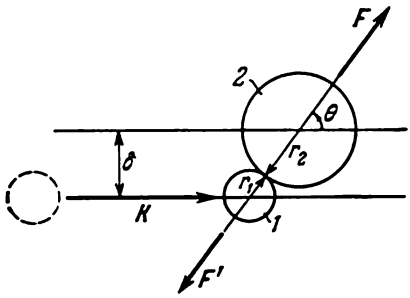


Fig. 82

Dans le cas considéré les lois générales du choc des boules peuvent se dégager ainsi. Supposons qu'avant le choc (fig. 82) la boule *2* est au repos, tandis que la boule *1* est mobile [1]. La force d'interaction au moment du choc passe par les centres des boules (pas de frottement) et sa direction dépend du « paramètre de choc » δ égal à la distance séparant le centre de la boule au repos de la ligne de vol du centre de la seconde boule (avant le choc). Le plan du dessin coïncide avec le plan passant par les centres des boules et le vecteur vitesse de la boule *1*.

Le choc se produira à la condition que $\delta < r_1 + r_2$, où r_1 et r_2 sont les rayons de boules. L'angle θ dépend de δ et de $r_1 + r_2$. La composante de la quantité de mouvement de la boule *1* (percutante), normale à F (force d'interaction), ne varie pas. Les composantes des quantités de mouvement des boules suivant la direction de la force F se modifient d'après les lois du choc central.

En vertu du principe de la constance de la quantité de mouvement

$$K = K_1 + K_2, \tag{34.9}$$

où K est la quantité de mouvement de la boule *1* avant le choc. K_1 et K_2 respectivement les quantités de mouvement des boules *1* et *2* après le choc.

[1] Cette hypothèse n'a rien d'absolu. On peut toujours choisir un référentiel mobile à la vitesse de la boule *2* avant le choc et étudier le mouvement par rapport à ce référentiel (voir § 43).

Le principe de conservation de l'énergie peut s'écrire ainsi :

$$\frac{K^2}{m_1}=\frac{K_1^2}{m_1}+\frac{K_2^2}{m_2}, \tag{34.10}$$

car $K = mv$ et $mv^2 = K^2/m$ pour tout corps.

Supposons que K_2 forme l'angle θ avec le vecteur K, c'est-à-dire que la boule au repos s'écarte de l'angle θ de la vitesse initiale de la

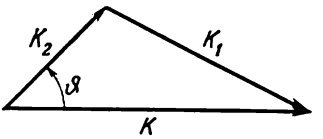


Fig. 83

première boule ; il découle alors du triangle de la figure 83 que :

$$K_1^2 = K_2^2 + K^2 - 2KK_2 \cos\theta.$$

Considérant la constance de l'énergie (34.10), éliminons K_1 ; il vient

$$K_2 = \frac{2m_2}{m_1+m_2} K\cos\theta = \beta K\cos\theta, \quad \beta = \frac{2m_2}{m_1+m_2}. \tag{34.11}$$

On en tire la relation générale entre K_2 et K en fonction de l'angle θ et du rapport des masses m_1/m_2.

Il faut distinguer deux cas : $m_1 > m_2$ et $m_1 < m_2$. Dans le premier cas $\beta < 1$, la boule lourde percute la boule légère et la relation entre K_2 et K est montrée sur la figure 84 : l'extrémité du vecteur K_2 décrit un cercle de diamètre βK. Les deux boules, après le choc, prennent la direction initiale de la première boule. L'angle θ varie de 0 à $\pi/2$. L'angle de déviation de la première boule peut varier de 0 jusqu'à un certain angle φ_{max}. A une valeur de φ il correspond, en général, deux valeurs de θ. Le point B représente un choc central, les deux boules prenant après le choc la même direction (cas examiné précédemment). Le point A constitue un « raté » (les boules passent sans se toucher).

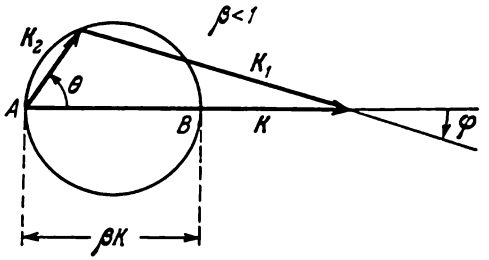


Fig. 84

Dans le second cas, si $m_1 < m_2$, la boule légère frappe la boule lourde. Sur la figure 85 on a représenté les quantités de mouvements

possibles des boules après le choc. On a ici $\beta > 1$ et la boule *1*, après le choc, peut rebondir vers l'arrière. L'angle de déviation de la boule percutante φ varie de 0 à π. Le point *B* correspond au choc central. A chaque valeur de φ correspond une seule valeur de θ.

On a montré à la figure 86 l'image des quantités de mouvements possibles dans le cas intermédiaire des boules de masse égale, $m_1 = m_2$. L'angle φ varie de 0 à $\pi/2$. Dans un choc central la boule *1*

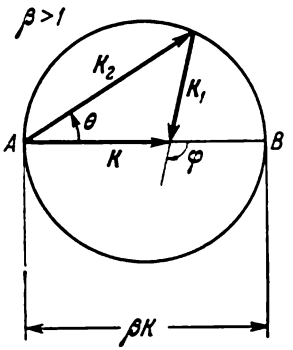


Fig. 85

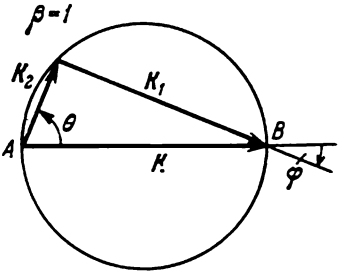


Fig. 86

s'arrête et la boule *2* continue à se mouvoir avec la même vitesse (point *B*). L'angle de « dispersion » des boules $\theta + \varphi$ est toujours égal à $\pi/2$.

L'angle θ est facilement reliable au paramètre de choc δ et on peut montrer (voir fig. 82) que

$$(r_1 + r_2) \sin \theta = \delta. \tag{34.12}$$

Connaissant δ, les diamètres des boules et leurs masses, cherchons θ et β. Déterminons d'après K donné K_2 et K_1 qui, à leur tour, permettent d'évaluer les vitesses et les directions du mouvement des boules après le choc. On a donc le problème du choc élastique de deux boules.

Il est important de noter que la solution du problème s'appuie sur deux lois : le principe de conservation de l'énergie et celui de conservation de la quantité de mouvement. Toutes les conclusions tirées de (34.11) et illustrées sur les figures sont donc applicables au choc élastique de deux particules (considérées comme des points matériels). Quand on ne connaît pas le mécanisme d'interaction des particules dans le choc, on suppose que leur énergie cinétique après la percussion est égale à l'énergie cinétique d'avant le choc. La constance de l'énergie cinétique dans le choc peut être prise pour la condition du choc élastique de particules. Pour des « particules ponctuelles » cette condition est satisfaite si les forces répulsives

dépendent univoquement de la distance qui les sépare et sont dirigées suivant la droite qui les joint (voir § 36).

La relation (34.12) n'est vraie que pour des boules, cependant pour des particules quelconques la grandeur de θ peut être obtenue d'après le paramètre de choc δ si l'on connaît la dépendance des forces de répulsion de la distance entre les particules. Quand à l'image

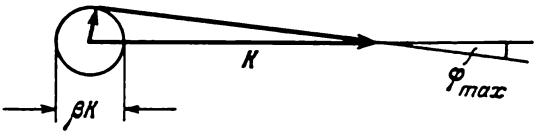


Fig. 87

générale de tous les chocs possibles de particules, elle est traduite par la formule (34.11) et est illustrée de façon claire sur les figures. Dans certains problèmes on peut s'en limiter. Par exemple, dans le choc avec une particule très lourde ($m_1 \gg m_2$) on peut, d'après l'angle de déviation maximal φ_{max}, déterminer la grandeur du rapport des masses. Il est facile de se convaincre en regardant la figure 87 que

$$\varphi_{max} \approx \frac{\beta}{2} \approx \frac{m_2}{m_1}.$$

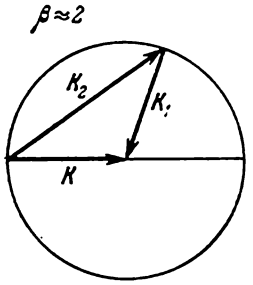


Fig. 88

Dans des chocs avec une particule très légère ($m_1 \ll m_2$) l'image des impulsions est montrée sur la figure 88 (dans ce cas $\beta \approx 2$). Au cas d'un choc frontal ($\theta = 0$) $K_2 \approx 2K$ et $K_1 = -K$. Dans tout choc, où $K_1 \approx K$, la vitesse de la particule légère ne varie presque pas en grandeur et ne modifie que sa direction. La vitesse de la particule lourde après le choc n'est pas supérieure à

$$v_2 = \frac{2K}{m^2} = \frac{2m_1}{m_2} v$$

(v étant la vitesse initiale de la particule percutante). Ce dernier cas constitue à la limite ($m_1/m_2 \to 0$, $v_2/v \to 0$) un choc élastique contre un mur immobile.

L'analogie du choc des boules avec celui des particules n'est réelle que quand le contact des boules s'effectue sans frottement et quand les boules, après le choc, ne subissent pas de rotations et n'exécutent que des translations. Il serait plus juste de dire : quand la rotation des boules ne varie pas avec le choc.

§ 35. CHOC DES CORPS PLASTIQUES

Le choc élastique, examiné au paragraphe précédent, qui n'entraîne pas de « pertes » d'énergie mécanique, aurait dû être appelé choc parfaitement élastique, car en réalité il y a toujours des « pertes » d'énergie mécanique, dont une partie se transforme en chaleur. Mais si ces « pertes » sont très faibles l'image qu'on en a donnée traduit suffisamment bien le phénomène réel.

Mais dans des chocs inélastiques courants quand les « pertes » d'énergie mécanique sont sensibles, le phénomène se présente quelque peu différemment.

La différence de principe entre des chocs de genres différents peut être visualisée par l'étude du choc des boules en interposant un ressort (voir fig. 79). Un choc parfaitement mou est assimilable à un choc contre un ressort qui, ayant atteint le maximum de resserrement, se briserait ou à un choc contre un ressort qui ne peut que se resserrer étant incapable de se détendre ; par exemple, le ressort est muni d'un loquet l'autorisant à se resserrer, mais lui défendant de se détendre. Dans ce cas l'énergie potentielle du ressort serré est égale aux « pertes » d'énergie cinétique.

Le choc des corps plastiques usuels constitue un cas intermédiaire entre les chocs parfaitement élastiques et les chocs parfaitement mous. Il lui correspond le choc de deux boules à travers un ressort inélastique qui, comprimé dans la première partie du choc jusqu'à une certaine grandeur, ne reprend plus ses dimensions initiales après le choc ; ou si la force de répulsion au cours de la compression est supérieure à celle développée à la détente du ressort. Une partie de l'énergie potentielle de compression se transformera en chaleur, sans pouvoir devenir de l'énergie cinétique du mouvement. Le principe de conservation de l'énergie mécanique ne peut donc être utilisé dans ce cas. La condition de l'égalité des vitesses après le choc n'est également pas remplie, comme c'était dans le cas du choc parfaitement mou, car après le choc les deux corps se déplacent à des vitesses différentes.

Un choc mou aurait pu être caractérisé par la fraction de l'énergie de déformation transformée en chaleur durant le choc. Mais encore Newton a constaté que dans un choc mou de boules en matériau déterminé les grandeurs des vitesses relatives avant et après le choc se trouvent dans un rapport constant, et qu'en conséquence un tel choc se caractérise mieux par le *coefficient de restitution de la vitesse relative après le choc* :

$$e = \frac{|v_2 - v_1|}{|v_{20} - v_{10}|}, \tag{35.1}$$

où $v_{20} - v_{10}$ est la vitesse relative avant le choc et $v_2 - v_1$, après le choc. L'expérience montre qu'avec un certain degré de précision

on peut considérer la quantité e comme constante et dépendant uniquement du matériau des boules qui s'entrechoquent.

Il est facile de se convaincre que dans un choc parfaitement élastique la vitesse relative reste invariable en grandeur, mais change de signe ; en effet, de l'équation (34.4) il suit :

$$v_{10} - v_{20} = -(v_1 - v_2). \tag{35.2}$$

Le coefficient de restitution est toujours inférieur à l'unité, car dans un choc élastique il est égal à l'unité, dans un choc parfaitement mou il est égal à zéro, vu que dans ce cas $v_2 - v_1 = 0$. Newton trouva que pour le verre $e = 15/16$, pour le fer, 5/9, etc. Connaissant le coefficient e, on peut évaluer les vitesses de déplacement des boules après l'impact et les « pertes » d'énergie, comme on l'a fait dans le cas du choc parfaitement mou de deux corps au § 33.

§ 36. ÉNERGIE POTENTIELLE

Sur un corps se trouvant près de la surface de la Terre agit toujours une force de gravitation dirigée vers le centre de la Terre. Donc en variant la distance du corps à la surface de la Terre, plus précisément à son centre, on fera accomplir à la force de gravitation ou la force de pesanteur un travail.

Si à l'aide d'un dispositif quelconque on soulève le corps, ce dernier effectuera un travail. Inversement, si le corps chute librement, sa distance de la Terre diminue et la force de gravitation accomplit un travail, qui, dans ce cas, est égal à l'augmentation de l'énergie cinétique du corps. Le corps mobile autour de la Terre se déplace dans le *champ de gravitation* (ou *de pesanteur*) de la Terre. Le déplacement du corps dans le champ de gravitation de la Terre est, en général, toujours associé à un travail des forces de gravitation : le corps se déplaçant d'un point à un autre dépense de l'énergie ou en restitue. D'où le corollaire ; le déplacement du corps est lié à une variation d'énergie.

Pour déterminer cette énergie, il faut calculer le travail des forces de gravitation pendant le déplacement du corps d'un point de l'espace à un autre et d'en dégager la dépendance de ce travail de la variation de la position du corps par rapport à la Terre.

Examinons d'abord le cas le plus simple : un corps de masse m est monté à une hauteur h sous l'action d'une force constante F dirigée vers le haut. Le travail de la force appliquée sera alors Fh. L'accroissement de l'énergie cinétique du corps sera calculé sur la base de l'équation

$$F - F_g = m\frac{dv}{dt}, \tag{36.1}$$

où $F_g = mg$ est la force de gravitation, g l'accélération en chute libre, v la vitesse. Multiplions les deux membres de (36.1) par l'accroissement du chemin dS et intégrons de 0 à h, alors [1]

$$F\int_0^h dS - mg\int_0^h dS = m\int_0^h v\,dv,$$

ou

$$Fh = mgh + \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_d^2}{2}, \tag{36.2}$$

où v_f est la vitesse en fin du chemin, v_d la vitesse au début du chemin. Donc le travail de la force F sur la distance h est égal à la variation de l'énergie cinétique $\frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_d^2}{2}$ plus le travail de la force de pesanteur sur le chemin h égal à mgh. On arrivera à la même conclusion dans le cas plus général où la force extérieure varie avec la distance suivant une loi connue quelconque la grandeur du travail de la force extérieure F devant seulement être déterminée d'après la formule

$$\int_0^h F\,dh.$$

Si l'énergie cinétique au début du chemin $\frac{mv_d^2}{2}$ est égale à l'énergie cinétique en fin du chemin $\frac{mv_f^2}{2}$, ou $v_d = v_f$, le travail de la force extérieure est égal au travail de la force de pesanteur. Cela se vérifie également pour $v_d = v_f = 0$, donc le système transportant le corps, par un *procédé quelconque* verticalement vers le haut accomplit un travail déterminé mgh qui ne dépend que de la distance h et de la grandeur de la force de pesanteur mg.

Maintenant calculons le travail qu'il faut accomplir pour soulever le corps à la hauteur h non pas suivant une verticale, mais suivant un trajet quelconque dont le point final B se trouve au-dessus du point initial A à la distance h (fig. 89). Evaluons le travail de la force F dirigée d'une façon quelconque vers le haut et variant au long du chemin, du point A au point B. Le travail de la force extérieure $\int_A^B F\,dS$ sera égal à mgh plus la variation de l'énergie cinétique.

[1] Considérant que $\frac{dS}{dt} = v$.

En effet, en adoptant les notations de la figure 89, écrivons l'équation de la dynamique sous la forme de l'équation (36.1) et multiplions-la scalairement par dS; il vient

$$F\,dS + F_g\,dS = m\frac{dv}{dt}\,dS, \tag{36.3}$$

ou

$$F\,dS = -F_g\,dS + mv\,dv = -F_g\,dS + d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Le travail de la force F sur le segment AB est égal à l'intégrale de cette expression :

$$\int_A^B F\,dS = -\int_A^B F_g\,dS + \frac{mv_k^2}{2} - \frac{mv_d^2}{2}. \tag{36.4}$$

Notons que $F_g\,dS = -mg\,dh$ on trouve

$$\int_A^B F\,dS = mg\,(h_B - h_A) + \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_d^2}{2}, \tag{36.5}$$

où $h_B - h_A = h$.

On a démontré ainsi que si l'énergie cinétique au début et à la fin du trajet est la même, par exemple si les vitesses aux points A et B sont nulles, le travail de la force extérieure est égal au travail de la force de pesanteur dans la descente de la hauteur h.

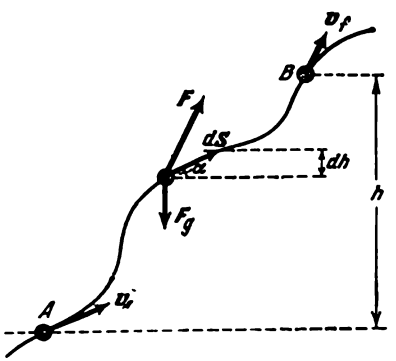


Fig. 89

Dans le déplacement du corps de masse m sur un trajet *quelconque* du point A vers le point B (en un point quelconque du plan horizontal passant à la hauteur h au-dessus du point A), un certain système de corps doit dépenser une énergie égale à mgh. Inversement, dans le déplacement du corps de masse m du point B vers un point quelconque A se trouvant dans le plan horizontal au-dessous du point B à la distance h, le corps (ou plus précisément, le système corps-Terre) effectuera un travail égal à mgh ou restituera une énergie mgh.

Donc le déplacement du corps dans le champ de gravitation de la Terre est lié à une certaine dépense (ou acquisition) d'énergie : la grandeur de cette énergie ne dépend que de la hauteur de la position du corps au-dessus de l'horizon et de la grandeur de sa masse et

ne dépend pas du trajet suivi d'un niveau à l'autre. Cela signifie que le système corps-Terre possède une certaine réserve d'énergie U dont la grandeur est $U = mgh + \text{const}$. L'énergie potentielle peut être évaluée à une grandeur constante quelconque près égale à l'énergie potentielle pour $h = 0$.

L'énergie potentielle du corps dans le champ de gravitation [1] dépend de la position du corps par rapport à la Terre, bref de sa *hauteur* au-dessus de la surface de la Terre. Rigoureusement parlant l'énergie potentielle de gravitation d'un système de deux corps « Terre + corps pesant » dépend de la *position relative* de ces corps, c'est-à-dire de la distance séparant les centres des masses de ces corps. Cette définition convient également au cas où h est grand, c'est-à-dire comparable au rayon de la Terre ; comme à ces distances il n'est plus possible de considérer g comme une grandeur constante, l'accélération de la pesanteur diminuant avec l'accroissement de h, l'expression de l'énergie potentielle prendra une autre forme (voir § 78).

L'énergie potentielle de déformation d'un corps élastique, par exemple l'énergie potentielle d'un ressort élastique, dépend également de la position relative des différentes parties de ce corps.

Dans le cas général l'énergie potentielle des forces de gravitation de deux corps se définit par l'égalité (36.5), mais la comparaison de (36.4) et de (36.5) conduit à une meilleure définition :

$$U_B - U_A = mg\,(h_B - h_A) = -\int_A^B \boldsymbol{F}_g\, d\boldsymbol{S}. \qquad (36.6)$$

Ou : le travail des forces de gravitation (d'interaction) de deux corps de signe opposé est égal à l'accroissement de l'énergie potentielle.

La définition (36.6) se vérifie pour toutes forces d'interaction de deux corps (particules) si l'on entend par la grandeur $\boldsymbol{F}_g$ une force d'interaction. Il faut souligner cependant que cette définition n'a de sens que dans le cas où le travail $\int_A^B \boldsymbol{F}_g\, d\boldsymbol{S}$ ne dépend pas de la forme du trajet joignant A et B. C'est à cette condition seulement que le système de deux corps possède une énergie potentielle.

Le travail positif des forces internes (des forces d'interaction) s'effectue aux dépens de la diminution de l'énergie potentielle et inversement, le travail négatif de ces forces atteste que l'énergie potentielle du système augmente.

On peut montrer que le système de particules matérielles (de corps suffisamment petits) possède une énergie potentielle si les

[1] Pour plus de détail sur les forces de gravitation, voir § 76.

forces d'interaction ne dépendent que de la distance entre deux particules et sont dirigées suivant la ligne qui les joint.

Supposons qu'une particule se trouve au début du vecteur $\boldsymbol{r}$ et une seconde à son extrémité, et que la première agit sur la seconde avec la force $f(r)\boldsymbol{r}$, tandis que sur la première s'exerce une force de direction opposée.

Posons que la première particule est au repos et la seconde se déplace du point $\boldsymbol{r}_A$ au point $\boldsymbol{r}_B$ suivant un certain trajet. Alors, si le travail

$$-\int_A^B f(r)\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{S}$$

ne dépend pas de la forme du chemin, il sera égal à $U_B - U_A$. Le produit $\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{S} = r\,dr$, où dr est l'accroissement du module de $\boldsymbol{r}$ (fig. 90); l'intégrale

$$\int_A^B f(r)\,\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{S} = \int_A^B f(r)\,r\,dr \tag{36.7}$$

n'est donc fonction que de $\boldsymbol{r}_A$ et $\boldsymbol{r}_B$, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que de la variation de la distance séparant les deux particules;

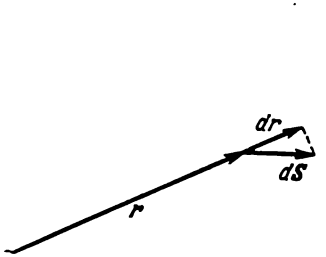


Fig. 90

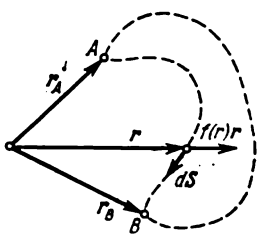


Fig. 91

elle reste la même quelque soit le trajet suivi de A à B (fig. 91). Il est évident que l'intégrale (36.7) s'annule pour $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_B$. Quand on connaît la fonction $f(r)$ et il est possible de calculer l'intégrale (36.7), alors, en accord avec (36.6), elle devient égale à la variation de l'énergie potentielle de deux particules, soit

$$-\int_A^B f(r)\,r\,dr = U_B - U_A. \tag{36.8}$$

Il s'ensuit que le système de deux particules possède une énergie potentielle. Si la force $f(r)\,r$ décroît à des grandes distances et pour $r \to \infty$ tend suffisamment vite vers zéro, on considère habituellement l'énergie potentielle à l'infini $U(\infty)$ comme nulle. Dans ce cas l'énergie potentielle de deux particules éloignées de r_1 d'après (36.8),

est

$$U(r_1) = \int_{r_1}^{\infty} f(r)\, r\, dr.$$

Pour des forces d'attraction $f < 0$ et, par suite, $U_B > U_A$ si $r_B > r_A$. L'énergie potentielle croît avec l'augmentation de la distance. Pour des forces de répulsion $f > 0$ et $U_B < U_A$, l'énergie potentielle diminue avec la distance.

Si à grande distance agissent des forces d'attraction et à des distances proches des forces de répulsion, comme cela est fréquent en physique, l'énergie potentielle de deux particules présente, suivant la distance qui les sépare, à peu près l'aspect montré à la figure 92. Dans le domaine $0 < r < r_0$ les particules se repoussent, $f > 0$, l'énergie potentielle diminue; pour $r = r_0$, la force d'interaction est nulle; en suite, pour $r > r_0$, $f < 0$ et l'énergie potentielle s'accroît. On s'en convainc sans peine si l'on tient compte de ce que

$$\frac{dU}{dr} = -f(r)\, r. \qquad (36.9)$$

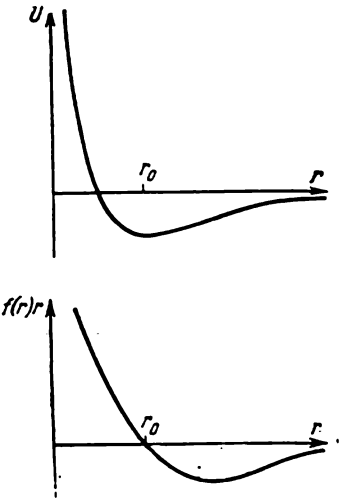


Fig. 92

Cette égalité importante découle de (36.8).

Le système composé de n particules en interaction possède une énergie potentielle déterminée si chaque paire de particules se conforme à la loi $f(r)\, r$. Choisissons une i-ème particule quelconque et désignons l'énergie potentielle de l'interaction avec la k-ème particule par $U_{ik}(|r_k - r_i|)$. L'énergie potentielle d'interaction de la i-ème particule avec toutes les autres sera égale à

$$U_i = \sum_{k \neq i}^{n} U_{ik}$$

(il faut sommer sur tous les $k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$). L'énergie potentielle de toutes les particules est certainement égale à

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \neq i}^{n} U_{ik}. \qquad (36.10)$$

Le demi devant le signe somme indique que l'énergie de chaque paire de particules entre dans la somme deux fois : $U_{ik} = U_{ki}$.

L'énergie potentielle de tout le système de particules en interaction U dépend de la position mutuelle des particules.

§ 37. MODIFICATION DE L'ÉNERGIE DU CORPS DANS UN CHAMP DE GRAVITATION. PRINCIPE DE CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

Supposons que le corps n'est soumis à aucune force excepté les forces de gravitation ; il est évident que l'accélération du corps sera alors toujours égale à g et dirigée vers le bas [1].

Le mouvement du corps sous l'action des seules forces de gravitation peut être appelé mouvement *libre* dans le champ de gravitation terrestre. L'énergie cinétique de ce corps ne varie qu'aux dépens des modifications de l'énergie potentielle des forces de pesanteur, et inversement, de façon que la somme des énergies cinétique et potentielle reste constante, ou bien : l'énergie mécanique reste *constante*.

L'expression mathématique du principe de conservation de l'énergie peut être obtenue sur la base de (36.5) si l'on pose la force extérieure égale à zéro, $F = 0$. En effet,

$$mgh + \frac{mv_f^2}{2} = \frac{mv_d^2}{2}, \tag{37.1}$$

où h est la variation de la hauteur qu'on peut désigner ainsi : $h = h_f - h_d$; alors (37.1) s'écrira sous la forme

$$mgh_f + \frac{mv_f^2}{2} = mgh_d + \frac{mv_d^2}{2} = E_0. \tag{37.2}$$

La formule (37.2) est l'expression mathématique du principe de conservation de l'énergie mécanique pour le mouvement du corps dans le champ de gravitation. La somme des énergies cinétique et potentielle reste *à tout moment* constante et égale à E_0. Notons que cette loi ne se vérifie que dans le cas où le corps se déplace sous l'action de la seule force de pesanteur. En présence d'autres forces (forces de résistance, etc.) l'énergie mécanique (la somme des énergies cinétique et potentielle), en général, ne reste pas constante.

Le principe de conservation de l'énergie mécanique d'un corps en mouvement dans le champ de gravitation était déjà connu à Galilée. Il a montré l'exactitude de cette loi dans ces expériences bien connues avec le pendule. Ces expériences sont aujourd'hui souvent refaites au cours des travaux pratiques de physique (pendule de Galilée).

Le pendule est constitué d'une bille suspendue à un fil (fig. 93, *a*). La bille s'écarte de côté en s'élevant à une certaine hauteur h ; au-dessus du pied de la

[1] g peut être considéré comme constant si la hauteur du corps au-dessus de l'horizon $h \ll R$, où R est le rayon de la Terre.

verticale marquant la position d'équilibre est enfoncé un clou C et, quand la bille est lâchée, le fil rencontre à un certain moment le clou C, le pendule continuant son mouvement en pivotant autour du point C. La hauteur d'élévation de la bille h au cours des écartements de la verticale est à peu près égale; en l'absence de frottements, cette hauteur serait absolument égale [1]. La bille du pendule s'arrêtera au moment où son énergie cinétique s'annulera; et elle se retrouvera à la hauteur h.

Il est intéressant de noter que si l'on abaisse le clou C ou si l'on augmente suffisamment la hauteur h on peut trouver la position pour laquelle le pendule ne montera plus à la hauteur h. Cela tient à ce que la bille est suspendue à un fil

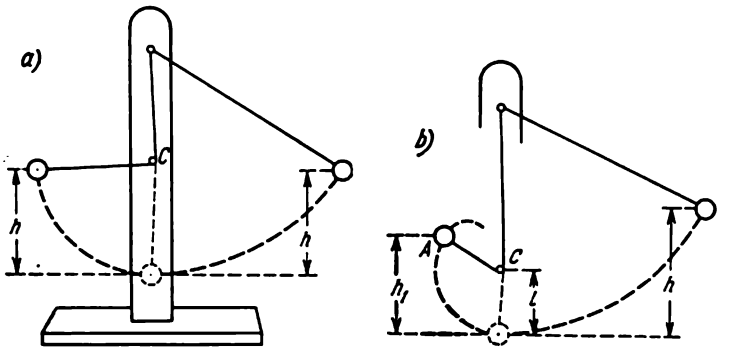


Fig. 93

flexible. Il est facile de se convaincre que pour $h > l$ où l est la hauteur du clou au-dessus de la position inférieure de la bille, la bille s'élèvera jusqu'à une hauteur h_1 inférieure à h.

Lorsque la bille se déplace suivant la partie ascendante de la courbe (fig. 93, *b*) jusqu'à son arrêt, il arrive un moment quand la tension du fil devient nulle. La bille quittera ensuite le cercle de rayon l et atteindra son point le plus élevé avec une certaine vitesse horizontale. Au point supérieur l'énergie cinétique ne sera pas nulle et, par suite, la hauteur d'élévation devra être inférieure à h.

Le travail de la force définit la grandeur de l'énergie transmise d'un corps à l'autre. L'énergie est l'unique mesure quantitative des différentes formes du mouvement de la matière. Le mouvement de la matière passe d'une forme à l'autre et ne disparaît jamais.

On a examiné en détail l'*énergie de la forme mécanique du mouvement* ou l'énergie mécanique qui a son tour peut prendre la forme cinétique et potentielle. L'*énergie cinétique* — l'énergie du corps mobile — dépend de la vitesse du mobile et de la masse du corps; l'*énergie potentielle* — l'énergie de la disposition mutuelle des corps ou des parties d'un même corps — dépend des coordonnées des corps, de la configuration du système.

[1] Il est évident que la tension du fil effectue pendant le mouvement de la bille un travail égal à zéro, on peut donc négliger son action.

Mais, comme on le sait déjà, au cas d'un choc mou l'énergie mécanique se transforme en chaleur (énergie thermique) ; cela signifie que l'énergie de la chaleur dégagée dans le choc est égale aux « pertes » de l'énergie mécanique.

Au cours de processus physiques et chimiques l'énergie passe d'un corps (ou d'un système de corps) à un autre corps (ou à un système de corps) : dans aucun cas elle ne disparaît et ne se crée de nouveau. Le mouvement de la matière peut changer de forme, mais *la grandeur de l'énergie dans toutes les modifications de forme du mouvement de la matière reste constante.* C'est le principe de conservation de l'énergie, l'un des principes fondamentaux de la Nature.

CHAPITRE V

FORCES DE FROTTEMENT

§ 38. DIFFÉRENTS GENRES DE FROTTEMENT

Dans tous les phénomènes mécaniques on se heurte aux forces de frottement qui sont presque toujours en relation avec des transformations de l'énergie d'une forme en une autre; habituellement, l'énergie mécanique, par suite de l'action des frottements se transforme en chaleur. Les forces de frottement ne diffèrent pas par leur action des autres forces: gravitation, pression des corps, déformation, etc., mais elles présentent des particularités qu'on éclaircira sur des exemples.

Soit un corps quelconque qui glisse sous la lancée sur un plan lisse horizontal, par exemple, une planchette sur de la glace. Au bout d'un certain temps, la planchette ralentit son mouvement et s'arrête. La vitesse de la planchette diminue et son accélération est de sens opposé à la vitesse. Quelles sont les forces qui impriment cette accélération à la planchette? Les forces de frottement contre la glace et contre l'air dirigées dans le sens opposé à la vitesse du mouvement.

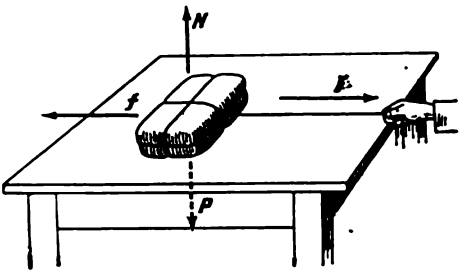


Fig. 94

Un autre exemple analogue: le corps gît sur la table (fig. 94). On commence par le tirer au moyen d'une ficelle parallèlement au plateau de la table, mais le corps ne cède pas. Sur le corps agit la force de tension de la ficelle F, et il reste au repos; donc une force est appliquée au corps émanant de la table, égale et opposée à F, c'est la force de frottement du corps contre la table (force f). La force de pesanteur P et la force de pression de la table N sont verticales, elles s'équilibrent mutuellement et n'influent pas sur la grandeur de l'accélération horizontale.

La nature physique des forces de frottement, signalées dans les premier et second exemples, est différente: dans le premier cas la force de frottement apparaît au cours du mouvement du corps ou, plus précisément, par suite du mouvement du corps; dans le second,

la force de frottement se manifeste au repos par suite de l'action d'une force extérieure. La force de frottement se déclenchant au repos s'appelle en conséquence *force de frottement de repos* ou frottement *statique*.

Dans le mouvement de la planchette la force de frottement est dirigée à l'encontre de la vitesse du mouvement, son action étant liée à la transformation de l'énergie cinétique en chaleur; comme la vitesse définit la direction du déplacement du corps, le déplacement et la force sont de direction opposée et, par suite, le travail de la force de frottement est *négatif*. Donc l'énergie émane du corps sollicité par la force de frottement. L'énergie cinétique diminue toujours quand le corps n'est soumis qu'à la force de frottement.

En effet, pour le corps de masse m se déplaçant à la vitesse v d'après la seconde loi de la dynamique

$$m\frac{dv}{dt} = -f_f.$$

où f_f est la force de frottement; multipliant par dS, on obtient comme dans la formule (32.4):

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -f_f\,dS. \qquad (38.1)$$

ou: la diminution de l'énergie cinétique est égale au travail de la force de frottement, ce qu'on aurait pu écrire aussitôt en s'appuyant sur le principe de conservation de l'énergie.

L'étude du corps mobile et des corps qui l'environnent montre que l'énergie cinétique se transforme en l'énergie thermique.

Le frottement de repos (statique) ne s'accompagne pas de mouvement de corps, et, par suite, il n'y a pas de travail aussi que de transformation d'une énergie en une autre. La grandeur de la force de frottement en cas de mouvement dépend des propriétés et de la forme du corps mobile, des propriétés du milieu et des corps environnants et, en outre, de la vitesse du mouvement.

On distingue deux genres de frottement: 1) frottement sur des surfaces sèches des solides et 2) frottement sur un milieu visqueux liquide ou gazeux. Le premier genre est appelé frottement à *sec* et le second, *frottement visqueux*.

Le frottement à sec peut engendrer une force de frottement de repos, le frottement visqueux ne peut s'accompagner de force de frottement statique. Dans le mouvement des corps en contact par des surfaces lubrifiées, comme dans le mouvement au sein d'un milieu liquide visqueux, il apparaît une force de frottement, ne se manifestant qu'en état de mouvement. Au repos la force de frottement devient en l'occurrence nulle; c'est ainsi, par exemple, qu'un corps flottant dans un liquide se met en mouvement sous l'action de toute force horizontale (aussi petite que l'on veut); on peut le confirmer facilement par l'expérience (fig. 95).

Si l'on observe le mouvement d'un corps flottant dans le liquide sous l'action d'une force horizontale constante (voir fig. 95), on constate rapidement qu'au bout d'un certain temps le mouvement devient presque uniforme. Cela signifie qu'au cours du mouvement apparaît une force de frottement (force de résistance) qui croît avec la vitesse jusqu'à une grandeur égale à la force appliquée, et, par suite, équilibre cette force.

Les forces de frottement visqueux (forces de résistance) ne se manifestent qu'au cours du mouvement et leur présence est toujours reliée à la transformation de l'énergie mécanique en chaleur.

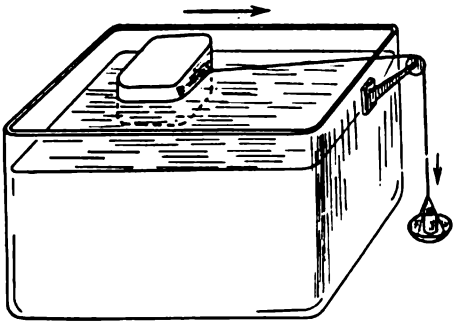


Fig. 95

§ 39. FROTTEMENT VISQUEUX

Les forces de frottement visqueux d'un corps mobile dans un milieu (ou les forces de résistance du milieu) dépendent de la forme du corps, de la vitesse du mouvement et de certaines propriétés physiques du milieu, à savoir de la viscosité et de la densité. Plus la viscosité du milieu est grande, plus importante est la force de frottement, toutes les autres conditions restant les mêmes.

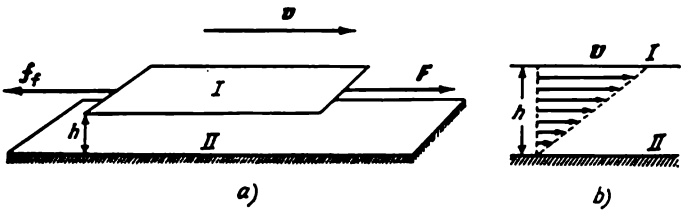


Fig. 96

La viscosité du milieu se détermine par des expériences au cours desquelles on mesure la force de frottement de certains corps dans des conditions déterminées. C'est encore Newton qui établit par expériences la loi fondamentale du frottement dans un milieu de deux surfaces parallèles très rapprochées glissant l'une sur l'autre et séparées par un liquide déterminé ou un gaz (fig. 96, *a*). Si la surface *I* d'aire *S* se déplace uniformément sous l'action d'une force extérieure F à la vitesse v par rapport à la surface au repos *II* parallèle à la première, la force de frottement f_f appliquée à la surface *I* est égale et opposée à la force F.

Sur la base des mesures de la vitesse v et de la force F, Newton détermina la loi suivante :

$$f_t = \mu S \frac{v}{h}, \tag{39.1}$$

où h est la distance entre les surfaces et μ un coefficient constant (*coefficient de viscosité* qui ne dépend que des propriétés du milieu remplissant l'espace entre les surfaces. Cette loi se vérifie si $h \ll \sqrt{S}$, c'est-à-dire si la distance entre les surfaces qui glissent est très petite devant leurs dimensions linéaires. Des études détaillées montrent que les particules du liquide ou du gaz attenant à la première surface se déplacent à la vitesse v (sont entraînées par la surface), tandis que les particules attenant à la surface II sont au repos, la vitesse des particules du milieu croissant linéairement (proportionnellement) à mesure que l'on s'éloigne de la surface II (fig. 96, *b*).

Supposons que le liquide intercalaire est divisé en minces couches parallèles aux surfaces. Chaque couche se déplace de façon uniforme, la couche supérieure entraînant vers l'avant la couche sous-jacente avec la force f_t, la couche inférieure entraînant vers l'arrière la couche attenante supérieure avec la force f_t. Donc la force de frottement f_t est transmise d'une couche du liquide à l'autre, d'une surface à l'autre. A chaque couche sont appliquées deux forces égales et opposées, et, partant, le mouvement est rendu uniforme.

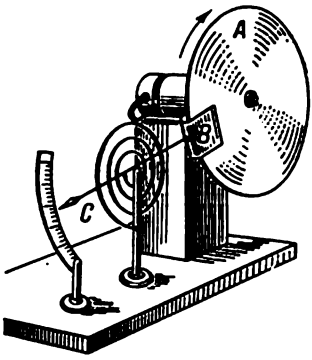


Fig. 97

Le coefficient de viscosité du milieu μ, dont la dimension dans le système SI est kg/m · s et dans le système CGS, g/cm · s. se détermine expérimentalement.

Pour l'air le coefficient μ peut être déterminé à l'aide de l'appareil montré sur la figure 97. Le disque A tourne à une vitesse connue, tandis que les plaques B enveloppant le disque sont fixées à un ressort spiral :la force de frottement agissant sur les plaques est évaluée d'après la dérivation de l'aiguille C ; connaissant l'aire des plaques B, la distance les séparant du disque, la vitesse de rotation du disque et ses dimensions, on peut déterminer le coefficient μ. En variant la distance entre le disque et les plaques, ainsi que la vitesse du disque, on peut vérifier la relation trouvée par Newton pour l'air.

Notons qu'on ne peut déterminer de cette façon le coefficient de viscosité du milieu que dans le cas ou les vitesses de toutes les particules du milieu restent constamment parallèles aux surfaces. Dans la réalité cette condition ne sera pas respectée pour de grandes vitesses ; le mouvement des particules aux grandes vitesses ne sera plus *stratifié* ou *laminaire* comme c'est le cas pour des vitesses faibles. Aussi la formule de Newton (39.1) ne sera-t-elle vérifiée que jusqu'à une certaine vitesse de rotation du disque bien déterminée.

Les coefficients de viscosité des liquides et des gaz se déterminent également d'après la vitesse de leur écoulement à travers un tube de longueur et de

diamètre connus. On a trouvé que la quantité de liquide (ou de gaz) traversant el tube pendant un temps déterminé (débit Q) pour une différence de pressions connue est en raison inverse du coefficient de viscosité (pour plus de détail, voir § 111).

Valeur de μ pour certaines substances, en g/cm·s			
Air	0,00018	pous	16 °C
Eau	0,0114	»	15 °C
Glycérine	13,93	»	18 °C
Essence	0,0053	»	18 °C
Huile minérale	0,833	»	50 °C

Il existe également des appareils au moyen desquels la viscosité d'un milieu est déterminée d'après la vitesse d'une petite sphère mobile dans le milieu. Pour une petite vitesse de la sphère mobile le calcul théorique fournit la formule suivante de la force de frottement:

$$f_f = 6\pi\mu\, av, \tag{39.2}$$

où a est le rayon de la sphère. Cette formule est confirmée par l'expérience. Il est toutefois plus commode et plus simple d'évaluer non pas la force de frottement, mais la durée de chute de la sphère dans le milieu visqueux.

§ 40. CHUTE DE LA SPHÈRE DANS UN MILIEU VISQUEUX

Sur la sphère tombant dans un milieu visqueux suivant la verticale agissent trois forces (fig. 98) : la force de pesanteur ρVg, la force de poussée hydrostatique $\rho_l Vg$ et la force de frottement $f_f = 6\pi\mu av$, où V désigne le volume de la sphère, tandis que ρ et ρ_l la densité de la matière de la sphère et du liquide.

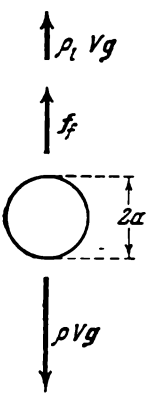


Fig. 98

Dans ce cas en projection sur la verticale on a

$$m\frac{dv}{dt} = (\rho - \rho_l)\, Vg - 6\pi\mu av, \tag{40.1}$$

ou considérant que le volume de la sphère est $V = 4/3\pi a^3$ et sa masse $m = \rho V$, il vient

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\rho - \rho_l}{\rho} g - \frac{9}{2a^2}\frac{\mu}{\rho} v. \tag{40.2}$$

L'accélération diminue avec l'augmentation de la vitesse v. A l'instant initial $v = 0$, ensuite la vitesse commence à croître, l'accélération diminuant dans le temps l'accroissement de la vitesse est freiné, mais elle continue toujours à augmenter. Cependant de l'équation (40.2), il découle que la vitesse ne peut dépasser la grandeur

$$v_0 = \frac{\rho - \rho_l}{\mu}\frac{2a^2 g}{9}. \tag{40.3}$$

Pour $v = v_0$ on a $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, la vitesse ne peut plus croître davantage.

L'équation (40.2) peut être récrite ainsi :

$$\beta \frac{dv}{dt} = v_0 - v, \quad \text{où} \quad \beta = \frac{2a^2\rho}{9\mu}, \tag{40.4}$$

d'où

$$\beta \frac{dv}{v - v_0} = -dt,$$

ou, en intégrant, il vient

$$\beta \ln (v - v_0) = -t + C, \quad v - v_0 = A_0 e^{-t/\beta},$$

où A_0 est une grandeur constante. Si pour $t = 0$ la vitesse $v = 0$, $A_0 = -v_0$ et

$$v = v_0 (1 - e^{-t/\beta}). \tag{40.5}$$

La dépendance de v de t/β est illustrée à la figure 99. Avec le temps t la grandeur de la vitesse v s'approche asymptotiquement de la valeur v_0. Le mouvement de la sphère est complexe : il n'est accéléré

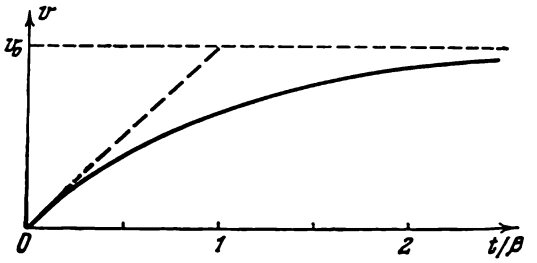


Fig. 99

qu'à l'instant initial, pour $t \ll \beta$, ensuite l'accélération diminue progressivement et à la fin, pour $t \gg \beta$, le mouvement devient presque uniforme. Au bout de quel laps de temps le mouvement de la sphère deviendra-t-il uniforme et quelle sera dans ce cas la trajectoire parcourue par la sphère? Tout cela se détermine d'après la formule (40.5). Plus μ est grand et plus petit est le rayon de la sphère a, plus rapidement le mouvement devient uniforme.

Le mouvement du corps sur le secteur du départ, quand la vitesse v est petite, est uniformément accéléré, l'accélération étant à peu près celle de la force de pesanteur. On voit sur le graphique (voir fig. 99) que la vitesse croît au début du mouvement presque proportionnellement au temps.

Prenons un exemple : chute d'une sphère d'acier de 25 cm de rayon dans l'air et celle d'une sphère d'acier de 0,1 cm de rayon dans de la glycérine. Dans le premier cas la grandeur $\beta = 6{,}08 \cdot 10^4$ s ou environ 16 h, car la densité de l'acier $\rho = 7{,}88$ g/cm^3 et le coefficient de viscosité de l'air $\mu = 0{,}00018$ g/cm·s. Dans le second cas $\beta \approx 1{,}26 \cdot 10^{-3}$ s car μ pour la glycérine est 13,93 g/cm·s.

La chute de la sphère d'acier dans l'air pendant quelques premières secondes $t \ll 6 \cdot 10^4$ s, sera avec une grande précision, un mouvement *uniformément accéléré* [1], d'accélération g. La chute de la sphère dans l'air se réalisera suivant les mêmes lois que dans le vide, les forces de frottement pouvant être négligées. C'est la situation observée dans les célèbres expériences de Galilée par lesquelles il démontra que la chute des corps dans le vide s'effectue avec une accélération constante et qui servirent à la déduction de la loi de l'inertie.

Le mouvement (la chute) d'une petite sphère dans de la glycérine devient au bout de quelques mille secondes presque *uniforme*, la sphère tombe sans accélération. La vitesse du mouvement suivant la formule (40.3) sera

$$v_0 = \frac{\rho - \rho_1}{9\mu} 2a^2 g = \frac{\rho - \rho_1}{\rho} \beta g = \frac{7{,}88 - 1}{7{,}88} \cdot 1{,}26 \cdot 10^{-3} \cdot 981 \approx 1{,}06 \text{ cm/s}.$$

C'est un mouvement uniforme, la force de pesanteur est complètement équilibrée par la force de frottement et le mouvement se poursuit par inertie. L'observation de ce mouvement en ignorant les forces de viscosité peut conduire à l'erreur consistant à considérer la vitesse proportionnelle à la force appliquée, conclusion à laquelle avait abouti Aristote.

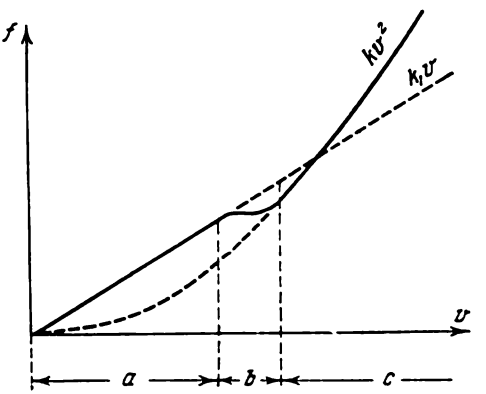


Fig. 100

Remarque. Si la force de résistance n'est pas proportionnelle à la vitesse, mais en dépend de façon plus complexe, tout en augmentant constamment avec l'accroissement de cette dernière, alors la chute des corps dans un tel milieu tendra dans le temps à devenir également un mouvement uniforme. Il en sera ainsi, par exemple, pour un parachutiste tombant avec le parachute replié ou ouvert. La différence ne consistant que dans le fait qu'avec le parachute ouvert la chute devient uniforme à la vitesse de 5-6 m/s et avec le parachute replié (saut à ouverture retardée), le mouvement uniforme ne s'établit que pour une vitesse beaucoup plus grande, de l'ordre de 60 m/s.

La dépendance de la force de résistance (ou de la force de frottement) de la vitesse varie avec l'accroissement de la vitesse. Pour des grandes vitesses l'allure de l'écoulement se modifie et la force de résistance croît de façon non proportionnelle à la vitesse de mouvement. Dans la plupart des cas, à partir d'une certaine valeur de la vitesse, la force de résistance augmente proportionnellement au

[1] Il faut signaler que pour la sphère choisie, quand la vitesse dépasse 10 m/s, la loi établissant la dépendance du frottement de la vitesse n'est plus tout à fait juste. Toutefois un calcul plus précis n'altère pas le résultat durant les premières trois secondes.

carré de la vitesse. La courbe traduisant la dépendance de la force de résistance de la sphère f de la vitesse v a l'aspect montré à la figure 100. Dans la zone de petites valeurs de la vitesse (zone a) la force de résistance f croît proportionnellement à la vitesse du mouvement, comme on l'a mentionné précédemment, suivant la loi $f_f = k_1 v$; dans la zone des grandes vitesses (zone c), la force de frottement croît proportionnellement au carré de la vitesse en obéissant à la loi $f_f = kv^2$. Au sein d'une certaine zone (zone b) c'est la transition d'une loi à l'autre.

Cette variation radicale de la loi de dépendance des forces de frottement est due à la modification de l'allure de l'écoulement : dans la zone a on a un écoulement régulier sur tout le corps sans que le courant décolle du corps (plus précisément avec un faible décrochage du courant), dans la zone c l'écoulement s'effectue avec un décollement notable du courant, un rôle crucial revenant au tourbillonnement se formant dans la zone du décollement (voir en détail le § 112).

§ 41. FROTTEMENT À SEC

Comme il a déjà été mentionné (voir § 38), une force horizontale suffisamment petite appliquée au corps gisant sur une surface horizontale lisse ne le déplacera pas, car il apparaît une force de frottement de repos f, égale et opposée à la force appliquée F (voir fig. 94). Comment définit-on la force de frottement de repos? Elle est déterminée par la force appliquée F; en faisant varier la tension de la ficelle, on modifie la force de frottement. En augmentant la tension, on fait croître par la même occasion la force de frottement; en changeant la direction de la force F, on modifie la direction de la force de frottement.

Mais en augmentant progressivement la force appliquée F on provoque le mouvement. Des expériences simples montrent que le corps acquiert une accélération si la force F dépasse une valeur déterminée f_0. La force de frottement de repos peut donc prendre toutes les valeurs de 0 à f_0, ou la force de frottement de repos a une valeur maximale f_0. Si $F > f_0$, le corps possède une accélération et est capable de se mouvoir; si $F < f_0$, l'accélération du corps est nulle et le corps est au repos, la force de frottement est égale à F.

Comment détermine-t-on la valeur absolue de la force de frottement de repos maximale? En fonction des propriétés physiques des corps dont les surfaces sont en contact, par l'état des surfaces (les surfaces rugueuses opposent une résistance plus grande que les surfaces lisses, la force de frottement de repos maximale croissant en conséquence, et d'après la force de pression serrant un corps contre l'autre.

Soit un coffret posé sur la table. En équilibre, la pression du coffret sur la table N est égale à la force de pesanteur du coffret P. L'expérience permet d'affirmer que la force de frottement maximale f_0 est

$$f_0 = \mu N, \tag{41.1}$$

où μ est un coefficient sans dimension, le *coefficient de la force de frottement de repos* ne dépendant que des propriétés des surfaces en

contact. (Habituellement on a en vue le coefficient de la « force de frottement de repos maximale ».) L'expression (41.1) porte le nom de *loi d'Amonton* qui l'établit expérimentalement en 1699.

La grandeur du coefficient μ se détermine par diverses expériences, par exemple, dans des expériences de glissement du corps sur un plan incliné. Dans ces expériences on détermine l'angle de pente du plan déclenchant le glissement du corps sur le plan. Supposons que sur le plan gît un corps maintenu par la force de frottement (fig. 101). Il est évident que la force de frottement f empêchant le corps de glisser est égale à

$$f = P \sin \alpha. \quad (41.2)$$

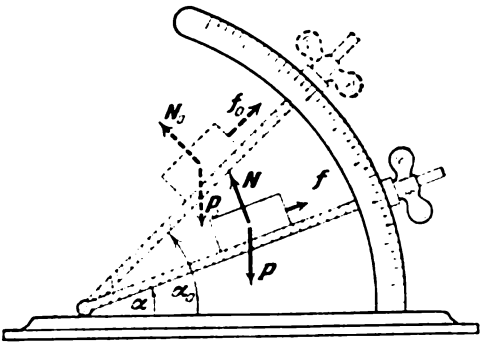


Fig. 101

Maintenant augmentons l'angle α et, pour une de ses valeurs α_0 le corps commence à glisser. La somme des forces P_0, N_0 et f_0 est nulle. L'angle entre P_0 et N_0 est égal à $180° - \alpha_0$, donc

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{f_0}{N_0}. \quad (41.3)$$

Souvenons-nous que $f_0 = \mu N_0$ et il vient : $\operatorname{tg} \alpha_0 = \mu$, le coefficient de la force de frottement de repos maximale égal à la tangente de l'angle pour lequel commence le glissement du corps sur le plan incliné.

Les coefficients de frottement pour quelques surfaces en contact sèches et lisses sont :

Acier sur acier	0,15
Métal sur chêne (le long de la fibre)	0,62
Cuir sur chêne	0,61
Brique sur brique	0,5 à 0,73

On n'a pas encore établi une théorie satisfaisante des lois régissant le frottement à sec des surfaces. En schématisant le phénomène on peut s'en faire une représentation assez grossière. Sur la figure 102 on a donné en profil, à une grande échelle, les surfaces de contact de deux corps solides. La surface d'un corps n'est jamais une surface parfaitement lisse, elle présente toujours des irrégularités, des saillies se succédant de façon plus ou moins régulière et dont les dimensions et la forme sont dans certaines limites diverses. Au contact de deux corps, ces saillies et irrégularités se déforment plus ou moins, la déformation dépendant de la pression locale (et, évidemment, de la pression moyenne suivant la surface de contact) et, par suite, pouvant être de nature élastique ou inélastique.

Le rapprochement des corps, la pénétration des saillies d'un corps dans les creux de l'autre, dépendra évidemment de la force de pression serrant les deux corps.

Au repos, quand apparaît le frottement de repos, pour $F < f_0$, les composantes tangentielles horizontales des forces se créant entre les saillies des deux corps équilibrent la force appliquée et, partant, « engendrent » la force de frottement. On a représenté schématiquement sur la figure 102 le mode de formation

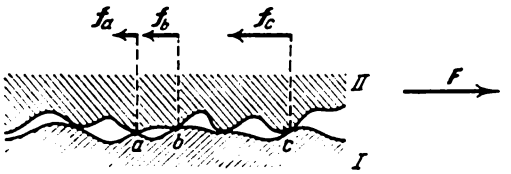


Fig. 102

des forces de frottement de repos : si au corps II est appliquée une force, dans les zones attenant aux points a, b, c apparaissent des forces tangentielles f_a, f_b, f_c qui font équilibre à la force extérieure. (Pour plus de clarté on a représenté les forces f_a, f_b, f_c en haut du dessin.)

Au cours du mouvement, pour $F > f_0$, les irrégularités des deux corps s'engrènent également, mais en outre s'entrechoquent. Les forces développées dans ces chocs donnent en se sommant la force de frottement de glissement engendrée par le mouvement de deux surfaces de corps solides en contact. Les forces engendrées par les chocs des saillies produiront des vibrations de directions variées qui se propageront dans les corps en frottement. Il semble que dans ce cas un rôle important revient également aux déformations inélastiques dues aux chocs des saillies et des irrégularités des surfaces en contact.

L'image ainsi donnée est très grossière et ne décrit qu'approximativement la situation réelle. Mais on peut supposer que les disparités chaotiques des molécules à la surface des corps jouent un rôle identique aux saillies et aux creux de la surface. Les forces tangentielles apparaissant au contact de deux surfaces parfaitement lisses mais pourvues des disparités moléculaires joueront le même rôle que les forces d'interaction des saillies.

§ 42. FORCE DE FROTTEMENT DE GLISSEMENT

Soit un corps gisant sur une surface horizontale. Quand la force horizontale appliquée au corps dépasse la force de frottement de repos ($F > \mu N$), l'accélération du corps devient différente de zéro et le corps se met à glisser. La vitesse du corps augmente alors. Comment variera la force de frottement des surfaces sèches avec l'accroissement de la vitesse de glissement?

En général, la force de frottement au cours du glissement commence d'abord par baisser, ensuite elle croît avec l'élévation de la vitesse. Dans certains cas la dépendance de la force de frottement de la vitesse est montrée sur la figure 103, *a*. Pour une vitesse $v = 0$, c'est-à-dire au repos, la force de frottement peut prendre toute valeur, de $-f_0$ à f_0. Ensuite, avec l'accroissement de la vitesse, la force de frottement demeure constante au cours d'un certain intervalle de variation de la vitesse, puis elle baisse, atteint un minimum,

après quoi elle recommence à monter. Pour des surfaces en contact différentes la nature de la dépendance du frottement de glissement de la vitesse n'est pas la même.

Pour des vitesses de glissement suffisamment petites, on peut considérer le frottement entre des surfaces métalliques sèches comme constant, indépendant de la vitesse et égal au frottement de repos. Comme le montre l'expérience, cette assertion se vérifie avec un degré de précision suffisante. Dans ces cas le graphique de la variation du frottement en fonction de la vitesse prend l'aspect montré à la figure 103, *b*; pour la vitesse $v = 0$, la force de frottement peut prendre toute valeur, de $-f_0$ à f_0.

Cette loi établissant la dépendance du frottement de glissement de la vitesse porte le nom de *loi de Coulomb*. La loi de Coulomb

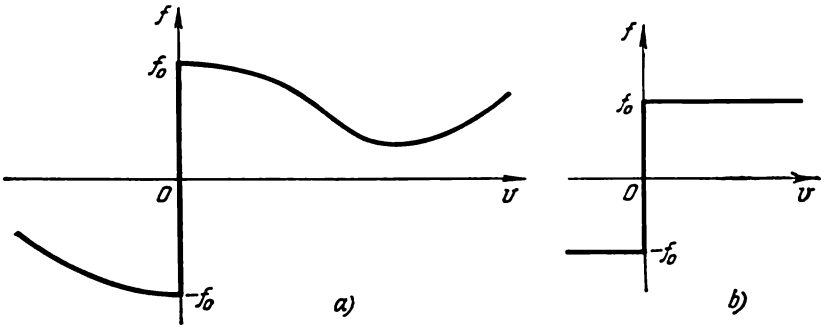


Fig. 103

est aussi applicable dans les cas de frottement des surfaces métalliques sur une surface en bois homogène, en cuir, etc. Dans un éventail limité de variation de la vitesse, cette loi traduit de façon approchée le comportement de nombreuses surfaces frottantes.

La grandeur du frottement de repos f_0 comme celle du frottement de glissement dépendent de la force appuyant le corps contre la surface de glissement. Habituellement, le frottement de glissement de même que de repos est proportionnel à la force de pression normale.

Remarquons que les données sur les frottements de glissement sont très approximatives, et on peut souvent noter des cas où les résultats de diverses mesures se contredisent. Cela s'explique non seulement par des différences de traitement mécanique des surfaces en frottement, mais également par le degré de leur netteté; diverses sortes d'encrassement exercent une influence sur la grandeur du frottement de glissement et un rôle important est aussi dévolu à la nature de l'encrassement. Pour des surfaces humectées ou encrassées d'infimes taches d'huile, etc. la dépendance du frottement de la vitesse est tout autre et les valeurs de f_0 sont différentes de celles des surfaces nettoyées de façon spéciale.

Le frottement de deux surfaces lubrifiées (avec de la graisse ou de l'eau, etc.) dans la plupart des cas, si elles sont bien graissées, ressemble à un frottement visqueux. En effet, les surfaces de frottement lubrifiées sont séparées par une couche continue de liquide. Les particules du lubrifiant adhèrent au corps et, partant, peuvent être considérées comme immobiles par rapport au corps; la vitesse du mouvement du liquide varie suivant la loi linéaire dans toute la couche, de sorte que le frottement se détermine dans ce cas en fonction du coefficient de viscosité μ du lubrifiant, de l'aire des surfaces en contact et de l'épaisseur de la couche de lubrifiant. L'épaisseur de la couche lubrifiante dépend aussi bien de la nature du lubrifiant que de la pression mutuelle des corps frottants.

La théorie hydrodynamique du graissage fut mise au point par des études théoriques et expérimentales, devenues classiques, de N. P. Pétrov [1].

Un rôle important est joué dans la technique par le *frottement de roulement* et le *frottement d'adhésion en roulement* aussi bien sans glissement qu'avec glissement. Cette question sera traitée aux §§ 73 et 75 après avoir fait connaissance avec la dynamique des corps en rotation.

Il faut noter que les frottements statiques, et quelquefois les frottements de glissement, jouent un rôle fondamental dans la transmissiondu mouvement d'un corps à l'autre. En effet, l'homme se déplace (marche) d'un endroit à un autre parce qu'il existe des forces de frottement apparaissant au contact des semelles avec le sol. Les voyageurs se déplaçant dans la voiture d'un train, les valises gisant sur le plancher ou les planches à bagage acquièrent une accélération au cours du mouvement du train sous l'action du frottement statique apparaissant entre la voiture, les voyageurs et leurs bagages. Il aurait, peut-être mieux valu appeler ce frottement statique *frottement d'adhésion* (ou adhérence). En technique on utilise souvent pour le transport d'énergie d'une machine à l'autre la transmission à friction, par exemple, la transmission par courroie d'une poulie à l'autre; cette transmission n'est possible que grâce aux forces de frottement d'adhésion entre la courroie et la poulie; un autre exemple est fourni par l'accouplement à friction entre le moteur et l'arbre d'entraînement dans une automobile qu'on a représenté schématiquement sur la figure 104.

En général il est très difficile de s'imaginer une transmission de mouvement et d'efforts d'un corps à l'autre en l'absence de frottement. De nombreux modes courants de transport deviendraient impossibles sans frottement.

La solution de problèmes où un rôle important est joué par le frottement statique et le frottement de glissement se heurte au début

[1] N. P. Pétrov. Théorie hydrodynamique du graissage. Recueil des travaux, Ed. de l'Acad. des sciences de l'U.R.S.S., 1948 (en russe).

à des difficultés. Examinons donc en détail un problème type de ce genre.

Sur une planche reposant sur la plate-forme horizontale d'une table on pose une charge de masse m_1 (fig. 105). La planche est sollicitée par une force horizontale F. Déterminer les accélérations de la

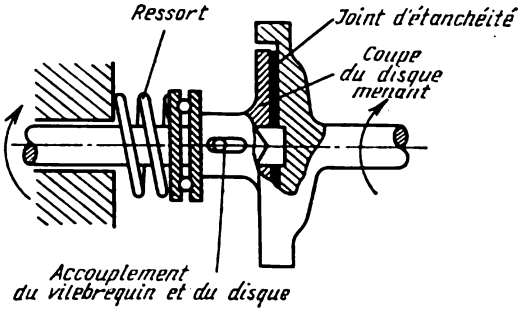


Fig. 104

planche et de la charge si l'on connaît : m_1 et m_2, respectivement les masses de la charge et de la planche, μ_1 le coefficient de frottement entre la planche et la charge et μ_2 le coefficient de frottement entre la planche et la table. On admet que la loi de Coulomb s'applique à ce cas. La réponse au problème dépendra des valeurs de F. Examinons d'abord les petites valeurs de F en passant progressivement aux valeurs de plus en plus grandes. Il est évident que pour une petite force les accélérations de la charge et de la planche seront nulles, la planche étant au repos. Cette situation s'observe pour

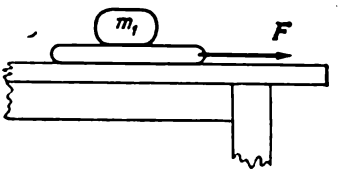


Fig. 105

$$0 \leqslant F \leqslant \mu_2 (m_1 + m_2) g = F_0,$$

quand la force appliquée F est inférieure au frottement statique maximal de la planche avec la charge.

Pour un F quelque peu supérieur à F_0 la planche avec la charge se met en mouvement et acquiert une accélération

$$a = \frac{F - F_0}{m_1 + m_2}. \tag{42.1}$$

Dans ce cas le frottement statique entre la planche et la charge est égal à $m_1 a$. Avec l'accroissement de F (et donc de l'accélération a) le frottement statique entre la planche et la charge croît. Mais cette situation se maintiendra tant que $m_1 a < \mu_1 m_1 g$, ou $a < \mu_1 g$, c'est-à-dire jusqu'à ce que le frottement atteigne sa valeur maximale ; cela se produira pour $F = F_1$. Si $F > F_1$ la charge se mettra à glisser sur la planche. La grandeur F_1 s'obtient de la relation $a = \mu_1 g$.

Portant cette condition dans (42.1) il vient

$$F_1 = F_0 + (m_1 + m_2)\,\mu_1 g = (\mu_1 + \mu_2)\,(m_1 + m_2)\,g.$$

Pour $F > F_1$ la charge glissera au bout d'un certain temps de la planche car l'accélération de la planche deviendra supérieure à $\mu_1 g$

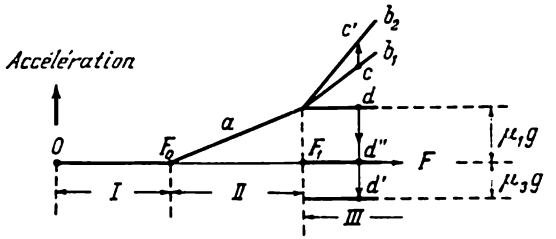


Fig. 106

tandis que l'accélération de la charge restera égale à $\mu_1 g$. L'accélération de la planche est dans ce cas égale à

$$b_1 = \frac{F - F_0 - \mu_1 m_1 g}{m_2};$$

elle peut également être écrite sous la forme:

$$b_1 = \frac{F - F_1 + \mu_1 m_2 g}{m_2} = \frac{F - F_1}{m_2} + \mu_1 g.$$

Cette situation pour une force F donnée ne durera qu'un certain temps, tant que la charge glisse en arrière sur la planche. Aussitôt qu'elle aura glissé de la planche, son accélération se modifiera par saut et deviendra égale à

$$b_2 = \frac{F - \mu_2 m_2 g}{m_2} > b_1,$$

puisque

$$b_1 = \frac{F - \mu_2 m_2 g - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_1 g}{m_2}.$$

On ne connaît pas quelle est l'accélération de la charge au cours de son mouvement sur la table; cela dépend de la nature de ce mouvement: elle peut glisser ou culbuter. Si elle glisse et son coefficient de frottement avec la table est μ_3, son accélération jusqu'à son arrêt aura pour grandeur $-\mu_3 m_1 g$ et sera dirigée en arrière.

En guise de conclusion on peut établir le graphique de la dépendance des accélérations de l'intensité de la force (fig. 106). Dans le domaine *I* c'est le repos, dans le domaine *II* les accélérations de la charge et de la planche sont les mêmes et croissent proportionnellement à $(F - F_0)$, dans le domaine *III* la planche et la charge ont des accélérations différentes: d'abord l'accélération b_1, ensuite b_2, un saut $(c \to c')$; au commencement l'accélération de la charge est égale à $\mu_1 g$, puis elle peut devenir égale à $\mu_3 g$ et, enfin, s'annuler $(d \to d' \to d'')$.

CHAPITRE VI

MOUVEMENT RELATIF

§ 43. SYSTÈMES D'AXES ABSOLUS (GALILÉENS)

Jusqu'à présent on a admis que le système de référence, par rapport auquel on étudiait le mouvement, était toujours relié à la Terre qui à son tour était supposée demeurer au repos. En réalité, comme nous le savons bien, la Terre effectue des révolutions annuelles autour du Soleil tout en tournant autour de son propre axe polaire. Donc, en admettant la Terre au repos, on commettait une certaine erreur qui sera précisée dans ce chapitre.

L'énoncé des lois de la dynamique n'est le même que pour des systèmes d'axes absolus, ou galiléens. En effet, soient deux systèmes

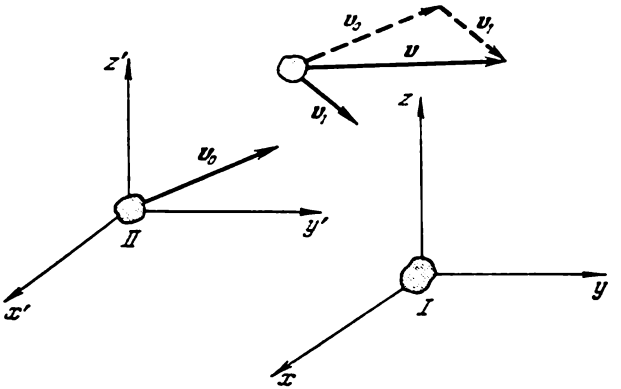


Fig. 107

de référence, l'un (I) étant considéré comme immobile et l'autre (II), en mouvement par rapport au premier à une *vitesse constante* v_0 (fig. 107). Tous les corps au repos par rapport au second système se déplaceront alors avec la vitesse v_0 par rapport au premier, quant aux corps animés, dans le second référentiel de la vitesse v_1, ils se déplaceront évidemment à la vitesse $v = v_1 + v_0$ dans le référentiel au repos. Puisque la vitesse v_0 est constante, l'accélération du corps dans le référentiel mobile est égale à l'accélération dans le référentiel au repos et inversement. L'accélération sera *la même* dans tous systèmes de référence en mouvement uniforme et rectiligne l'un par rapport à l'autre.

Les forces agissant sur les corps ainsi que leurs masses, comme le montre l'expérience, sont indépendantes du référentiel par rapport auquel on définit le mouvement du corps considéré. En effet, les forces dépendent des distances entre les corps, de leur vitesse relative et du temps. Toutes ces grandeurs ne varient pas quand on passe à un nouveau système des coordonnées en mouvement uniforme et rectiligne.

Si tous les référentiels choisis effectuent un mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre et si, en outre, il est établi que dans l'un d'eux les lois de la dynamique sont vérifiées, alors l'énoncé de la première et de la seconde lois de la dynamique, dans l'un quelconque de ces référentiels, reste valable pour tous les autres référentiels. Tous ces référentiels sont dits *à axes absolus* ou galiléens; et c'est seulement dans ces référentiels que la loi d'inertie de Galilée est vérifiée. Cette assertion est dite *principe de relativité de Galilée.*

Les référentiels en mouvement accéléré par rapport au référentiel à axes absolus sont dits *non galiléens.* Mais lequel des référentiels connus faut-il considérer comme galiléen? Il est difficile de donner une réponse générale à cette question. Toutefois, dans l'étude des mouvements dont les vitesses sont petites par rapport à celle de la lumière, on peut choisir en qualité de référentiel galiléen le référentiel constamment relié au centre des masses (voir § 55) des corps composant le système solaire dont les axes possèdent des directions invariables relativement aux étoiles [1] « immobiles ». Les études des mouvements sur Terre ainsi que les observations astronomiques justifient l'adoption de cette hypothèse.

Quant à la Terre et aux référentiels reliés à elle, ils ne peuvent être pris pour absolus qu'avec une certaine approximation en commettant une certaine erreur. On précisera l'erreur réalisée ainsi au § 48.

En théorie de la relativité ce problème est résolu de façon quelque peu différente. D'abord on suppose que pour la description du mouvement tous les systèmes absolus sont *équivalents.* Parmi les référentiels en mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre, il est impossible de dégager un référentiel particulier. Et, ensuite, que les lois de la dynamique (et, en général, toutes les lois de la Nature) se présentent sous une même forme (sont invariantes) dans tout référentiel galiléen.

Le principe de relativité de Galilée ne fait que constater que les lois de Newton sont invariables par rapport à des référentiels galiléens; le principe de relativité d'Einstein étend cette affirmation aux lois de l'électrodynamique et aux autres lois de la physique (voir ch. XVII).

[1] Les astronomes appellent étoiles « immobiles » un ensemble d'étoiles (de la sphère fixe) conservant (avec un certain degré de précision) une position invariable sur la voûte céleste.

§ 44. MOUVEMENT DU CORPS DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN. FORCES D'INERTIE

Si l'on étudie le mouvement du corps par rapport à un référentiel animé d'un mouvement accéléré, la première et la seconde lois de la dynamique ne seront plus alors utilisables en leur forme habituelle.

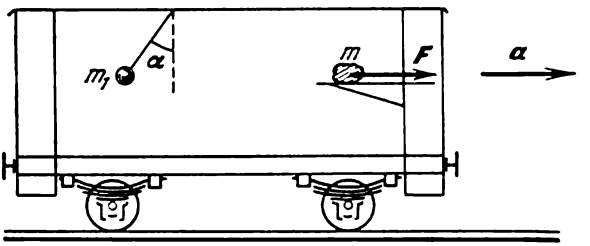


Fig. 108

En effet, l'état de repos dans un référentiel non galiléen ne se réalise que sous l'action de forces extérieures, car le corps est en mouvement accéléré relativement au référentiel galiléen. Par exemple, un wagon d'un train se meut avec une accélération a de façon rectiligne (fig. 108). Sur une table se trouvant dans le wagon est posé un paquet possédant une certaine accélération par rapport à la Terre; donc il est soumis à une force lui communiquant une accélération a, incarnée par la force de frottement sur la surface de la table. Une masse suspendue par un fil au plafond du wagon prend une position non verticale, mais déviée dans le sens opposé à la direction de l'accélération. Avec la variation de l'accélération a l'angle d'inclinaison du fil α par rapport à la verticale se modifie également.

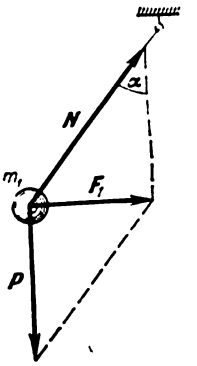


Fig. 109

La masse est soumise à deux forces: la force de tension du fil N et la force de pesanteur de la masse dirigée vers la Terre P (fig. 109). La résultante de ces deux forces F_1 est dirigée dans la direction de l'accélération du wagon:

$$F_1 = m_1 a, \quad F_1 = P \operatorname{tg} \alpha. \tag{44.1}$$

Remarquons qu'en définissant les forces appliquées au corps situé dans le wagon il a été tenu compte de l'accélération de ce corps par rapport à la Terre (relativement au référentiel galiléen.)

Mais peut-on formuler les lois du mouvement relativement à un référentiel accéléré, à savoir le wagon, sous une forme identique à celle utilisée pour le mouvement dans un référentiel galiléen? Il semble évident que cela ne peut être fait sans qu'on tienne compte du mouvement accéléré du système de référence (du wagon dans l'exemple donné).

En mécanique le mouvement du référentiel accéléré est souvent introduit au moyen de forces spéciales dites *forces d'inertie*. L'utilisation de ces forces permet de *conserver* pour les corps mobiles relativement à des référentiels non galiléens la première et la seconde lois

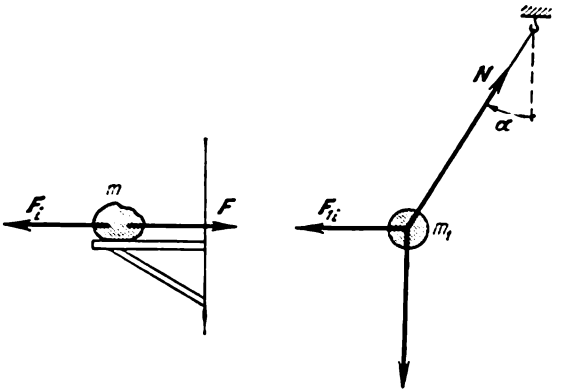


Fig. 110

de la dynamique sous la forme adoptée dans le référentiel galiléen; cela simplifie énormément l'analyse du mouvement dans chaque cas particulier.

Supposons que sur chaque corps se trouvant dans un système de référence accéléré agit une force d'inertie égale à la masse de ce corps multipliée par l'accélération du référentiel, et dirigée du côté opposé à l'accélération. Ainsi, par exemple, le paquet se trouvant sur la table du wagon de même que la masse suspendue au fil sont soumis à des forces d'inertie $F_i = -ma$ et $F_{1i} = -m_1 a$ comme c'est montré sur la figure 110. Alors ces corps sont au repos par rapport au wagon, on peut affirmer que dans ce cas, comme au cas de repos dans un référentiel galiléen, la somme de toutes les forces appliquées au corps est nulle :

$$F + F_i = 0, \quad F_{1i} + P + N = 0. \qquad (44.2.)$$

Si la force de frottement du paquet contre la table n'existait pas, le paquet se déplacerait sous l'action de la force d'inertie F_i dirigée à l'opposé de l'accélération du wagon avec l'accélération a relativement au wagon et glisserait de la table. En étudiant le mouvement du paquet qui glisse relativement à la voie ferrée on peut dire :

le paquet n'est soumis à aucune force dans la direction horizontale et il reste au repos relativement à la voie ferrée, tandis que le wagon, qui se déplace avec une accélération, s'en éloigne. Il s'ensuit que les forces d'inertie, tenant compte du mouvement accéléré du référentiel, ne sont introduites que dans l'étude du mouvement par rapport à un système de référence accéléré. Mais si le même mouvement est étudié dans un référentiel galiléen il n'est plus nécessaire d'introduire des forces d'inertie.

Si l'on communiquait à la masse suspendue au plafond du wagon (fig. 110) une impulsion, elle commencerait à effectuer des oscillations comme un pendule. Si l'accélération du wagon demeure constante au cours de son mouvement, l'étude des oscialltions du pendule relativement au wagon ne présentera aucune difficulté. En effet, à la force de pesanteur s'ajoutera la force d'inertie constante F_{1i}, la résultante de ces deux forces étant dirigée sous un angle α par rapport à la verticale, et le pendule exécutera des oscillations autour de la position d'équilibre du fil incliné sous l'angle α par rapport à la verticale. En état d'équilibre la force appliquée le long du fil sera supérieure à la gravitation terrestre et égale à la racine carrée de la somme des carrés de la force de pesanteur et de la force d'inertie en prenant la direction opposée à N (voir fig. 110). Coupons le fil et la masse chutera dans le wagon sous un angle α par rapport à la verticale avec l'accélération $\sqrt{a^2 + g^2}$. Par rapport à la Terre, la masse décrira une parabole définie par la vitesse du wagon au moment de la séparation de la masse et par l'accélération g.

Pour le mouvement du corps de masse m dans un référentiel non galiléen animé d'une accélération a la seconde loi de la dynamique doit s'énoncer ainsi :

$$F + F_i = mw_0, \tag{44.3}$$

où w_0 est l'accélération du corps dans le référentiel non galiléen, $F_i = -ma$ la force d'inertie, F la résultante de toutes les forces extérieures appliquées au corps.

La présence de forces d'inertie traduit le mouvement accéléré du système des coordonnées, les forces d'inertie définissant le mouvement du corps dans un référentiel accéléré. Sous ce rapport elles ne diffèrent aucunement des forces d'interaction ordinaires. Il est toutefois important de souligner la distinction entre les forces d'inertie et les autres forces traduisant l'interaction des corps ; elle consiste dans le fait qu'*aux forces d'inertie ne s'opposent pas des réactions*, on ne peut indiquer le corps du côté duquel s'exerce la force d'inertie. C'est pourquoi on appelle quelquefois la force d'inertie « force fictive » ; cette appellation n'est pas rationnelle : la force d'inertie est réelle puisqu'elle traduit le mouvement accéléré du système des coordonnées, elle diffère des forces d'interaction par l'absence de réaction, mais il n'y a rien de fictif dans cette particularité.

§ 45. FORCES D'INERTIE AGISSANT SUR UN CORPS AU REPOS DANS UN RÉFÉRENTIEL EN ROTATION

Essayons de suivre le mouvement des pendules placés sur un disque horizontal tournant d'un mouvement uniforme (fig. 111). On constate que toutes les sphères des pendules s'écartent de la verticale. Les angles d'écartement des fils des pendules seront d'autant plus grands que l'éloignement du pendule du centre du disque est grand [1]. Tous les pendules sont au repos relativement au disque tout en exécutant un mouvement circulaire uniforme par rapport à la Terre (relativement au référentiel galiléen). Comme les

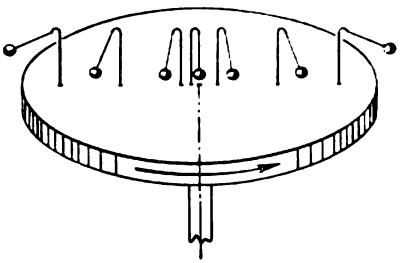


Fig. 111

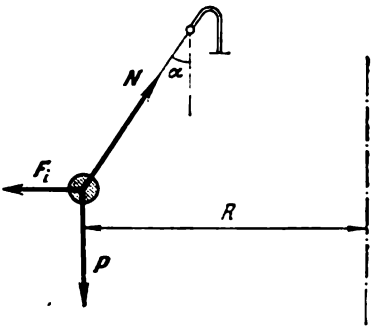


Fig. 112

rayons des cercles décrits par les sphères des pendules sont différents, les forces centripètes agissant sur ces sphères sont en raison directe de leur éloignement du centre du disque. La force centripète F est la résultante de la tension N et de la pesanteur P (fig. 112), $F = m\omega^2 R$ et $P = mg$, donc l'angle d'écart α du fil par rapport à la verticale sera tel que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 R}{g}\,; \qquad (45.1)$$

R est ici la distance séparant la sphère du centre du disque, g l'accélération en chute libre et ω la vitesse angulaire de rotation du disque.

Relativement au disque les pendules sont au repos dans la position inclinée. Donc, outre les forces de pesanteur, les sphères des pendules sont soumises à une autre force horizontale dirigée du centre et qui varie suivant le pendule considéré. C'est la *force d'inertie centrifuge* égale en grandeur à la masse de la sphère multipliée par l'accélération (relativement à la Terre) de l'endroit du disque

[1] Le pendule pendant suivant l'axe de rotation du disque ne s'écartera pas pour des vitesses angulaires $\omega \leqslant \sqrt{g/l}$.

au-dessus duquel se trouve la sphère et dirigée à l'opposé de l'accélération, c'est-à-dire du centre du disque suivant le rayon. Ainsi donc, à l'état de repos, par rapport au disque, la sphère de chaque pendule est soumise à trois forces : la force de pesanteur $\boldsymbol{P}$, la force de tension $\boldsymbol{N}$ et la force d'inertie

$$\boldsymbol{F}_i = m\omega^2\boldsymbol{R}, \tag{45.2}$$

où le vecteur $\boldsymbol{R}$ est dirigé à partir de l'axe. La somme de toutes ces forces est nulle (voir fig. 112) et, par suite, la sphère est au repos relativement au disque. Si pour une raison ou une autre l'équilibre est dérangé, les pendules commenceront à osciller relativement au disque, les sphères acquérant une accélération par rapport au disque.

Les forces d'inertie appliquées au corps au repos dans un système des coordonnées en rotation sont fonction de la position du corps dans ce système des coordonnées. Dans le mouvement du corps relativement à un système des coordonnées en rotation, ce corps est aussi soumis à d'autres forces d'inertie dont l'intensité et la direction seront définies au § 48. Notons que dans un système des coordonnées animé d'un mouvement accéléré et rectiligne les forces d'inertie sont les *mêmes* pour tous les points du système et, par suite, les forces d'inertie appliquées au corps au repos et au corps mobile relativement à ce système ont la même valeur.

§ 46. PHÉNOMÈNE D'APESANTEUR

Dans le vaisseau spatial, le satellite, l'ascenseur en chute libre, dans l'avion volant sous l'effet de la pesanteur surgissent des *phénomènes*, dits *d'apesanteur*. Tout corps se trouvant dans le vaisseau, le satellite, etc. et *n'étant* soumis *qu'à* la gravitation terrestre (ou à celle d'autres corps célestes) perd pour ainsi dire son « poids ». Le cosmonaute « flotte » librement dans la cabine sans s'appuyer sur quoi que ce soit et peut « poser » son crayon dans « l'air » sans que ce dernier tombe. Le liquide, s'il n'humecte pas les parois d'un récipient, tend à prendre une forme sphérique, etc. Notons tout d'abord que tous les véhicules au sein desquels on observe l'état d'apesanteur sont, *en chute libre*, c'est-à-dire animés d'un mouvement accéléré sous l'action de la seule force de gravitation.

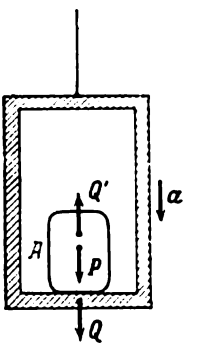


Fig. 113

Examinons comment varie le poids du corps dans un ascenseur animé d'un mouvement accéléré. Comme il a déjà été dit au § 14, on appellera poids n'ont pas la force de gravitation $\boldsymbol{P}$ agissant sur le corps A, mais la force $\boldsymbol{Q}$ appliquée au support retenant le corps (fig. 113) ; $\boldsymbol{Q}'$ étant la force

appliquée au corps et émanant du support. Supposons que le corps A se trouve dans un ascenseur en mouvement vers le bas avec l'accélération a; dans ce cas en vertu des lois de la mécanique

$$P - Q' = ma, \quad Q = Q',$$

ou

$$Q = P - ma \tag{46.1}$$

(les signes des projections sont choisis en accord avec les flèches de la figure 113). La force P ne varie pas (si la hauteur de l'élévation de l'ascenseur est petite par rapport au rayon de la Terre) et la force Q (force poids, force de pression sur le support) dépend de l'accélération a.

Si l'on prend l'ascenseur pour un référentiel accéléré, à tous les corps se trouvant dans l'ascenseur sera appliquée une force d'inertie égale à $-ma$, et l'équation (46.1) peut s'interpréter ainsi : la force de pression du corps (poids) sur le support est déterminée par la somme de la force de gravitation P et de la force d'inertie ($-ma$) appliquées au corps.

On peut récrire la formule (46.1) de la sorte :

$$Q = m(g - a). \tag{46.2}$$

Il s'ensuit que pour $a = g$ on obtient $Q = 0$, c'est-à-dire que la force poids est nulle, le corps perd son poids ; dans un ascenseur se déplaçant verticalement avec une accélération g, on observerait le *phénomène d'apesanteur*. La force d'inertie est égale et opposée à la force de gravitation, la somme de ces deux forces étant nulle. Notons que le mouvement de l'ascenseur peut, dans ce cas, être dirigé aussi bien vers le haut que vers le bas ; l'important est que son accélération soit dirigée vers le bas tout en étant égale à g.

La même situation s'observe dans le vaisseau spatial ou le satellite, car leur accélération due à la force de gravitation est toujours égale à g du lieu où ils se trouvent. Le satellite décrivant une orbite circulaire autour de la Terre est constamment en « chute », c'est-à-dire qu'il se trouve en état de chute, seulement l'accélération de la force de gravitation est toujours normale à sa trajectoire. Sur un avion, à une certaine vitesse de vol, le pilote choisit le régime de façon que les forces appliquées de la part de l'air (portance plus résistance) s'équilibrent complètement par la poussée ; l'avion dans ce cas « chutera » sous l'action de la pesanteur avec l'accélération g. Ce régime, dans l'état actuel de la technique, peut durer environ une minute, et les personnes se trouvant à bord de l'avion ressentent un état d'apesanteur.

Les démonstrations les plus simples du phénomène d'apesanteur en un auditoire ont été réalisées pour la première fois il y a cent ans par le professeur de l'Université de Moscou N. A. Lioubimov

dans des expériences avec le pendule fixé à un cadre tombant en chute libre.

Le cadre A sous l'action de la force de gravitation peut glisser librement vers le bas sur deux glissières (fig. 114, *a*). Au cadre A est fixé un pendule. Le pendule effectue des oscillations et, au cours de ces oscillations, le cadre est lâché et glisse avec le pendule vers le bas. Si l'on lâche le cadre au moment où la sphère du pendule atteint son point culminant D le pendule n'oscille pas durant la chute du cadre, il n'y a pas de mouvement par rapport au cadre, le

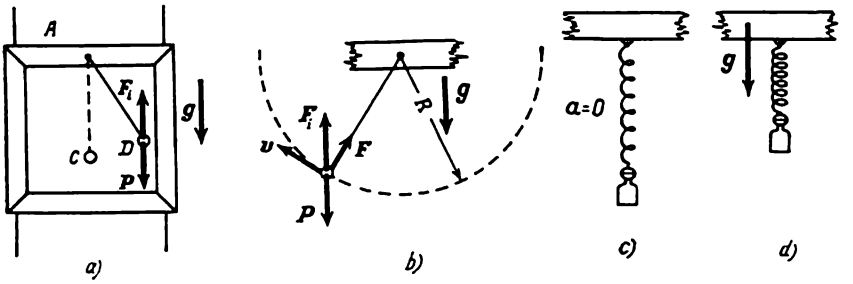


Fig. 114

pendule restant comme figé dans la position écartée. Si le cadre est lâché à l'instant où le pendule passe par sa position d'équilibre (point C) ce dernier poursuit au cours de la chute du cadre, ses oscillations autour du point d'attache (fig. 114, *b*).

On peut, le cadre chutant, réaliser également l'expérience suivante. On suspend au cadre par un ressort une masse (fig. 114, *c*); alors, pendant la chute du cadre le ressort, détendu par la masse, se resserre comme s'il ne soutenait aucune masse, cette dernière ayant pour ainsi dire «perdu» son poids (fig. 114, *d*).

Tous ces phénomènes s'expliquent facilement, si l'on tient compte de l'action de la force d'inertie et si l'on néglige les frottements. Dans le mouvement du corps par rapport au cadre accéléré il lui est appliquée une force d'inertie F_i dirigée vers le haut et égale à la masse du corps, multipliée par l'accélération du cadre. L'accélération du cadre étant égale à l'accélération en chute libre g, la force d'inertie est égale à la force de gravitation l'attirant vers la Terre. Donc le corps en mouvement ou au repos relativement au cadre n'est soumis à aucune force, et il doit ou bien rester au repos ou bien être animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Le pendule qui, au début du mouvement du cadre, était au repos continue à rester immobile relativement à ce dernier; la sphère du pendule, qui était mobile à l'instant de la chute du cadre, effectue un mouvement uniforme autour du point d'attache, car il n'est soumis qu'à la seule force F; cette force émanant du cadre est dirigée vers le point

d'attache et lui communique une accélération centripète dans le mouvement circulaire (la masse du cadre est de beaucoup supérieure à celle du pendule). La masse suspendue au ressort ne peut plus l'allonger, car la force d'inertie et la force de gravitation agissent sur la masse de cette charge dans des sens opposés en s'équilibrant.

On peut aussi expliquer ces phénomènes sans recourir à la force d'inertie, en étudiant le mouvement de la masse et du cadre par rapport à la Terre.

Une fois le cadre avec le pendule lâché, les deux corps ont la même accélération par rapport à la Terre ; donc, par suite de l'action de la *force de pesanteur*, le cadre comme le pendule auront, à tout instant, une même vitesse. La force de pesanteur *ne peut* donc modifier durant la chute la position relative du cadre et du pendule. Si le pendule était à l'origine au repos par rapport au cadre, il le demeurera également pendant la chute. Si, à l'origine, il possédait une certaine vitesse angulaire, il la conservera également dans la chute. (Il faut de même noter ici que la masse du cadre est de beaucoup supérieure à la masse du pendule.)

Des raisonnements analogues peuvent être également avancés dans tous les cas similaires.

On peut ainsi expliquer l'apesanteur dans un vaisseau spatial voguant dans un espace vide. Le vaisseau a une accélération engendrée par les forces de gravitation dans le système des coordonnées relié au Soleil. Dans le référentiel non galiléen relié au vaisseau tous les corps sont soumis à la force d'inertie dirigée dans le sens opposé à l'accélération de ce système ; en outre ils sont aussi sollicités par la force de gravitation. Dans le cas du mouvement d'un projectile (ou d'un vaisseau spatial) sur une orbite circulaire le rôle de force d'inertie est joué par la force centripète, qui compense justement l'action de la force de gravitation sur les corps dans leur mouvement par rapport au projectile.

§ 47. LIAISON ENTRE LES VECTEURS DES VITESSES ANGULAIRE ET LINÉAIRE DU POINT

Donnons la définition du produit vectoriel de deux vecteurs qui nous est maintenant nécessaire pour transcrire en forme vectorielle la vitesse du point se déplaçant sur un cercle. La vitesse du point se déplaçant sur un cercle est dirigée suivant la tangente au cercle, et il est commode de l'écrire sous forme d'un produit vectoriel. Pour cela introduisons, provisoirement de façon formelle, le *vecteur vitesse angulaire*. Convenons de considérer la vitesse angulaire du point se mouvant sur un cercle comme un vecteur dirigé parallèlement à l'axe de rotation (fig. 115) et, à une échelle déterminée, égal à la grandeur de la vitesse angulaire ω. La direction du vecteur ω est univoquement liée à la direction du point mobile suivant le

cercle. La direction de ω est choisie de la façon suivante : si l'on regarde le point mobile de l'extrémité du vecteur ω, le point se déplacera dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Le vecteur ω est perpendiculaire au plan du cercle parcouru par le point, le vecteur v restant toujours dans le plan du cercle. Introduisons encore le vecteur $\boldsymbol{R}$ (ou le rayon vecteur) ; ce vecteur est dirigé de l'axe de rotation vers le point mobile (voir fig. 115). Les vecteurs $\boldsymbol{R}$ et v sont mutuellement perpendiculaires et sont situés dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation.

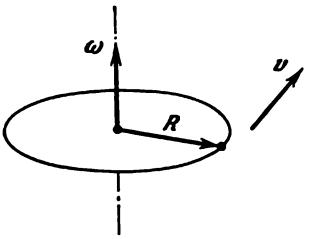


Fig. 115

La vitesse v est liée aux vecteurs ω et $\boldsymbol{R}$ par la loi du produit vectoriel, à savoir :

$$v = [\omega \boldsymbol{R}]. \qquad (47.1)$$

Comparant l'expression du vecteur vitesse (47.1) et la définition du produit vectoriel (§ 7), on constate que le vecteur vitesse v du point se déplaçant sur le cercle est, en effet, égal en grandeur et en direction au produit vectoriel des vecteurs ω et $\boldsymbol{R}$, de plus $\sin \alpha = \sin 90° = 1$. L'écriture sous forme de formule (47.1) a le mérite d'indiquer, pour le moment donné, la direction et la grandeur du vecteur vitesse en fonction des directions et des grandeurs des vecteurs $\boldsymbol{R}$ et ω. Quand on examine un exemple simple la nécessité de l'introduction du produit vectoriel n'apparaît pas comme évidente, par contre, l'analyse des exemples de mouvement complexe permet d'apprécier pleinement la nature concrète de cette image et la concision de la représentation du vecteur vitesse v sous forme de produit vectoriel.

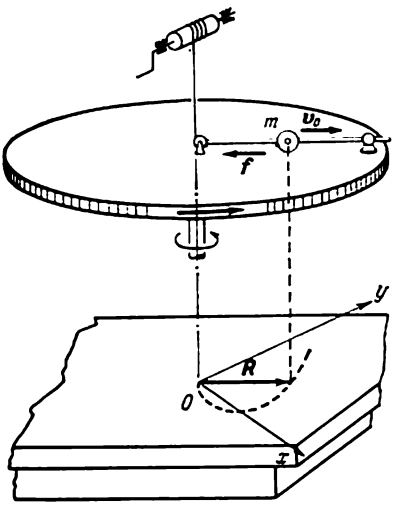


Fig. 116

§ 48. FORCES D'INERTIE AGISSANT SUR UN CORPS MOBILE DANS UN RÉFÉRENTIEL EN ROTATION

Imaginons une petite bille mobile de façon rectiligne et uniforme par rapport à un disque en rotation sur une glissière (fig. 116). Supposons que la bille est en mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse v_0 le long du rayon du

disque. Relativement au référentiel fixe (x, y) lié à la table (système des coordonnées galiléen), le mouvement de la bille sera non rectiligne et non uniforme; la trajectoire du centre de la bille sera une spirale et son accélération dépendra d'une façon complexe du mouvement suivant la trajectoire. Pour déterminer les forces d'inertie appliquées au corps mobile dans le

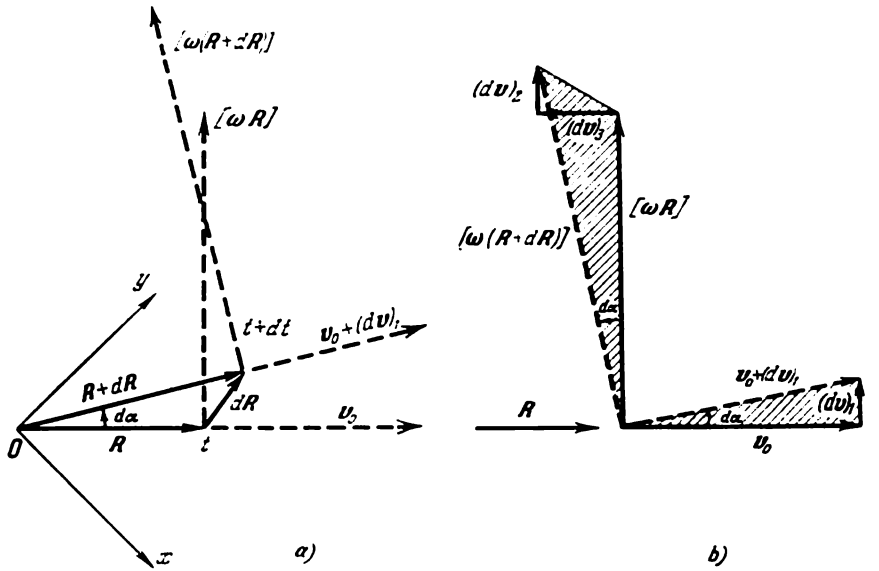


Fig. 117

système des coordonnées en rotation il faut avant tout évaluer l'accélération de ce corps par rapport au système des coordonnées immobile (x, y).

Soit un point mobile le long du rayon du disque animé d'un mouvement de rotation uniforme; déterminons son accélération par rapport au système des coordonnées immobile. A l'instant t le point se trouvait à la distance R de l'axe de rotation qu'on représentera par le vecteur $\boldsymbol{R}$ dans le plan (x, y). La vitesse du point dans le référentiel immobile (x, y) pourra alors être représentée par deux composantes: l'une est égale à $\boldsymbol{v}_0$, vitesse du mouvement par rapport au disque et dirigée suivant le rayon $\boldsymbol{R}$, l'autre étant perpendiculaire au rayon $\boldsymbol{R}$ et égale à $[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}]$, où $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur vitesse angulaire de la rotation du disque (fig. 117, *a*).

Voyons maintenant quelles seront la grandeur et la direction de ces composantes de la vitesse au bout d'un certain temps très petit dt. Tout d'abord, les deux composantes pivoteront d'un certain

petit angle

$$d\alpha = \omega\, dt; \tag{48.1}$$

en second lieu la grandeur absolue de la composante radiale ne variera pas, tandis que celle de la composante perpendiculaire au rayon, ou tangentielle, augmentera de

$$\omega\, dR = \omega v_0\, dt, \tag{48.2}$$

car la distance de l'axe croîtra durant le temps dt de la grandeur

$$dR = v_0\, dt. \tag{48.3}$$

On voit sur la figure 117, *b*, où les composantes des vecteurs vitesse à l'instant t et $t + dt$ sont menées d'une même origine, que l'accroissement de la vitesse durant le temps dt est composé de trois vecteurs : $(dv)_1$, $(dv)_2$ et $(dv)_3$, les accroissements $(dv)_1$ et $(dv)_2$ étant perpendiculaires au rayon et dirigés du même côté, le long de la composante tangentielle de la vitesse $[\omega \boldsymbol{R}]$; quant à l'accroissement $(dv)_3$ il est dirigé vers l'axe de rotation. Remarquons qu'en déterminant la direction, de même qu'en précisant la grandeur de ces accroissements, on doit avoir en vue que la grandeur du laps de temps dt est infiniment petite et que, partant, l'angle $d\alpha$ est aussi infiniment petit comme le sont les accroissements de la vitesse devant ses composantes.

Déterminons la grandeur des accroissements de la vitesse en utilisant le graphique (voir fig. 117, *b*).

1) L'accroissement $(dv)_1$ est dû à ce que la vitesse du mouvement relatif le long du rayon $\boldsymbol{R}$ pivote avec le rayon du disque; la grandeur de l'accroissement sera

$$(dv)_1 = v_0 d\alpha = v_0 \omega\, dt, \tag{48.4}$$

si l'on tient compte de la formule (48.1).

2) L'accroissement $(dv)_2$ est dû à ce que le point, au cours du mouvement, se déplace vers le domaine des plus grandes vitesses périphériques; sa grandeur est

$$(dv)_2 = \omega\,(R + dR) - \omega R = \omega v_0\, dt; \tag{48.5}$$

où dans les calculs on a tenu compte de la formule (48.2).

3) L'accroissement $(dv)_3$ est dû à ce que le point se déplace sur le cercle avec le disque, la composante de la vitesse perpendiculaire au rayon $[\omega \boldsymbol{R}]$ variant sa direction ; la grandeur de cet accroissement est

$$(dv)_3 = \omega R\, d\alpha = \omega R\, \omega dt = \omega^2 R\, dt. \tag{48.6}$$

Connaissant l'accroissement de la vitesse pour un temps dt suffisamment petit, on peut définir les composantes de l'accélération. La composante tangentielle, ou perpendiculaire au rayon, peut être

obtenue en sommant (48.5) et (48.4) et en divisant par dt:

$$w_{\text{cor}} = \frac{(dv)_1 + (dv)_2}{dt} = \frac{2\omega v_0\, dt}{dt} = 2\omega v_0. \tag{48.7}$$

La composante radiale de l'accélération sera de même égale à

$$w_{\text{c}} = \frac{(dv)_3}{dt} = \frac{\omega^2 R\, dt}{dt} = \omega^2 R. \tag{48.8}$$

Il est évident que cette composante est égale à l'*accélération centripète* déjà connue (§ 9). La composante tangentielle de l'accélération est appelée *accélération rotatoire* (*complémentaire* ou *de Coriolis*). La grandeur de l'accélération rotatoire est égale au double produit de la vitesse angulaire de rotation du disque par la vitesse du point mobile par rapport au disque.

L'analyse de l'accélération du point mobile accomplissant deux mouvements (l'un, suivant le rayon à partir du centre du disque et l'autre, circulaire avec le disque) permet de conclure qu'il est sollicité par deux forces: l'une agissant le long du rayon et égale à $f = m\omega^2 R$ et l'autre, perpendiculairement au rayon, égale à $F = m2\omega v_0$. La première est une force centripète ordinaire, la seconde est celle engendrant l'accélération rotatoire. Par conséquent, si un corps (une bille) se déplace le long du rayon d'une roue qui tourne, ce rayon agit sur le corps suivant une direction perpendiculaire au rayon.

L'accélération rotatoire est perpendiculaire à la direction de la vitesse du mouvement relatif v_0 et peut être écrite sous la forme du produit vectoriel des vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ et v_0 ainsi:

$$\boldsymbol{w}_{\text{cor}} = 2\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_0]. \tag{48.9}$$

Notons que la formule (48.9) se vérifie pour toute direction du vecteur v_0 par rapport au disque (corps en rotation). La démonstration de cette formule peut être dégagée de la figure 118, *a*, où sont indiquées les composantes de la vitesse du point se déplaçant relativement au disque avec une vitesse constante v_0. La vitesse du point dans le référentiel fixe à l'instant t est constituée de deux composantes: v_0 et $[\omega R]$, le point se trouvant à cet instant au point A. Après le laps de temps dt le corps viendra au point B; sa vitesse se décompose en deux composantes: v_0' et $[\omega (R + dR)]$, cette dernière ayant pivoté de l'angle $\left(\omega + \frac{v'}{R}\right)dt$ par rapport à la direction antérieure de cette composante à l'instant t (v' est la composante de la vitesse v_0 perpendiculaire au rayon).

On a représenté sur la figure 118, *b* à partir d'une même origine les deux composantes de la vitesse du point dans le référentiel immobile aux instants t et $t + dt$ ainsi que les accroissements de la vitesse durant dt. Dans la démonstration de (48.9), il faut considérer que les angles ωdt et $\frac{v'}{R}dt$ sont infiniment petits. Sur la figure 118, *c* pour faire image les vecteurs accroissements de la vitesse sont représentés sous forme d'un contour polygonal l'un à la suite de l'autre: deux d'entre eux sont normaux à v_0 et égaux, le troisième est dirigé

vers le centre. En divisant l'accroissement par dt, on obtient l'accélération centripète $-\omega^2 R$ et l'accélération de Coriolis $2\,[\omega v_0]$.

Indiquons que dans un référentiel en rotation le mouvement est parallèle à l'axe de rotation, quand $v_0 \parallel \omega$, n'engendre pas d'accélération rotatoire, car

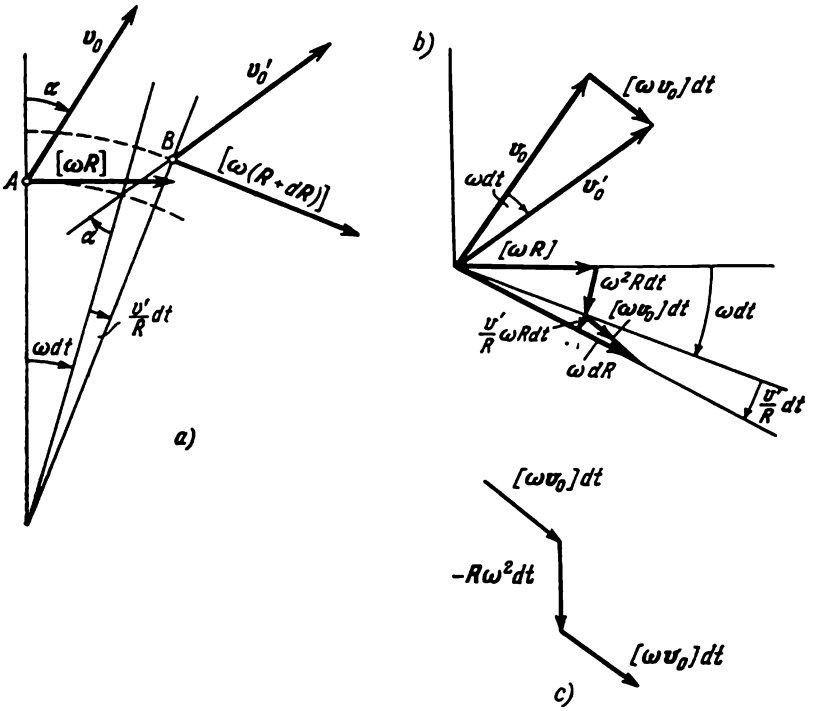


Fig. 118

dans ce mouvement v_0 ne varie pas en direction dans l'espace. On peut donc affirmer que pour toute direction de v_0 l'accélération de Coriolis est égale à $2\,|\omega v_0|$, car si $v_0 = v_{\parallel} + v_{\perp}$, $[\omega v_0] = [\omega v_{\perp}]$, vu que $[\omega v_{\parallel}] \equiv 0$.

Revenons maintenant à notre exemple et examinons encore une fois le mouvement de la bille le long du rayon sur un disque tournant (voir fig. 116). Jusque-là on a étudié ce mouvement dans un référentiel galiléen, c'est-à-dire le système des coordonnées immobile. Maintenant abordons l'étude du même mouvement relativement à un disque tournant.

Par rapport au disque, la bille a un mouvement rectiligne et uniforme le long du rayon ; il s'ensuit qu'aucune force ne devrait être appliquée à la bille si les lois de la dynamique jouaient pour ce mouvement. Or, comme on vient de l'établir, sur la bille agissent deux forces : la première $f = -m\omega^2 R$ le long du rayon vers le centre et la seconde $F = 2m\,[\omega v_0]$ dans la direction perpendiculaire au

rayon. Donc le rayon supportant la bille fléchira un peu et exercera une pression sur elle dans la direction de la rotation du disque. En outre, la bille est soumise à la force f dirigée vers le centre. La force f émane du fil attaché à la bille et dirigé vers l'axe de rotation où, après avoir passé par une poulie, il est relié à un tambour, comme c'est montré sur la figure 116. Ces deux forces agissent en permanence sur la bille, l'une (F) étant constante en intensité, puisque ω et v_0 sont constantes, et la seconde (f) croît proportionnellement à l'éloignement de la bille de l'axe, quant à la bille. elle effectue un mouvement rectiligne uniforme par rapport au disque.

Les forces F et f, appliquées en fait au corps m, sont des forces dont l'intensité et la direction ne dépendent pas par rapport à quel système de référence (immobile ou en rotation) on le considère.

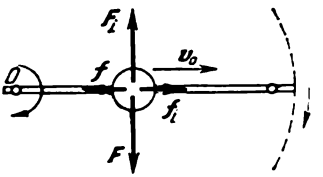


Fig. 119

Donc, comme dans le cas de référentiel en mouvement rectiligne et accéléré, on peut introduire des *forces d'inertie* pour que l'énoncé de la première et de la seconde lois de la dynamique relativement à un système des coordonnées en rotation soit le même que dans un référentiel galiléen.

Ayant admis l'action des forces d'inertie, l'image d'une bille en mouvement uniforme le long du rayon d'un disque en rotation uniforme, se présente de la façon suivante. Dans la direction perpendiculaire au rayon, sur la bille agit la force F du rayon légèrement infléchi qui est équilibrée par la *force d'inertie* (*de Coriolis* ou *rotatoire*) égale à $F_i = -2m\,[\omega v_0]$ et dirigée du côté opposé à l'action de la force émanant du rayon infléchi (fig. 119). Le long du rayon à la bille est appliquée la force de tension du fil, la force f lui communiquant l'accélération centripète; cette force est équilibrée par la *force d'inertie centrifuge* $f_i = m\omega^2 R$. En présence de ces forces d'inertie équilibrant la force de pression du rayon et la force de tension du fil, la bille effectue un mouvement uniforme le long du rayon dans le système des coordonnées en rotation.

La force d'inertie rotatoire, comme toutes les forces d'inertie, est appliquée à la masse du corps mobile dans le système des coordonnées en rotation et, lorsque le mouvement est relativement uniforme, elle est équilibrée par les forces appliquées au corps considéré de la part d'autres corps. Soulignons une fois de plus que les

forces d'inertie n'entrent pas en jeu quand le même mouvement est étudié dans un système des coordonnées galiléen.

Dans l'exemple considéré, la bille est tout le temps soumise à une force d'inertie centrifuge augmentant proportionnellement au temps (plus précisément proportionnellement au rayon). Si par contre on laisse la bille se déplacer le long du rayon sans l'action de la force extérieure f, c'est-à-dire si l'on coupe le fil, le mouvement le long de l'axe du disque ne sera plus uniforme mais accéléré. L'accélération sera fonction de la force d'inertie $f_i m\omega^2 R$ et croîtra avec R. La force d'inertie rotatoire augmentera également avec l'accroissement de la vitesse de la bille relativement au disque. On peut facilement calculer que l'éloignement de la bille du centre R croîtra avec le temps t suivant la loi

$$R = a \operatorname{ch} \omega t,$$

où a est la distance à laquelle se trouvait la bille à l'instant $t = 0$ quand sa vitesse était nulle, ch étant le symbole du cosinus hyperbolique ($\operatorname{ch} x = 1/2\ (e^x + e^{-x})$).

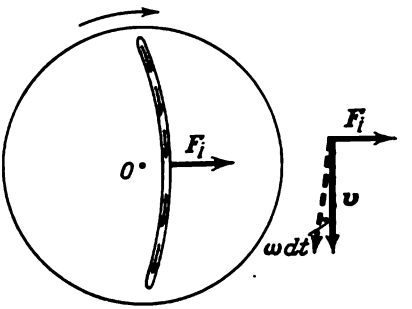


Fig. 120

L'existence de l'accélération rotatoire (ou de la force d'inertie rotatoire) ressort facilement de l'expérience proposée par S. E. Khaïkine. Un tube en caoutchouc est tendu suivant le diamètre d'un disque en rotation (fig. 120). Il est connecté de telle façon que durant la rotation l'eau puisse s'écouler d'un bout à l'autre. Le mouvement de l'eau est uniforme par rapport au disque et elle est soumise à la force d'inertie rotatoire: par suite le tube en caoutchouc s'infléchira du côté opposé au pivotement du vecteur vitesse de l'eau dans la rotation du disque. Cette flexion du tube en caoutchouc peut être facilement observée à l'éclairement stroboscopique. En utilisant ce dispositif, on peut observer qu'avec l'augmentation de la vitesse de rotation du disque la flexion du tube augmente. Le même phénomène a lieu lorsqu'on augmente la vitesse d'écoulement de l'eau dans le tube.

On peut proposer une interprétation quelque peu différente de la liaison entre les accélérations dans des systèmes des coordonnées immobile et en rotation.

Tout d'abord formulons la règle générale concernant la dérivée du vecteur. Soit le vecteur $\boldsymbol{A}$ dans les référentiels immobile et en rotation. Si le vecteur $\boldsymbol{A}$ est invariable dans le référentiel en rotation, où ses composantes sont constantes, dans le référentiel immobile les composantes de $\boldsymbol{A}$ varient. Le vecteur $\boldsymbol{A}$ se modifie dans le référentiel immobile; il acquiert durant le temps dt l'accroissement

$$d\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\omega}\, dt \boldsymbol{A}]\ ;\ \text{ou}\ \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{A}].$$

En effet, décomposons le vecteur $\boldsymbol{A}$ en deux composantes : $\boldsymbol{A}_{\parallel}$ et $\boldsymbol{A}_{\perp}$ parallèle à ω et normale à lui (fig. 121, *a*). Alors

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{\parallel} + \boldsymbol{A}_{\perp}, \quad [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{A}] = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{A}_{\perp}], \quad [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{A}_{\parallel}] = 0.$$

L'accroissement $d\boldsymbol{A}$ est montré sur la figure 121, *b* où le plan du

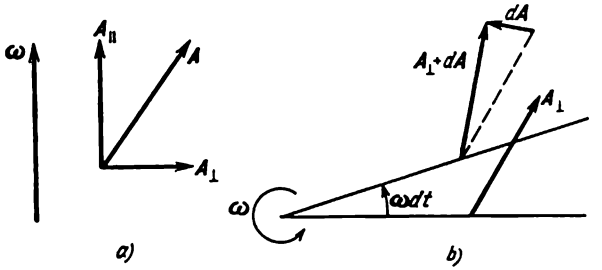


Fig. 121

dessin est normal à ω. On voit que

$$d\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\omega}\, dt\, \boldsymbol{A}_{\perp}], \quad \text{ou} \quad \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{A}_{\perp}] = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{A}].$$

Si le vecteur $\boldsymbol{A}$ varie par rapport au référentiel en rotation et durant le temps dt acquiert l'accroissement $(d\boldsymbol{A})_0$ il est évident que la dérivée de $\boldsymbol{A}$ dans le référentiel immobile peut s'écrire ainsi :

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{(d\boldsymbol{A})_0}{dt} + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{A}]. \tag{48.10}$$

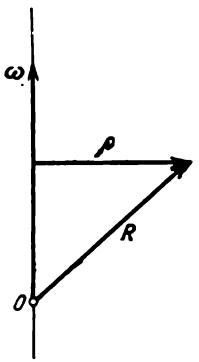


Fig. 122

La grandeur $\frac{(d\boldsymbol{A})_0}{dt}$ peut être appelée dérivée du vecteur $\boldsymbol{A}$ dans le référentiel en rotation. Le rapport (48.10) est vrai pour tout vecteur $\boldsymbol{A}$.

Appliquons-le au vecteur $\boldsymbol{R}$ mené d'un point fixe O situé sur l'axe de rotation vers une particule mobile (fig. 122). Alors par rapport à un référentiel immobile

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{(d\boldsymbol{R})_0}{dt} + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}], \tag{48.11}$$

où $\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \boldsymbol{v}$ est la vitesse de la particule dans le référentiel immobile, $\frac{(d\boldsymbol{R})_0}{dt} = \boldsymbol{v}_0$, la vitesse dans le référentiel en rotation. Notons que la vitesse $\boldsymbol{v}_0$ peut prendre toute direction. La dérivée du vecteur vitesse

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}]$$

relativement au référentiel immobile, ou l'accélération w dans ce référentiel, peut être écrite ainsi

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_0}{dt} + \left[\omega \frac{dR}{dt}\right], \tag{48.12}$$

si ω = const. Mais $\frac{dv_0}{dt}$ et $\frac{dR}{dt}$, en accord avec (48.10), seront égaux à

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{(dv_0)_0}{dt} + [\omega v_0], \quad \frac{dR}{dt} = v = v_0 + [\omega R].$$

En le portant dans (48.12) il vient

$$w = \frac{(dv_0)_0}{dt} + [\omega v_0] + [\omega [v_0 + [\omega R]]] =$$

$$= \frac{(dv_0)_0}{dt} + 2[\omega v_0] + [\omega [\omega R]], \tag{48.13}$$

qui est la relation cherchée. Le premier terme $\frac{(dv_0)_0}{dt} = w_0$ est l'accélération de la particule dans le référentiel en rotation, $2[\omega v_0]$ étant l'accélération de Coriolis; $[\omega (\omega R)] = -\omega^2 \rho$, l'accélération centripète (voir fig. 122). En définitive, sous forme générale pour ω = const,

$$w = w_0 + 2[\omega v_0] - \omega^2 \rho. \tag{48.14}$$

L'introduction de forces d'inertie se prête à des interprétations variées et leur étude se heurte à des difficultés, rappelons donc encore une fois les raisonnements essentiels.

1. Il n'y a pas de forces d'inertie.

Dans un référentiel non galiléen la première et la seconde lois de la dynamique *ne sont pas applicables*, les forces d'interaction des corps ne déterminant pas encore l'accélération du corps. *Il faut* donc au préalable procéder à l'analyse dynamique du mouvement du corps considéré relativement au *référentiel galiléen*. Une fois trouvé le mouvement du corps dans ce référentiel on peut, en s'appuyant sur les lois cinématiques, définir son mouvement dans le référentiel non galiléen.

2. Les forces d'inertie existent.

Dans ce cas, du point de vue formel, la première et la seconde lois de la dynamique *conviennent*, on peut donc procéder à l'analyse dynamique du mouvement du corps directement dans le *référentiel non galiléen*, il faut pour cela, aux forces d'interaction appliquées au corps, ajouter encore des *forces d'inertie*. Dans la translation du référentiel non galiléen, les forces d'inertie sont les *mêmes* en tout point du système de référence et ne dépendent pas de la vitesse du mouvement du corps relativement au référentiel. Dans un référentiel en rotation les forces d'inertie sont *différentes* en divers points du

système de référence non galiléen (forces centrifuges) et dépendent de la vitesse relative du mouvement (forces de Coriolis).

La signification physique des forces d'inertie est de tenir compte de l'accélération du corps en mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel non galiléen, c'est-à-dire de l'accélération engendrée par le mouvement accéléré du système de référence. L'addition des forces d'inertie aux forces extérieures sollicitant le corps se réduit à la soustraction de la somme des forces extérieures de la partie engendrant l'accélération centripète et de Coriolis (en cas du référentiel en rotation) ou l'accélération du référentiel non galiléen (en cas de translation). La partie restante des forces extérieures détermine l'accélération par rapport au référentiel non galiléen.

§ 49. INFLUENCE DE LA ROTATION DE LA TERRE SUR LE MOUVEMENT DES CORPS. PENDULE DE FOUCAULT

L'action de la force d'inertie rotatoire (complémentaire) explique l'affouillement de la rive droite des fleuves dans l'hémisphère boréal (*loi de Baer*). Elle est également la raison de l'usure plus forte du rail droit des voies ferrées doubles de cet hémisphère.

Supposons que le train suit le méridien dans l'hémisphère boréal (fig. 123, *a*). On peut dans ce cas décomposer la vitesse v du mouvement le long du méridien

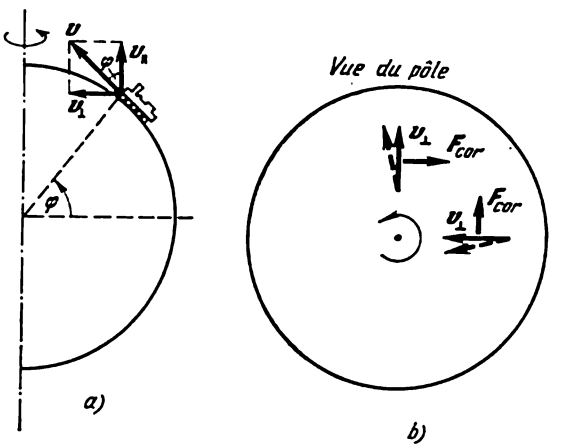


Fig. 123

en deux composantes: l'une ($v_{\parallel}$), parallèle à l'axe de la Terre et l'autre ($v_{\perp}$), perpendiculaire à celui-ci. La direction et la grandeur de la composante $v_{\parallel}$ ne varieront pas dans la rotation de la Terre et, elle ne sera donc pas liée aux forces d'inertie. Quant à la seconde composante, elle se comporte de façon analogue à la vitesse du corps mobile le long du rayon du disque tournant. Le train sera

donc soumis à une force d'inertie

$$F_{\text{cor}} = 2m\omega v_{\perp} = 2m\omega v \sin\varphi, \tag{49.1}$$

où m est la masse du train et φ la latitude. Il est facile de constater en consultant le dessin (fig. 123, *b*), où on a indiqué en pointillé la direction de la composante $v_{\perp}$ au bout du laps de temps dt, que la force d'inertie est toujours dirigée à droite suivant la marche du train. Il va donc de soi que l'usure prématurée du rail droit [1] ne s'observe que sur des voies ferrées doubles, car sur la voie considérée le mouvement s'effectue toujours dans le même sens.

Remarquons que la force d'inertie rotatoire apparaît également quand le train ne suit pas le méridien. En effet, dans le mouvement suivant le parallèle

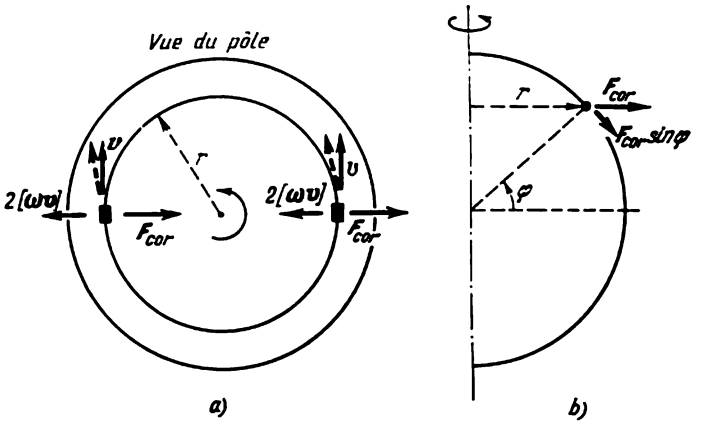


Fig. 124

(fig. 124) on voit de même surgir une accélération rotatoire $2\omega v$ dirigée vers l'axe de rotation, si le train va à l'est, et de l'axe de rotation, quand il va vers l'ouest. Il existe donc une force d'inertie

$$F_{\text{cor}} = 2m\omega v, \tag{49.2}$$

dirigée de l'axe de la Terre (ou vers cet axe) ; la projection de cette force sur le plan horizontal est égale à

$$F_{\text{cor}} \sin\varphi = 2mv\omega \sin\varphi, \tag{49.3}$$

c'est-à-dire à la même grandeur que dans le mouvement le long du méridien et elle est également dirigée à droite suivant la marche du train.

Il en est de même de l'affouillement des rives des fleuves : l'affouillement de la rive droite dans l'hémisphère boréal (et de la rive gauche dans l'hémisphère austral) s'observe indépendamment de la direction du cours fluvial.

On propose au lecteur de procéder de son propre chef à l'analyse de la question suivante : constate-t-on l'apparition de la force d'inertie rotatoire lors du mouvement des trains au voisinage de l'équateur et y entraîne-t-elle une usure des rails? (Réponse : la force d'inertie rotatoire s'y observe, mais elle ne provoque pas une usure irrégulière des rails.)

Si le mouvement d'un corps en chute libre est rapporté à un repère lié à la Terre, il sera soumis au cours de la chute à trois forces : la force de gravi-

[1] Sur les voies de l'hémisphère austral, c'est le rail gauche qui s'use.

tation et deux forces d'inertie: centrifuge et rotatoire. La grandeur des forces d'inertie dans une chute d'une faible hauteur (par rapport au rayon de la Terre) sera faible. L'accélération centrifuge est égale à

$$\omega^2 R \cos\varphi \approx \frac{(2\pi)^2 \cdot 6400 \cdot 10^3}{24^2 \cdot 36^2 \cdot 10^4} \cos\varphi \ \mathrm{m/s^2} \approx 0{,}034 \cos\varphi \ \mathrm{m/s^2}, \qquad (49.4)$$

où ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre, R le rayon de la Terre, φ la latitude. A l'équateur l'accélération centrifuge constitue près de 0,3 % de l'accélération de la force de gravitation, donc dans un calcul approché, on peut négliger l'influence de la variation [1] de la force centrifuge avec la hauteur de chute. De beaucoup plus importante est l'influence de la force rotatoire qui provoquera la déviation du corps chutant vers l'est. Cette déviation se conçoît facilement: au point supérieur, par suite de la rotation de la Terre, le corps a une vitesse plus grande (par rapport au système des coordonnées ne se trouvant pas en rotation et lié au centre de la Terre) qu'à l'endroit où il chute. La déviation vers l'est se calcule de façon approchée assez facilement en admettant que la vitesse de chute du corps v, en première approximation, est dirigée vers le bas et que sa grandeur est gt, comme dans une chute sur une Terre qui ne tourne pas (t est le temps de chute).

La force d'inertie de Coriolis est égale à $-2m\,[\omega v]$ ou, de façon approchée, sa grandeur est $2m\omega\, gt \cos\varphi$. Donc l'accélération vers l'est du corps chutant est approximativement égale à

$$a = 2\omega g t \cos\varphi. \qquad (49.5)$$

En intégrant deux fois l'accélération, on constate que la grandeur du déplacement vers l'est est approximativement [2]

$$s = \frac{1}{3}\,\omega g t^3 \cos\varphi.$$

Dans ce calcul on a supposé que la force de Coriolis était constamment dirigée vers l'est, en négligeant la variation de la direction de la vitesse v et, partant, la variation de la direction de la force rotatoire. En passant aux valeurs numériques, on trouve que dans une chute de 4 s à la latitude de 45° (à peu près d'une hauteur de 80 m) le corps se déplacera vers l'est d'environ 3 cm. Les résultats de ces calculs du déplacement vers l'est furent confirmés par des expériences très minutieuses.

Ces faits contribuent à la démonstration mécanique de la rotation de la Terre. Ils montrent que le référentiel solidaire de la Terre est un système de référence *non galiléen*; c'est seulement dans les cas où les forces agissant sur le corps sont de beaucoup supérieures aux forces d'inertie rotatoire et centrifuge qu'on peut considérer approximativement le système de référence solidaire de la Terre comme *galiléen*.

Notons que la force d'inertie centrifuge a en un lieu donné une direction et une grandeur déterminées indépendamment du mouvement du corps. Elle s'exerce sur le corps concurremment avec la

---

[1] Notons qu'il importe de connaître la variation de la force centrifuge suivant la hauteur et non pas sa valeur.

[2] $$s = \int_0^t v_{\mathrm{cor}}\, dt, \text{ où } v_{\mathrm{cor}} = \int_0^t a\, dt = 2\omega g \cos\varphi \int_0^t t\, dt = \omega g \cos\varphi \cdot t^2.$$

force de gravitation P, comme l'équivalente de la force poids $P' = P + f$ (fig. 125, *a*). La force P' définit la direction du fil à plomb (de la verticale locale), ainsi que le poids du corps en chaque point de l'espace lié à la Terre en rotation (§ 14, § 46).

On n'a envisagé jusque-là que le mouvement diurne de la Terre autour de son axe. Il est facile de s'apercevoir que l'influence des forces d'inertie dues à la révolution de la Terre autour du Soleil est de beaucoup inférieure. Il semble certain que la force d'inertie rotatoire sera de 360 fois inférieure à la force d'inertie rotatoire due

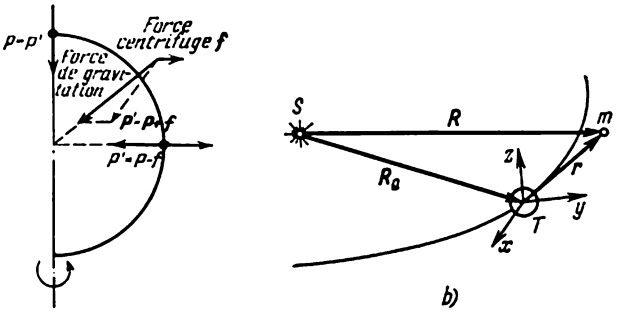


Fig. 125

à la rotation diurne de la Terre. La force d'inertie centrifuge engendrée par la révolution autour du Soleil sera de l'ordre de 0,2 de la force centrifuge due à la rotation diurne à l'équateur. Pendant le mouvement des corps au voisinage de la surface terrestre les forces d'inertie liées à la révolution de la Terre autour du Soleil et les forces d'attraction des corps par le Soleil se compensent pratiquement et dans la plupart des cas peuvent être complètement négligées. Pour le montrer, écrivons l'équation totale du mouvement d'un point matériel de masse m au voisinage de la Terre. Adoptons pour origine du référentiel non galiléen le centre de masse de la Terre (fig. 125, *b*) :

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\gamma\frac{mM_T}{r^3}\boldsymbol{r} - \gamma\frac{mM_S}{R^3}\boldsymbol{R} - m\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{F}_{\text{cor}} + \boldsymbol{F}_{\text{ct}}. \qquad (49.6)$$

On a écrit ici successivement : la force d'attraction du point matériel m par la Terre ; la force d'attraction du point par le Soleil ; la force d'inertie due au mouvement de la Terre autour du Soleil sur une orbite elliptique ; la force d'inertie de Coriolis et la force d'inertie centrifuge.

L'accélération $\boldsymbol{a}_0 = -\gamma\frac{M_S}{R_0^3}\boldsymbol{R}_0$ est communiquée au centre de la masse de la Terre par la force de son attraction vers le Soleil. L'éloignement de la Terre du Soleil $R_0 \approx 1{,}5\cdot10^8$ km.

La comparaison numérique des termes figurant dans l'équation (49.6) la force d'inertie liée à l'irrégularité du mouvement orbital

du système de référence et la force d'attraction exercée par le Soleil sur le point matériel montre qu'elles se compensent avec un grand degré de précision. On peut donc considérer leur commun apport dans l'équation (49.6) comme étant nul.

En effet, $\frac{r}{R^0} \sim \frac{10^4}{10^8} = 10^{-4}$ et $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{R}_0$. D'où il suit que

$$-\gamma \frac{mM_S}{R^3} \boldsymbol{R} - m\boldsymbol{a}_0 = -\gamma m M_S \left(\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} - \frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0^3} \right) \approx 0.$$

En désignant, comme il a été indiqué plus haut (voir fig. 125, *a*), la somme des forces d'attraction du corps par la Terre et de la force centrifuge au point considéré de la surface terrestre par $\boldsymbol{P}'$, on peut écrire l'équation (49.6) sous la forme suivante:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{P}' + \boldsymbol{F}_{\text{cor}} = m\boldsymbol{g}_{\text{é}} - 2m\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_{\text{rel}}], \tag{49.7}$$

où $\boldsymbol{g}_{\text{é}} = \boldsymbol{P}'/m$. L'équation (49.7) décrit le mouvement des corps dans l'espace circumterrestre par rapport au référentiel solidaire de la Terre.

On peut donc considérer le référentiel lié à la Terre comme galiléen de façon approchée. L'erreur commise dans ce cas est mesurée par le rapport des grandeurs des forces d'inertie à la grandeur de toutes les autres forces appliquées au corps.

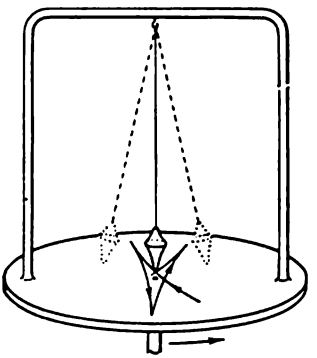


Fig. 126

Le savant français Foucault, en observant les oscillations du pendule, avait démontré la rotation de la Terre (1852). Si l'on suppose que le pendule est suspendu au pôle, on peut s'attendre à la situation suivante: au cours des oscillations du pendule le plan de ses oscillations pivotera lentement du côté opposé à la rotation de la Terre. Ce pivotement du plan d'oscillation s'observe en fixant la trace des oscillations du pendule suspendu au-dessus d'un disque tournant (fig. 126). Si l'on fait osciller le pendule dans un plan quelconque puis on entraîne le disque dans le mouvement de rotation, le sable, s'écoulant de l'entonnoir suspendu au pendule en guise de masse, marquera la trace du mouvement du pendule au-dessus du disque.

Dans un référentiel immobile il n'existe pas de forces capables de modifier le plan d'oscillation du pendule, et le pendule le conservera invariant dans l'espace, tandis que le disque (ou la Terre) tourne au-dessous de lui. Il est évident que le plan d'oscillation du pendule tournera au pôle avec la vitesse angulaire de rotation de la Terre (15° par heure). Si toutefois on rapporte les oscillations du pendule s'effectuant au pôle au référentiel solidaire de la Terre, on peut alors considérer la rotation du plan des oscillations comme le résultat de l'action de la force de Coriolis. En effet, cette force est perpendiculaire à la vitesse de rotation et se trouve constamment dans le plan horizontal. Cette force est proportionnelle à la vitesse du mouvement de la masse du pendule et à la vitesse angulaire de rotation de la Terre et est dirigée de la sorte que son action oblige la trajectoire à s'incurver du côté qu'il faut.

La trace du mouvement du pendule variera suivant la manière dont le pendule oscille. Suivons la trace de la trajectoire du pendule au-dessus d'un disque qui tourne (voir fig. 126) dans deux modes de lancement du pendule. Si l'on écarte la masse du pendule de côté et en même temps on met le disque en rotation de manière qu'au moment du lancement du pendule l'entonnoir acquière la même vitesse que le point du disque au-dessus duquel il se trouve, la trace laissée par le pendule aura la forme d'une « étoile » (fig. 127, *a*). On aura une trajectoire analogue pour le pendule lancé de la position écartée au pôle.

La seconde fois on fera osciller le pendule le disque restant immobile, ensuite on entraînera le disque dans la rotation. Dans ce cas la trajectoire dessinée est une « rosace » (fig. 127, *b*). Sur Terre cette forme de la trajectoire ne

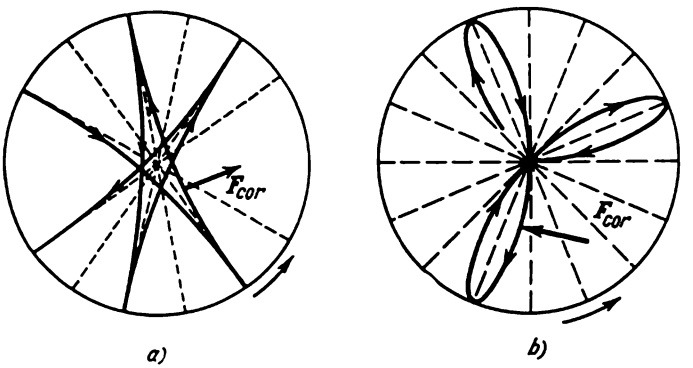


Fig. 127

sera obtenue que si le pendule effectue ses oscillations sous le coup d'une brusque secousse infligée à la masse au repos. Dans les deux cas la trajectoire s'incurve du même côté sous l'effet de la force de Coriolis.

Ainsi donc, au cours des oscillations du pendule au pôle, la trace de la trajectoire du pendule s'incurve et, par suite, le plan des oscillations pivote progressivement sous l'action de la force de Coriolis

$$F_{cor} = -2m\,[\omega v], \tag{49.8}$$

qui se trouve constamment dans le plan horizontal et est toujours dirigée à droite suivant le cheminement de la masse.

L'expérience de Foucault peut être observée en laboratoire, il faut seulement prévoir un dispositif mesurant la rotation de la trajectoire tant que les oscillations du pendule ne s'amortissent pas. L'expérience est menée avec un pendule de longueur aussi grande que possible dans le but d'augmenter la période de ses oscillations ; les oscillations dureront alors plus longtemps, la Terre pivotant durant ce temps d'un plus grand angle.

Pour marquer au lancement l'angle de rotation de la trajectoire, on oblige le pendule d'osciller dans le plan du rayon lumineux projeté d'une source ponctuelle sur un écran, de sorte qu'au début, on ne voit sur l'écran qu'une ombre nette et fixe du fil de suspension en oscillation. Au bout d'un certain temps (5 à 10 mn) le plan des oscillations pivotera et on verra sur l'écran les déplacements de l'ombre du fil.

Pour mesurer l'angle de rotation du plan d'oscillations du pendule, on déplace de côté la source de lumière jusqu'à ce qu'on ait aperçu de nouveau une ombre nette et immobile du fil. En mesurant le déplacement de l'ombre du fil, et la distance du fil à l'écran, on trouve l'angle dont a pivoté le plan d'oscilla-

tions durant le temps considéré. L'expérience montre que la vitesse angulaire de rotation du plan d'oscillations du pendule est égale à

$$\omega \sin \varphi = 15 \sin \varphi \text{ degré/h},$$

où φ est la latitude du lieu (fig. 128). La rotation autour de la verticale à la latitude φ s'effectuera non pas avec la vitesse angulaire ω, mais avec la vitesse

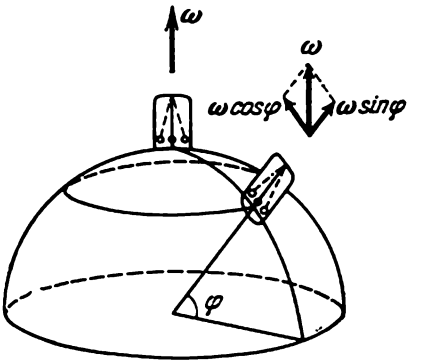


Fig. 128

angulaire égale à la projection du vecteur ω sur la verticale, c'est-à-dire que la vitesse angulaire de rotation sera égale à $\omega \sin \varphi$.

La diminution de la vitesse angulaire de rotation du plan d'oscillations peut de même s'expliquer par le fait que la projection de la force de Coriolis sur le plan horizontal au lieu considéré diffère du coefficient $\sin \varphi$ de sa grandeur au pôle. En effet, la rotation du plan d'oscillations n'est due qu'à cette projection. La force de Coriolis agissant sur la masse du pendule au lieu considéré se trouve dans le plan perpendiculaire à ω et v et est proportionnelle au sinus de l'angle qu'ils forment. C'est seulement au cas où le vecteur v se trouve dans le plan méridien que la force de Coriolis est dirigée horizontalement ; pour toutes les autres directions cette force ne se trouve pas dans le plan horizontal.

CHAPITRE VII

MOUVEMENT DU CORPS SOLIDE

§ 50. TRANSLATION ET ROTATION DU CORPS SOLIDE

A certaines conditions tous les corps se déforment, c'est-à-dire modifient d'une façon ou d'une autre leur forme. Un corps solide, ou un *corps rigide absolu*, est un corps qui à aucune condition ne peut se déformer ; dans le corps rigide absolu, quelles que soient les conditions, la distance entre deux points, ou plus précisément entre deux particules de ce corps, reste invariable, constante. Il est évident que cette représentation est une fiction. Mais dans les cas quand au cours du mouvement la forme du corps ne varie pas ou se modifie de façon insensible, on peut considérer les lois du mouvement de ce corps comme d'un corps rigide absolu ou, comme on l'appellera dans la suite, tout simplement d'un *corps solide*.

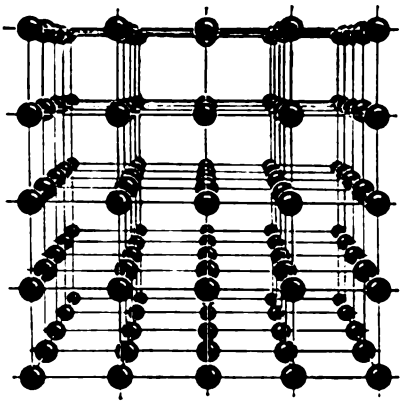


Fig. 129

Certains corps solides, par exemple, des morceaux de métal, etc., sont constitués de tout petits cristaux. Les atomes et les molécules qui constituent le cristal y sont rangés dans un ordre déterminé. Sur la figure 129 on a représenté un modèle de cristal composé de « sphères » (atomes) et de « barreaux » liant ces « sphères ». Si l'on considère les barreaux rigides et impondérables, les sphères étant rangées dans un ordre quelconque, on pourra alors assimiler tout corps solide à un modèle de cristal. Les particules séparées du corps rigide absolu peuvent être considérées comme constituées d'atomes isolés ou d'un certain ensemble suffisamment grand d'atomes et de molécules constamment liés l'un à l'autre de façon invariable. Dans le mouvement du corps solide chaque particule décrit sa propre trajectoire, mais cette trajectoire est reliée de façon régulière et bien déterminée aux trajectoires des autres particules. Chaque particule est sollicitée par certaines forces émanant des autres particules voisines (forces émanant des barreaux) : ce sont les *forces intérieures*

du corps solide ; à chaque particule peuvent également être appliquées des forces de la part d'autres corps, les *forces extérieures* ; par exemple la force de gravitation attirant les particules vers la Terre constitue une force extérieure.

Tout mouvement composé du corps solide se décompose en des mouvements simples : la *translation* et la *rotation*. Commençons donc l'étude des mouvements du corps solide par l'analyse de ces mouvements élémentaires.

On appelle *translation* du corps solide le mouvement dans lequel *chaque ligne* joignant *deux* points *quelconques* du corps conserve une direction *invariable* dans l'espace. En général, la translation peut être non rectiligne ; par exemple, la cabine avec les passagers d'une grande roue dont le modèle est représenté à la figure 130 a un mouvement de translation, la trajectoire de chaque point étant une circonférence. Dans la translation le corps solide se déplace sans pivoter et toute ligne de ce corps reste parallèle à elle-même, c'est-à-dire que le déplacement de tous les points du corps durant tout laps de temps est le même. Donc dans la translation du corps solide tous ses points ont à un instant donné une même vitesse et, partant une même accélération. Le mouvement de translation est donc le plus simple des mouvements ; connaissant le mouvement d'un de ses points, on peut en déduire le mouvement des autres points du corps. Ainsi, par exemple, quand une motocyclette se déplace en ligne droite, le motocycliste effectue un mouvement de translation rectiligne, les roues effectuant un mouvement composé, de translation et de rotation, tandis que le piston du moteur de la moto accomplit un mouvement de translation non rectiligne.

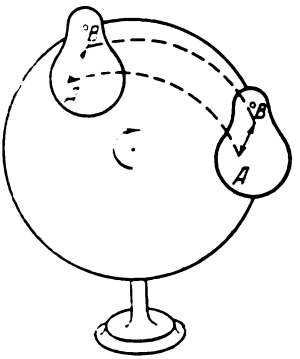


Fig. 130

Le mouvement du corps solide est dit *plan* (ou plan-parallèle) si au cours du mouvement tout point (ou particule) du corps solide reste dans l'un des plans parallèles. Dans un mouvement plan, la trajectoire de chaque point du corps reste dans le plan, les plans de toutes les trajectoires coïncidant ou occupant des positions mutuellement parallèles. Ainsi, dans le mouvement rectiligne de la moto, les roues et le piston effectuent un mouvement plan, tandis que l'arbre d'entraînement de la roue dont l'axe coïncide avec la direction de la vitesse de la moto, exécute un mouvement qui n'est pas plan. Un cylindre de section elliptique roulant sans glissement sur la table exécute un mouvement plan (fig. 131, *a*), tandis qu'un cône qui roule sur la table (fig. 131, *b*) effectue un mouvement non plan.

On appelle *rotation* un mouvement dans lequel les *trajectoires* de tous les points du solide sont des *circonférences concentriques* dont le centre se dispose sur une même droite, dite *axe de rotation*. Ainsi,

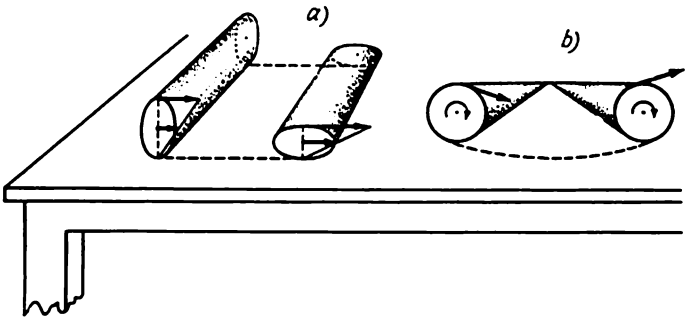


Fig. 131

par exemple, l'arbre d'un moteur en marche d'une voiture immobile effectue un mouvement rotatif. L'axe de rotation immobile passe par des points constamment liés au corps qui restent au repos dan

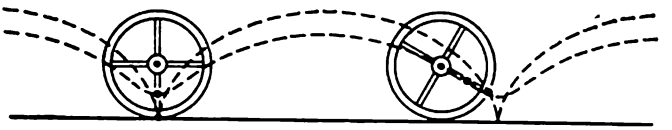


Fig. 132

le mouvement du corps. L'axe de rotation peut se trouver à l'extérieur du corps ou traverser le corps. Le mouvement de rotation autour d'un axe fixe est toujours un mouvement plan.

Le mouvement de la roue d'une voiture en mouvement rectiligne d'une automobile, d'un wagon est un mouvement composé : il se compose d'une rotation de la roue autour de son axe et d'un mouvement de translation de l'axe solidaire de la voiture. Les trajectoires des différents points de la roue sont des courbes complexes, les cycloïdes (fig. 132). Les trajectoires des points de la roue dans le référentiel solidaire de la voiture sont des circonférences. Le déplacement de tout point de la roue relativement à la voie se décompose en deux parties : la première est définie par le déplacement de l'axe et la seconde, par la rotation de la roue autour de l'axe. La vitesse $\boldsymbol{v}$ de tout point de la roue par rapport à la route est donc la somme de deux vitesses : la vitesse de l'axe $\boldsymbol{v}_0$ et la vitesse linéaire du mouvement rotatif autour de l'axe $\boldsymbol{v}_1 = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}]$ (fig. 133).

La rotation du corps se définit par la grandeur de la vitesse angulaire. Imaginons qu'une certaine ligne passant par deux points A et B du corps et située dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation occupe une position déterminée dans l'espace à l'instant t; à l'instant suivant $t + dt$ cette même ligne prend une autre position A' et B' qui forme avec la position antérieure un angle $d\alpha$. La grandeur égale à $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ est appelée *vitesse angulaire du corps*. Il est évident que la vitesse angulaire est indépendante du choix des points A et B dans tout plan perpendiculaire à l'axe; donc la vitesse angulaire définit le mouvement du corps dans son ensemble.

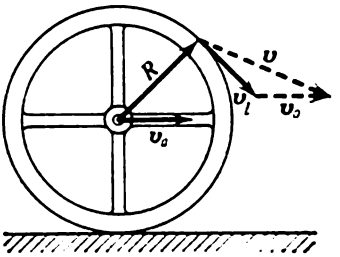


Fig. 133

Comme il a déjà été dit (§ 47), la vitesse angulaire se désigne par un vecteur dirigé parallèlement à l'axe de rotation.

§ 51. CONDITIONS D'ÉQUILIBRE DU CORPS SOLIDE AYANT UN AXE FIXE

On admet que dans un corps rigide absolu les points conservent invariable leur position mutuelle, c'est-à-dire que le corps ne se déforme pas. Si deux forces égales sont appliquées au corps solide en deux points A et B et sont dirigées dans des sens opposés suivant la droite AB, l'effet résultant sera nul, autrement dit, l'action des forces ne modifiera pas le mouvement du corps. On peut donc dans un corps solide (où les déformations ne jouent pas) transporter la force en tout point le long de la ligne d'action (fig. 134, *a*).

En effet, en tout point B situé sur la ligne d'action de la force $\boldsymbol{F}$ appliquée au point A, on peut appliquer deux forces égales et opposées $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ dont l'une, précisément $\boldsymbol{F}_2$ est égale à $\boldsymbol{F}$. La somme des forces $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F} = 0$; donc le corps n'est soumis qu'à la force $\boldsymbol{F}_2$ appliquée au point B. Autrement dit, l'action de la force $\boldsymbol{F}$ peut être remplacée par celle de la force $\boldsymbol{F}_2$. Mathématiquement cela s'énonce ainsi : l'action de la force sur le corps solide peut se représenter par un *vecteur glissant* dont la grandeur et la direction ne varient pas dans son déplacement le long de la ligne d'action. Les vecteurs reliés à un point déterminé sont dits *polaires*.

Il est connu que l'équilibre d'un corps en rotation autour d'un axe n'est réalisé qu'au cas où la somme des moments de toutes les forces est nulle.

La nécessité de l'introduction du moment des forces découle de façon évidente des expériences simples sur l'équilibre du corps en rotation autour de son axe sous l'action de plusieurs forces. Par

exemple, l'arbre sur lequel est monté un disque est sollicité par deux forces f et F (fig. 134, *b*). Si le frottement dans les paliers de l'arbre est faible, l'équilibre ne s'établit qu'à la condition $fR = Fr$, c'est-à-dire quand les moments de forces sont égaux en grandeur et opposés.

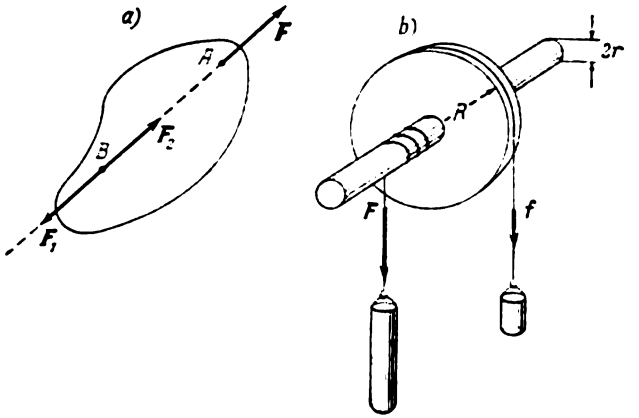


Fig. 134

On appelle moment d'une force relativement à un axe la grandeur physique numériquement égale au produit de la force par le bras de levier, les moments de forces d'un sens étant considérés comme positifs et de l'autre, comme négatifs. On appelle *bras de levier* relativement à l'axe considéré la distance la plus courte entre l'axe de rotation du corps et la ligne d'action de la force.

Donc pour définir le repos ou l'équilibre du corps en mouvement de rotation libre autour d'un axe fixe il faut connaître non pas les forces mais leurs moments par rapport à l'axe de rotation qui joueront le même rôle que les forces dans le mouvement du point.

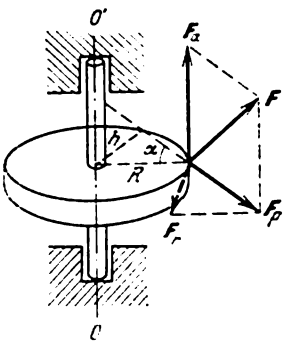


Fig. 135

Définissons de façon plus précise cette grandeur physique, le moment de la force par rapport à l'axe. Dans le cas général, quand la force appliquée au corps est dirigée de façon quelconque, elle peut se décomposer en deux composantes : l'une située dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation F_p et l'autre parallèle à l'axe de rotation F_a (fig. 135). La force F_a est parallèle à l'axe de rotation OO' et ne peut entraîner le corps dans la rotation autour de l'axe, sa présence ne contribue aucunement à l'équilibre du corps

solide en rotation autour de l'axe fixe. La force F_a fléchira l'axe en le déformant avec le corps, mais tant qu'on étudie le mouvement d'un corps solide indéformable, on peut négliger la composante F_a. Donc en déterminant le moment de la force par rapport à l'axe, on ne doit tenir compte que de l'action de la composante F_p située dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation.

Donc, le moment de toute force par rapport à l'axe sera égal au produit de la composante F_p par le bras de levier h ou, comme il découle de la figure 135, au produit de la composante de rotation F_r par la distance R du point d'application de la force à l'axe. La composante de rotation F_r est perpendiculaire au plan passant par la ligne R et l'axe. Bref, la grandeur du moment M par rapport à l'axe est égale à

$$M = F_p h = F_r R. \tag{51.1}$$

Formulons maintenant la condition d'équilibre d'un corps solide ayant un axe fixe: *l'équilibre n'a lieu qu'au cas où la somme des moments par rapport à l'axe est nulle.*

§ 52. DYNAMIQUE D'UN CORPS EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE

Lorsqu'un corps solide tourne autour d'un axe fixe, les trajectoires de toutes les particules constituent des circonférences dont les centres se trouvent sur une même droite formant l'axe de rotation.

Toutes les particules du corps effectuent un mouvement plan, les vitesses et les accélérations de diverses particules étant, en général, différentes: plus la particule est éloignée de l'axe plus sa vitesse est grande. Quant à la vitesse angulaire, elle est *la même* pour toutes les parties du corps: elle définit complètement le mouvement de tout le corps solide dans sa rotation autour de l'axe fixe.

Pour peu que la vitesse angulaire varie dans le temps (croisse ou diminue) cette variation, comme dans le cas de la variation de la vitesse linéaire du point, se caractérise par l'*accélération angulaire* ou par la « vitesse » de variation de la vitesse angulaire, autrement dit par la dérivée $\frac{d\omega}{dt}$. Vu que pour un instant donné la vitesse angulaire est la même pour toutes les parties du corps solide, il est évident qu'il en est de même pour l'accélération angulaire $\beta = \frac{d\omega}{dt}$.

L'accélération linéaire de chaque particule du corps est différente et se situe dans le plan de la trajectoire de la particule. Déterminons la liaison de l'accélération angulaire β avec la composante de l'accélération de la particule suivant la tangente à la trajectoire.

Sur la figure 136 on a montré la trajectoire d'une particule dont la vitesse est $v = \omega r$, où r est la distance de la particule de l'axe. La composante tangentielle de l'accélération w_t se définit par la variation de la vitesse v suivant la trajectoire; elle est

$$w_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\beta, \tag{52.1}$$

car r est constant dans le temps. Donc, la composante tangentielle de l'accélération de la particule du corps est égale à l'accélération angulaire β du corps multipliée par la distance r de la particule de l'axe.

Etablissons maintenant la liaison entre l'accélération angulaire et le moment des forces agissant sur le corps en rotation autour de l'axe. Cette liaison de causalité doit exister, car l'équilibre (le repos

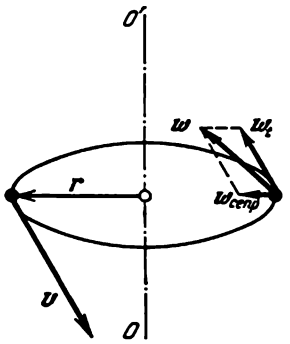


Fig. 136

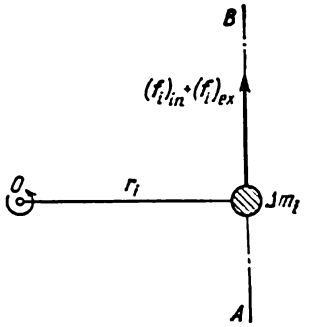


Fig. 137

ou la rotation uniforme) se définit par l'égalité à zéro des moments des forces. En effet, aussitôt que le moment des forces par rapport à l'axe du corps au repos devient différent de zéro, l'équilibre est rompu et une accélération angulaire est communiquée au corps.

Pour retrouver la liaison entre l'accélération angulaire du corps et les moments des forces agissant sur lui, examinons au préalable le mouvement d'une particule quelconque du corps. Soit r_i la distance de l'axe d'une particule de masse Δm_i (fig. 137). Supposons que sur la particule agissent des forces intérieures et extérieures: les forces extérieures provenant d'autres corps et les forces intérieures étant dues aux particules du corps lui-même. Projetons ces forces sur la ligne AB perpendiculaire à r_i et située dans le plan perpenduculaire à l'axe. Admettons que la grandeur de cette projection est

$$(f_i)_{\text{in}} + (f_i)_{\text{ex}},$$

où $(f_i)_{\text{in}}$ est la composante rotative des forces intérieures, $(f_i)_{\text{ex}}$, la composante rotative des forces extérieures. Les forces engendrant

la rotation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre sont considérées comme positives. Dans ce cas la seconde équation de la dynamique pour la i-ème particule peut s'écrire ainsi :

$$\Delta m_i \frac{dv_i}{dt} = \Delta m_i r_i \frac{d\omega}{dt} = (f_i)_{\text{in}} + (f_i)_{\text{ex}}. \tag{52.2}$$

Cherchons le moment de la force appliquée à la particule par rapport à l'axe ; pour cela multiplions (52.2) par r_i et il vient

$$\Delta m_i r_i^2 \frac{d\omega}{dt} = r_i (f_i)_{\text{in}} + r_i (f_i)_{\text{ex}}. \tag{52.3}$$

Ecrivons maintenant les égalités analogues pour toutes les particules composant le corps solide donné et ajoutons-les membre à membre ; on obtient

$$\frac{d\omega}{dt} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i r_i (f_i)_{\text{in}} + \sum_i r_i (f_i)_{\text{ex}}. \tag{52.4}$$

Notons tout d'abord que $\sum_i r_i (f_i)_{\text{in}} = 0$, c'est-à-dire que le moment des forces intérieures est nul. En effet, chaque force intérieure est contrebalancée par une force égale et opposée appliquée à l'autre particule du corps avec le même bras de levier.

La somme $\sum_i r_i (f_i)_{\text{ex}} = M$ constitue le moment rotatif de toutes les forces extérieures appliquées au corps. La grandeur

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \tag{52.5}$$

porte un nom particulier : *moment d'inertie* par rapport à l'axe de rotation considéré.

Ecrivons maintenant l'équation (52.4) ainsi :

$$M = I \frac{d\omega}{dt} ; \tag{52.6}$$

elle se lit: *le moment des forces extérieures entraînant le corps dans la rotation autour de l'axe donné est égal au moment d'inertie du corps par rapport à cet axe multiplié par l'accélération angulaire du corps.* C'est la loi fondamentale de la dynamique pour un corps solide en rotation autour d'un axe immobile. Il s'énonce comme la seconde loi de la dynamique pour le mouvement du point, mais au lieu de la force y figure le moment de forces par rapport à l'axe, au lieu de l'accélération linéaire l'accélération angulaire, au lieu de la masse le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

Le moment d'inertie du corps solide par rapport à l'axe est une grandeur physique égale à la somme des produits de la masse de chacune des particules composant le corps donné par le carré de la distance de la particule jusqu'à l'axe. Le moment d'inertie par

rapport à l'axe donné dépend non seulement de la masse du corps, mais également de la répartition des masses relativement à l'axe. En éloignant les particules du corps de l'axe, on augmente par là même le moment d'inertie du corps.

La dimension du moment d'inertie dans le système SI est $kg \cdot m^2$ et dans le système CGS $g \cdot cm^2$.

Pour calculer le moment d'inertie, il faut diviser le corps en des particules suffisamment petites, mesurer la distance de chaque particule de l'axe, multiplier la masse de chacune des particules par le carré de sa distance à l'axe puis, après l'avoir effectué pour chaque particule, additionner les résultats obtenus. Ainsi, par exemple, pour un corps composé de huit sphères identiques se disposant aux sommets d'un cube dont l'arête est a (fig. 138) le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par l'arête du cube est égal à

$$I = 4ma^2 + 2m\,(a^2 + a^2) = 8ma^2,$$

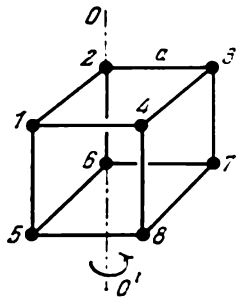


Fig 138

où m est la masse d'une sphère. Le moment d'inertie de quatre sphères (*1*, *3*, *5*, *7*) sera égal à $4ma^2$, tandis que le moment d'inertie de deux sphères (*4*, *8*) est aussi égal à $4ma^2$, le moment d'inertie des sphères (*2*, *6*) est égal à zéro. Notons que ce calcul se justifie que si le diamètre des sphères est très petit par rapport à a. Le calcul des moments d'inertie des corps pleins et homogènes sera traité plus loin au § 59.

Le rôle physique et la signification du moment d'inertie se dégage de tous les exemples traitant de la rotation du corps fixé sur un axe. Par exemple, un seau vide descendra dans le puits d'autant plus lentement que le moment d'inertie du treuil est plus grand. Le mouvement du seau et l'action du moment d'inertie peuvent être facilement illustrés à l'aide du dispositif montré sur la figure 139 en double projection. Une petite poulie pivotant sur un axe horizontal est solidaire d'une tige A sur laquelle, à des distances déterminées et égales, sont fixées deux masses m_1 et m_2. Sur la poulie est enroulée une ficelle au bout libre de laquelle est suspendue une charge de masse m. La charge, en descendant, met en mouvement la poulie et la tige A. Si l'on rapproche les masses sur la tige de l'axe, on verra que la charge m descend assez vite, le moment d'inertie de la tige avec les masses est relativement petit. Si au contraire, on écarte les masses sur la tige vers les deux bouts, en augmentant le moment d'inertie de plusieurs fois, on observera une lente descente de la charge m ainsi qu'une lente rotation.

Examinons en détail le mouvement des charges et cherchons la loi du mouvement. Notons tout d'abord qu'une fois le déroulement de la ficelle achevé, la tige A continuera de tourner par inertie dans le même sens, la ficelle s'enroulant de nouveau sur la poulie, ce qui fera monter la charge m. Quand la rotation de la tige cessera la charge m recommencera à descendre, le processus de montée et de descente de la charge se poursuivant dans le même ordre. Il va de soi que les accélérations des corps mobiles (l'accélération angulaire de la poulie et de

la tige en rotation et l'accélération linéaire de la charge m) seront constantes dans le temps ainsi qu'identiques dans la montée et dans la descente de la charge m. En effet, la force « agissante » est la force de gravitation de la charge $P = mg$ qui est constante et toujours dirigée vers le bas.

Etablissons l'équation de la dynamique pour la tige en rotation (avec les masses) et de la charge m. Désignons l'accélération angulaire par $\beta = \frac{d\omega}{dt}$ et écrivons les équations

$$\begin{aligned} &\text{pour la tige } f'R = I\beta, \\ &\text{pour la charge } P - f = ma,\ f = f', \end{aligned} \tag{52.7}$$

où f et f' sont les forces de tension de la ficelle, I le moment d'inertie de la poulie avec la tige, R le rayon de la poulie, a l'accélération linéaire de la charge.

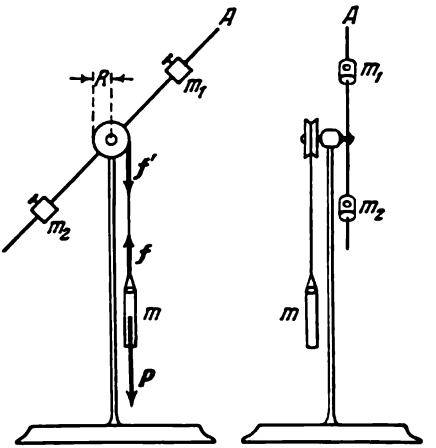


Fig. 139

L'accélération angulaire de la poulie et l'accélération de la charge sont liées entre elles par la relation suivante

$$a = R\beta,$$

car à la rotation de la poulie de l'angle α correspond un déplacement vertical de la charge m de la grandeur $\Delta = R\alpha$. En effet, en dérivant $\Delta = R\alpha$ deux fois, on obtient les relations mentionnées car

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} = a \quad \text{et} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \beta.$$

En résolvant l'équation (52.7), on obtient l'accélération angulaire de la poulie β et l'accélération linéaire de la charge α:

$$\beta = \frac{g}{R}\,\frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}}, \qquad a = \frac{g}{1+\frac{I}{mR^2}}. \tag{52.8}$$

On voit ainsi que l'accélération a peut être très petite par rapport à g si $I \gg mR^2$ [1].

En faisant varier la distance des masses sur la tige de l'axe de rotation, on modifie le moment d'inertie I et, partant, le temps de montée et de descente de la charge. On peut expérimentalement déterminer le temps de descente de la charge pour une certaine distance et, sur cette base, calculer l'accélération a, puis mesurant les grandeurs m et R, évaluer I d'après la formule (52.8).

§ 53. MOMENT DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Dans l'analyse du mouvement de rotation d'un corps au lieu de la force on voit intervenir son moment, au lieu de la masse, le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe; mais quelle est la grandeur que l'on substitue à la quantité de mouvement du point? Cette grandeur est le *moment de la quantité de mouvement* du corps par rapport à l'axe.

On appelle *moment de la quantité de mouvement* d'une particule du corps de masse Δm_i le produit de la distance de l'axe de rotation jusqu'à la particule r_i par la grandeur de la quantité de mouvement de cette particule $\Delta m_i v_i$. Ainsi le moment de la quantité de mouvement est numériquement égal à

$$\Delta m_i v_i r_i. \tag{53.1}$$

Le moment de la quantité de mouvement d'un corps solide par rapport à un axe est égal à la somme des moments de la quantité de mouvement des particules isolées

$$N = \sum_i \Delta m_i r_i v_i. \tag{53.2}$$

L'expression de la quantité de mouvement peut être représentée de la façon suivante :

$$N = \sum_i \Delta m_i r_i r_i \omega = \omega \sum_i \Delta m_i r_i^2 = I\omega. \tag{53.3}$$

La grandeur du moment de la quantité de mouvement d'un corps solide par rapport à un axe est numériquement égale au produit du moment d'inertie du corps par rapport à cet axe par la vitesse angulaire.

On peut maintenant écrire la loi fondamentale de la dynamique pour un corps solide en rotation autour d'un axe de la façon suivante :

$$\frac{dN}{dt} = M, \tag{53.4}$$

ou : *la dérivée du moment de la quantité de mouvement du corps par rapport à un axe de rotation est égale au moment des forces par rapport au même axe.*

[1] Notons que les relations déduites s'avèrent fausses près du point le plus bas de la descente de la charge, quand la ficelle passe d'un côté de la poulie à l'autre. Le mouvement de la charge m s'effectue ici également dans le sens horizontal et le moment faisant tourner la poulie ne sera plus égal à fR.

Si le moment des forces extérieures M est nul le moment de la quantité de mouvement du corps reste constant :

$$\frac{dN}{dt}=0, \quad N=\text{const}, \quad I\omega=\text{const}. \tag{53.5}$$

C'est l'énoncé de la *loi de conservation* du moment de la quantité de mouvement.

La rotation d'un corps solide autour d'un axe pour $M = 0$, c'est-à-dire sa rotation avec un moment de la quantité de mouvement constant, est analogue au mouvement du point « par inertie » quand $mv =$ const. Toutefois il existe une différence entre ces situations analogues : le mouvement d'un point par inertie est un mouvement à une vitesse constante, quand la masse du point reste invariable, tandis que le mouvement d'un corps avec un moment de la quantité de mouvement constant N, ce n'est pas toujours un mouvement avec une vitesse angulaire constante ω, car le moment d'inertie du corps I peut facilement se modifier au cours du mouvement. Ainsi, par exemple, si on modifie le moment d'inertie du corps entraîné au préalable dans la rotation, la vitesse de rotation ω se modifiera en général. Si, en outre, le moment des forces extérieures est nul, la vitesse angulaire ω variera alors en raison inverse du moment d'inertie. Cette variation de la vitesse angulaire est souvent observée, par exemple, dans la rotation des patineurs sur la glace ; une modification analogue de la vitesse angulaire peut également être illustrée à l'aide du tabouret de Joukovski.

A des fins d'illustration des lois de la dynamique, N. E. Joukovski a proposé d'utiliser un tabouret capable de tourner avec un frottement très faible autour d'un axe vertical (fig. 140). L'expérimentateur se munit d'haltères et s'assied sur un tabouret, ensuite, écartant les bras le plus loin possible, il communique avec son pied un mouvement de rotation au tabouret. Le tabouret continuant de tourner, sans contacter le sol, l'expérimentateur ramène ses bras à la hauteur de la poitrine et augmente sensiblement la vitesse de rotation ; puis, écartant de nouveau les bras, il diminue la vitesse de sa rotation. En faisant varier le moment d'inertie I l'expérimentateur modifie la vitesse de rotation ω, car le produit $I\omega$ doit rester constant, vu que les moments des forces extérieures sont nuls (on peut négliger le moment des forces de frottement).

Le patineur voulant communiquer à son corps un mouvement rapide de rotation (exécuter une figure de toupie) écarte d'abord dans la lancée les bras et le pied, puis serre les bras contre son corps et joint les jambes en se redressant ce qui a pour effet de diminuer fortement le moment d'inertie autour de l'axe vertical et de communiquer ainsi au patineur une rotation rapide.

Profitons de la loi de la quantité de mouvement (53.4) pour analyser la rotation de deux corps en interaction dans l'expérience suivante, proposée par S. E. Khaïkine : le stator d'un petit moteur électrique est monté sur des paliers de façon à lui permettre de tourner sur le même axe que le rotor (fig. 141). On envoie dans l'enroulement du moteur un courant électrique par des bagues montées sur le stator, ce qui a pour effet d'entraîner dans la rotation dans des sens opposés le stator et le rotor. Pour peu que l'on néglige le moment des forces de frottement du stator les moments de la quantité de mouvement du stator et du rotor peuvent être considérés comme égaux et opposés. En effet, les forces magné-

tiques d'interaction du rotor et du stator et les forces de frottement qu'ils engendrent sont des forces intérieures, le moment de toutes ces forces agissant sur le stator est égal et opposé au moment des forces agissant sur le rotor. Le moment extérieur n'est représenté que par le moment des forces de frottement dans les

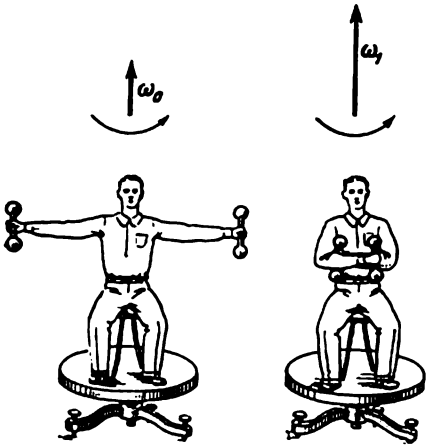


Fig. 140

paliers et les anneaux du stator. Si ce moment est très petit le système rotor-stator possède un moment de la quantité de mouvement commun égal à zéro et, partant, les moments de la quantité de mouvement du stator et du rotor restant égaux et opposés en tout instant.

Dans la réalité le moment des forces extérieures de frottement agissant essentiellement sur le stator se manifeste presque toujours bien que faiblement, c'est pourquoi le moment de la quantité de mouvement du stator sera un peu inférieur à celui du rotor. Pendant la mise en rotation on peut négliger ce moment, car la différence entre les moments de la quantité de mouvement du rotor et du stator est généralement faible devant les grandeurs de chacun des moments de la quantité de mouvement. Mais on est obligé de compter avec cette différence à l'arrêt de la rotation du stator et du rotor une fois le courant coupé. En effet, si l'on coupe le courant et on observe l'amortissement de la rotation sous l'effet des forces de frottement, on verra que, tout d'abord, c'est le stator qui s'arrête, puis, le rotor entraînant le stator, ils continuent tous les deux à tourner dans le sens de rotation du rotor jusqu'à l'arrêt complet du système. Il est évident que si le moment extérieur des frottements n'existait pas et si les moments de la quantité de mouvement du stator et du rotor étaient les mêmes, ces derniers devraient s'arrêter en même temps sous l'action des forces mutuelles de frottement (forces intérieures), car le moment total de la quantité de mouvement du système est à tout instant nul. Mais après le déclenchement du courant le moment de la quantité de mouvement du rotor est plus grand que celui du stator et, de plus, le moment de freinage sur le stator est supérieur à celui sur le rotor ;

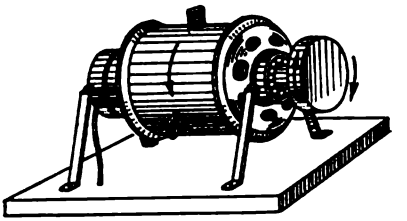


Fig. 141

donc la différence entre ces moments ira croissant dans le temps et le stator s'arrêtera avant le rotor. Ensuite le frottement du rotor en mouvement sur le stator entraînera ce dernier dans le mouvement.

§ 54. ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UN CORPS EN ROTATION

L'énergie cinétique d'un corps en rotation est la somme des énergies cinétiques des particules isolées du corps. L'énergie cinétique de la particule se trouvant à la distance r de l'axe est égale à

$$\frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \omega^2 \frac{\Delta m_i r_i^2}{2}, \tag{54.1}$$

car $v_i = \omega r_i$, et l'énergie cinétique de tout le corps en rotation est

$$E_{\text{cin}} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2} \tag{54.2}$$

et s'exprime de la même manière que l'énergie cinétique d'un corps en translation, la *masse* y étant seulement remplacée par le *moment d'inertie* du corps I et la vitesse *linéaire*, par la vitesse *angulaire* ω.

On peut représenter le travail de la rotation du corps autour d'un axe de la façon habituelle : calculer le produit scalaire pour chaque force par la distance parcourue par le point d'application de la force. Mais ce travail peut être exprimé au moyen du moment des forces. Le point d'application de la force F se meut sur une circonférence de rayon R ; soit F_r la projection de cette force sur la tangente à cette circonférence ; durant le temps dt le point d'application de la force s'est déplacé de $R\,d\alpha$, où $d\alpha$ est l'angle de pivotement du corps. Et, par suite, le travail des forces durant le temps dt sera

$$F_r R\, d\alpha.$$

La grandeur $F_r R$ est égale au moment de la force M et par conséquent, le travail peut s'écrire ainsi :

$$M\, d\alpha.$$

Quant au travail durant le laps de temps t, il sera égal à $\int_0^t M\, d\alpha$.

Autrement dit, *dans la rotation le travail de la force se mesure par le produit du moment des forces par l'angle de pivotement* et si le moment des forces est variable, par l'intégrale du moment par rapport à l'angle de pivotement.

On peut montrer que si au corps n'est appliqué que le moment de la force M, le travail des forces sera égal à l'accroissement de l'énergie cinétique.

En effet, suivant la loi de la dynamique (52.6)

$$M = I\frac{d\omega}{dt}, \tag{54.3}$$

où I est le moment d'inertie, ω la vitesse angulaire; multiplions les deux membres de l'égalité par $d\alpha = \omega\, dt$, l'angle dont a pivoté le corps durant le temps dt. Il vient alors

$$M\, d\alpha = I\frac{d\omega}{dt}\omega\, dt = I d\left(\frac{\omega^2}{2}\right),$$

ou le travail au cours du temps t est

$$\int_0^t M\, d\alpha = I\int_0^t d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = \left(\frac{I\omega^2}{2}\right)_t - \left(\frac{I\omega^2}{2}\right)_0. \tag{54.4}$$

Ainsi est démontrée l'assertion formulée au début de l'alinéa [1].

On peut maintenant confronter le mouvement du point avec la rotation du corps solide autour d'un axe fixe de la façon suivante:

Mouvement du point matériel	Rotation du corps solide autour d'un axe
Masse m	Moment d'inertie par rapport à l'axe I
Résultante des forces extérieures $\boldsymbol{F}$	Somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe $\boldsymbol{M}$
Déplacement x	Angle de rotation α
Vitesse $\boldsymbol{v}$	Vitesse angulaire de rotation $\boldsymbol{\omega}$
Accélération $\boldsymbol{a}$	Accélération angulaire $\boldsymbol{\beta}$
Quantité de mouvement $\boldsymbol{K} = m\boldsymbol{v}$	Moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe $\boldsymbol{N} = I\boldsymbol{\omega}$
Energie cinétique $mv^2/2$	Energie cinétique $I\omega^2/2$
Travail $F\, dx$	Travail $M d\alpha$
Deuxième loi de la dynamique $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, ou $\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{K}}{dt}$	Loi de la dynamique $\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\beta}$, ou $\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{N}}{dt}$

Examinons quelques expériences où l'énergie cinétique des corps en rotation est variable. Tout d'abord voyons comment varie l'énergie cinétique du corps en rotation dans les expériences avec le tabouret de Joukovski décrites dans le paragraphe précédent (voir fig. 140). Quand l'expérimentateur tourne les haltères dans les mains, l'énergie cinétique du corps tournant varie, à savoir, elle croît avec la diminution du moment d'inertie. En effet, le moment de la quantité de mouvement $I\omega$ reste constant, pendant que ω croît; et, par suite, l'énergie égale à $I\omega^2/2$ augmente. L'expérimentateur effectue un certain travail pour surmonter les forces centrifuges d'inertie; et c'est aux dépens de ce travail de l'expérimentateur que l'énergie cinétique du système augmente.

[1] Les formules (54.3) et (54.4) sont vraies pour I = const.

En éloignant les haltères de l'axe, il se produit un phénomène contraire. l'énergie cinétique diminue de la grandeur du travail réalisé par les forces d'inertie centrifuges au cours du mouvement des haltères le long des rayons.

En qualité d'exercice on propose de calculer que le travail dépensé par l'expérimentateur en rapprochant les haltères est exactement égal à la variation de l'énergie cinétique.

Il en est de même dans les expériences de la mise en rotation du stator et du rotor (fig. 141) quand l'énergie cinétique s'accroît : s'il est possible de négliger les forces de frottement extérieures l'énergie cinétique du corps dont le moment d'inertie est plus grand sera à tout instant inférieure. Supposons que le moment d'inertie du stator soit de quatre fois supérieur à celui du rotor; la vitesse angulaire du rotor sera alors quatre fois plus grande que celle du stator. Etant donné que le moment de la quantité de mouvement ($I\omega$) du stator et du rotor est le même, il s'ensuit que l'énergie cinétique du stator est de quatre

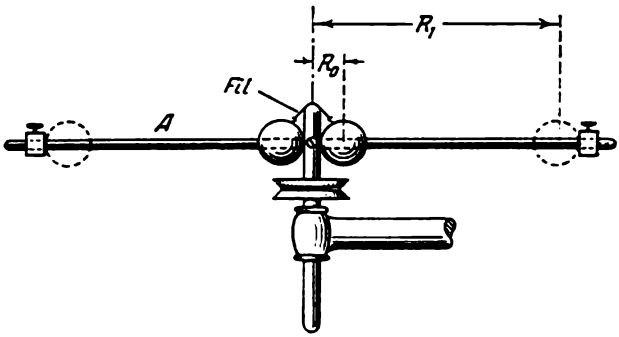


Fig. 142

fois inférieure à l'énergie cinétique du rotor. Le corps possédant un moment d'inertie inférieur « absorbera » une plus grande quantité d'énergie quand les deux corps sont mis en rotation par des forces intérieures. Le travail dépensé par la source de forces électromagnétiques se répartira entre le stator et le rotor en raison inverse du moment d'inertie de chacun d'eux.

Il est instructif d'analyser la variation d'énergie cinétique dans l'exemple suivant. Une tige A est fixée (fig. 142) au rotor d'une centrifugeuse perpendiculairement à l'arbre. Sur la tige sont montées deux sphères identiques qui peuvent glisser sur elle. Au début les deux sphères sont réunies par un fil ; en déconnectant le rotor de la commande on lui communique avec la main une certaine vitesse angulaire ω_0, puis on brûle le fil joignant les sphères. Les sphères glissent naturellement vers les bouts de la tige, où des butées disposées à des distances égales les arrêtent et empêchent les sphères de quitter la tige. Quelle sera la vitesse de rotation du rotor, si l'on néglige les forces de frottement?

Résolvons le problème de la sorte : supposons qu'à l'origine les sphères se trouvaient à la distance R_0 du centre et qu'à l'instant t elles s'en éloignent de R. Dans ce cas la vitesse angulaire peut se déduire de la condition de la constance du moment de la quantité de mouvement :

$$N = (I_0 + 2mR_0^2)\,\omega_0 = (I_0 + 2mR^2)\,\omega = \text{const}, \qquad (54.5)$$

où m est la masse de la sphère, et I_0 le moment d'inertie du rotor et de la tige. L'énergie cinétique de la rotation sera à cet instant égale à

$$E = \frac{1}{2}(I_0 + 2mR^2)\,\omega^2 = \frac{1}{2}N\omega. \qquad (54.6)$$

Quand les sphères s'arrêteront aux butées à la distance R_1 de l'axe, la vitesse angulaire de rotation, en vertu de l'égalité (54.5), sera égale à

$$\omega_1 = \frac{N}{I_0 + 2mR_1^2}. \tag{54.7}$$

Il est évident que la vitesse angulaire diminue; l'énergie cinétique diminue donc également de la grandeur

$$\Delta E = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1). \tag{54.8}$$

Où a passé l'énergie ΔE, sous quelle forme et comment? On avait cependant supposé que les forces de frottement étaient négligeables. Pour tirer l'affaire au clair, reprenons les raisonnements.

Tout d'abord, l'expression (54.6) indique que l'énergie cinétique de rotation commence à diminuer dès que les sphères sont mises en mouvement ($R > R_0$): le moment de la quantité de mouvement est constant, tandis que la vitesse angulaire décroît. Cela contredit la loi de conservation de l'énergie. La formule (54.6) ne tient donc pas compte de toute l'énergie cinétique des corps en mouvement. C'est justement le cas. L'expression (54.6) omet l'énergie cinétique du mouvement des sphères suivant le rayon; la perte d'énergie enregistrée par la formule (54.8) fournit précisément la grandeur de cette énergie.

Dans le choc des sphères, après lequel elles s'arrêtent aux butées, toute l'énergie cinétique du mouvement le long de la tige s'est transformée en chaleur, comme dans tout choc mou. La formule (54.8) fournit justement la grandeur de l'énergie transformée en chaleur.

Il est intéressant de savoir ce qui se passerait au cas d'un choc élastique des sphères contre les butées, c'est-à-dire en l'absence de transformation de l'énergie mécanique en énergie thérmique? Il va de soi que dans le cas du choc élastique les sphères animées le long du rayon de la vitesse v_0 rebondiront après le choc avec la même vitesse v_0 vers le centre. La force centrifuge freinera leur mouvement et la vitesse angulaire croîtra de nouveau; les sphères ne s'arrêteront que pour $R = R_0$ quand la vitesse angulaire reprendra sa valeur initiale ω_0. Ensuite, les sphères glisseront vers la périphérie et le phénomène se répétera périodiquement: les sphères oscilleront le long du rayon, la vitesse angulaire variant également périodiquement, etc. L'image décrite a lieu en l'absence de forces de frottement, en cas de rotation du disque et du glissement des sphères le long de la tige.

En réalité les sphères ne s'arrêtent pas aussitôt aux butées et le phénomène se déroule ainsi: les sphères rebondissent sur les butées à une petite distance et après plusieurs chocs successifs d'intensité décroissante les sphères s'arrêteront définitivement près des butées. L'énergie cinétique des sphères se transforme en chaleur aussi bien dans le glissement le long de la tige qu'au cours des chocs et la quantité totale de l'énergie dissipée sera égale à ΔE (voir (54.8)), si l'on néglige les pertes d'énergie par frottement dans la rotation du rotor et de la tige.

§ 55. CENTRE DE PESANTEUR (DE GRAVITÉ) ET CENTRE D'INERTIE DU CORPS SOLIDE

Dans tout mouvement du corps solide il est essentiel de connaître le mouvement d'un point remarquable du corps solide, appelé *centre d'inertie* (ou *centre des masses*). Le centre d'inertie coïncide avec le *centre de pesanteur* (ou *de gravité*) du corps connu du cours de physique enseigné à l'école secondaire. Examinons les modes de détermination du centre de pesanteur du corps solide.

Sur chaque particule du corps solide agit la force de gravitation de la Terre. Toutes les forces de gravitation sont mutuellement *parallèles* si les dimensions du corps sont petites devant celles du rayon de la Terre [1] et ont une résultante dont la grandeur est égale à la somme de toutes les forces, car ces forces parallèles sont dirigées dans le même sens. Il apparaît que quelle que soit l'orientation donnée au corps solide cette résultante passe toujours par un même point invariablement lié au corps. Ce point porte le nom de *centre de pesanteur ou de gravité du corps.*

Si l'on fixe le corps en son centre de gravité il demeurera en équilibre quelle que soit la position du corps. Donc *la somme des moments de forces de pesanteur de toutes les particules du corps relativement à tout axe horizontal passant par le centre de pesanteur est nulle.* Le corps une fois suspendu ainsi après rotation autour d'un axe passant par son centre de pesanteur restera en équilibre, car la résultante des forces de pesanteur passe par le point de suspension.

Choisissons un système des coordonnées rectangulaire x', y', z' solidaire au corps, l'origine coïncidant avec le centre de gravité. Désignons les coordonnées de chaque particule du corps solide de numéro i et de masse Δm_i par x'_i, y'_i, z'_i (fig. 143). Tournons le corps de façon que le plan $x'O'y'$ soit horizontal; comme la somme des moments des forces de pesanteur de toutes les particules du corps relativement à l'axe horizontal passant par le centre de pesanteur est nulle, on peut écrire les conditions mathématiques relativement aux axes x' et y' définissant le centre de pesanteur ainsi:

$$\sum_i \Delta m_i g y'_i = 0, \qquad \sum_i \Delta m_i g x'_i = 0.$$

Si maintenant on fait pivoter le corps autour de l'axe y' de 90° on rendra l'axe z' horizontal, et la somme des moments des forces de pesanteur par rapport à cet axe s'annulera, ou

$$\sum_i \Delta m_i g z'_i = 0.$$

Simplifiant ces égalités par la constante g, on obtient les conditions:

$$\sum_i \Delta m_i x'_i = 0, \quad \sum_i \Delta m_i y'_i = 0, \quad \sum_i \Delta m_i z'_i = 0, \qquad (55.1)$$

ou

$$\sum_i \Delta m_i \boldsymbol{r}'_i = 0\,; \qquad (55.2)$$

$\boldsymbol{r}'_i$ étant ici le rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées vers le point d'indice i. Il est évident que quelle que soit l'orientation

[1] C'est seulement dans ce cas que peut être introduite la notion du centre de pesanteur (de gravité) du corps.

des axes x', y', z' par rapport au corps les égalités (55.1) et (55.2) sont toujours satisfaites.

Expérimentalement le centre de gravité peut se déterminer de la façon suivante. Le corps est suspendu à un certain point; en état d'équilibre le corps ne peut occuper que la position dans laquelle son centre de gravité se trouve sur la verticale au-dessous du point d'attache; par un procédé quelconque on trace cette verticale sur le corps, le centre de gravité se trouvant quelque part sur cette ligne.

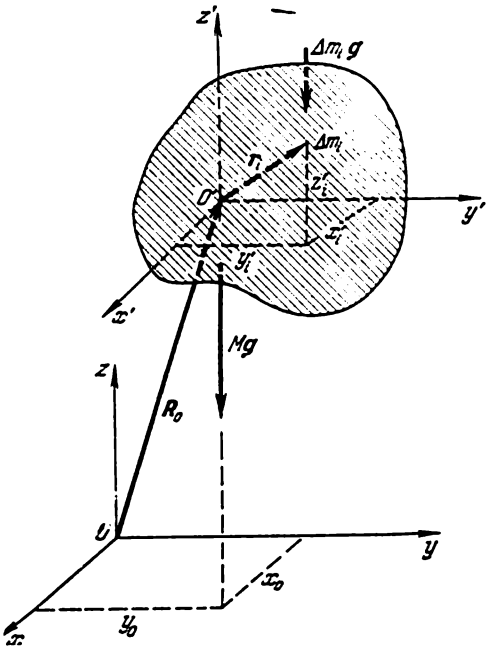


Fig. 143

puis on suspend le corps à un autre point et on trace de nouveau la ligne verticale sur le corps, le centre de gravité se trouvant évidemment à l'intersection de ces deux lignes.

On peut vérifier par l'expérience que le centre de gravité est un point unique. En effet, par quels points le corps ne soit suspendu, chaque fois la ligne du fil à plomb passe par le centre de gravité du corps.

On peut trouver les coordonnées du centre de gravité d'un corps dans tout système des coordonnées fixe si sont connues les coordonnées de toutes les particules du corps dans ce système. Pour ce faire, il faut utiliser la condition suivante: le moment de la force de gravitation de tout le corps par rapport à un axe quelconque doit être égal à la somme des moments des forces de gravitation de toutes les particules du corps par rapport au même axe.

Soit $Oxyz$ un système des coordonnées immobile dont les axes x et y sont horizontaux (voir fig. 143). Les coordonnées x_i, y_i, z_i de chaque particule du corps de masse Δm_i sont supposées connues; il s'agit de trouver les coordonnées du centre de gravité du corps x_0, y_0, z_0 par rapport à $Oxyz$. En accord avec la condition mentionnée plus haut écrivons que les moments par rapport à chaque axe des coordonnées sont égaux:

$$mx_0g = \sum_i \Delta m_i x_i g, \qquad my_0g = \sum_i \Delta m_i y_i g, \qquad mz_0g = \sum_i \Delta m_i z_i g\ ^1;$$

simplifiant ces égalités par g et divisant par m (masse du corps), on trouve les coordonnées du centre de gravité;

$$x_0 = \frac{\sum_i \Delta m_i x_i}{m}, \qquad y_0 = \frac{\sum_i \Delta m_i y_i}{m}, \qquad z_0 = \frac{\sum_i \Delta m_i z_i}{m}. \tag{55.3}$$

Si $\boldsymbol{R}_0$ est le rayon vecteur de composantes x_0, y_0, z_0 et $\boldsymbol{r}_i$ le rayon vecteur de composantes x_i, y_i, z_i, la formule (55.3) peut s'écrire ainsi:

$$\boldsymbol{R}_0 = \frac{\sum_i \Delta m_i \boldsymbol{r}_i}{m}. \tag{55.4}$$

Théoriquement le centre de gravité est habituellement trouvé d'après les formules (55.3) et (55.4); si la masse du corps est répartie de façon continue, ces formules au lieu de sommes contiennent des intégrales. Soit ρ la densité du corps; dans ce cas une particule infiniment petite de volume $dx\,dy\,dz$ et de coordonnées x, y, z aura pour masse $\rho\,dx\,dy\,dz$ et, par suite, la coordonnée x_0 dans les formules (55.3) sera

$$x_0 = \frac{\int\int\int \rho x\,dx\,dy\,dz}{m}; \tag{55.5}$$

des formules analogues seront obtenues pour les autres composantes.

Le centre de gravité des corps homogènes symétriques se trouve sur l'axe de symétrie. Le centre de gravité de certains corps continus peut se disposer à l'extérieur du corps; ainsi, par exemple, le centre de gravité d'un anneau, d'un écrou, d'une rondelle est situé en dehors du corps. La recherche du centre de gravité d'un corps peut s'effectuer par parties, on cherche d'abord le centre de gravité de chacune des parties, puis considérant que la masse de chaque partie est concentrée en son centre de gravité, on détermine, le centre de gravité de tout le corps.

Le centre de gravité, point d'application de la résultante des forces de gravitation n'a de sens que pour des corps petits (dont les dimensions sont faibles devant le rayon de la Terre) et seulement quand les forces de pesanteur des particules isolées peuvent être considérées comme parallèles. Dans le cas contraire il n'existe pas de point unique lié au corps par lequel passe toujours la résultante. Montrons-le sur un exemple simple.

Où passe la résultante des forces agissant sur deux points matériels identiques situés aux extrémités d'un barreau impondérable

[1] Pour obtenir cette dernière égalité on a fait, comme plus haut, pivoter le système des coordonnées $Oxyz$ avec le corps autour de l'axe x (ou de l'axe y).

imaginaire AB de longueur $2R$ (deux rayons de la Terre)? Supposons que le barreau soit disposé comme c'est montré sur la figure 144, *a*; dans ce cas, la résultante de la gravitation passera par le point C de l'axe du barreau situé près du point A. Une construction géométrique simple où l'on tient compte du fait que la force de gravitation en B est cinq fois plus faible qu'en A permet de déterminer la position du point C sur l'axe du barreau. Dans la position du barreau donnée à la figure 144, *b* il devient évident que la résultante des forces de gravitation passe par le milieu du barreau, c'est-à-dire par le point C'. Il devient clair qu'en disposant différemment le barreau, on trouvera chaque fois des points différents sur le barreau, par lesquels passera la résultante des forces de gravitation.

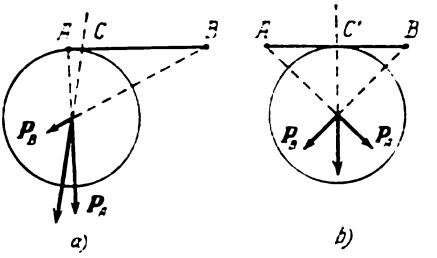


Fig. 144

Comme il le sera éclairci plus bas dans certains problèmes il est important de connaître le centre de gravité de plusieurs corps différents non constamment liés l'un à l'autre. Dans ce cas le centre de gravité du système de corps se détermine également à l'aide des formules (55.3) dans lesquelles m est supposée être la somme des masses de tous les corps. La position du centre de gravité varie dans le temps aussi bien dans l'espace que par rapport aux corps eux-mêmes.

Supposons qu'à chaque particule du corps sont appliquées des *forces de masse parallèles*, c'est-à-dire des forces dont la grandeur est proportionnelle à la masse des particules. La résultante de ces forces comme des forces de gravitation parallèles, quelle que soit leur orientation, passe toujours par un même point invariablement solidaire au corps. Ce point s'appelle *centre d'inertie* ou *centre des masses* et se définit par les formules (55.3) et (55.4). Le centre de gravité coïncide évidemment avec le centre d'inertie, c'est pourquoi parfois, on ne les distingue pas.

§ 56. LOI DU MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE DU CORPS

L'essence de cette loi est la suivante. Supposons qu'on étudie le mouvement d'une caisse sur un plancher lisse ou sur la glace (fig. 145).

Tirons sur la corde attachée à un coin de la caisse; la caisse se déplacera en tournant, elle possédera une accélération angulaire et une vitesse angulaire, le mouvement de la caisse sera un mouvement composé. Mais ce qui est remarquable c'est que dans le mouvement

composé du corps solide se déplaçant sous l'action de la force F appliquée à un point quelconque, *son centre d'inertie se déplace avec l'accélération* a coïncidant en direction avec la direction de la force F et égale à F/m, où m est la masse de tout le corps.

Le centre d'inertie d'un corps solide se meut de la sorte que si toutes les forces extérieures lui étaient appliquées, la masse de tout le corps étant concentrée au centre d'inertie.

Démontrons maintenant cette assertion. Dans tout mouvement composé du corps solide, un rôle important est joué par le mouvement

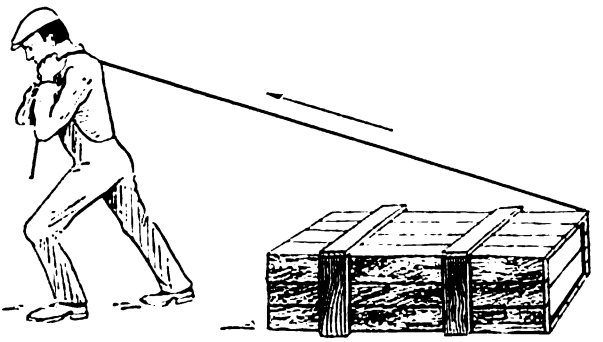


Fig. 145

de son centre d'inertie (ou de son centre des masses). Rappelons que la position du centre d'inertie se définit par les formules (55.2) ou (55.4), à savoir : les rayons vecteurs de toutes les particules du corps r'_i menés du centre d'inertie satisfont à la condition

$$\sum_i \Delta m_i r'_i = 0, \tag{56.1}$$

où Δm_i est la masse de la i-ème particule.

Cette définition du centre d'inertie s'applique également au cas du corps se déformant au cours du mouvement, seulement le centre d'inertie du corps solide conserve une position invariable, tandis que celui du corps déformable se déplace d'une certaine façon relativement aux particules du corps. Mais connaissant, à tout instant, la position des particules du corps, on peut d'après les formules (56.1) ou (55.4), déterminer son centre d'inertie. Etudions donc maintenant la loi du mouvement du centre d'inertie d'un corps quelconque.

Montrons que la somme vectorielle des quantités de mouvement de toutes les particules du corps ou, comme on l'appellera désormais, la *quantité de mouvement du corps* se définit par la masse de tout le corps et par la vitesse du centre d'inertie. Désignons par v_i la vitesse du mouvement de la i-ème particule du corps de masse Δm_i relative-

ment à un système des coordonnées immobile. Admettons que le centre d'inertie du corps est solidaire du système des coordonnées mobile, l'origine des coordonnées coïncidant constamment avec le centre d'inertie et les axes conservant une direction *invariable* dans l'espace. Si la vitesse du mouvement du centre d'inertie du corps est v_0 et la vitesse du mouvement de la i-ème particule dans le référentiel mobile est v_i, alors

$$v_i = v_0 + v_i',$$

ou la vitesse de la i-ème particule dans le référentiel fixe est égale à la somme des vitesses : de la vitesse du centre d'inertie v_0 et de la vitesse de la particule v_i' dans le référentiel mobile. La quantité de mouvement de la i-ème particule est évidemment égale à

$$\Delta k_i = \Delta m_i v_i = \Delta m_i v_0 + \Delta m_i v_i'.$$

La somme de la quantité de mouvement de toutes les particules du corps, égale à la quantité de mouvement du corps, peut s'écrire ainsi :

$$K = \sum_i \Delta k_i = \sum_i \Delta m_i v_0 + \sum_i \Delta m_i v_i'. \qquad (56.2)$$

Le premier terme est

$$\sum_i \Delta m_i v_0 = v_0 \sum_i \Delta m_i = m v_0$$

(m étant la masse du corps) et le second terme

$$\sum_i \Delta m_i v_i' = 0;$$

la dernière égalité découlant de la condition que l'origine du système des coordonnées mobile coïncide avec le centre d'inertie. En effet, si r_i' est le rayon vecteur de la particule dans le référentiel mobile et $\frac{dr_i'}{dt} = v_i'$, alors de l'équation (56.1), vraie pour tout instant, il s'ensuit : $\sum_i \Delta m_i v_i' = 0$. Par conséquent, l'expression (56.2) peut être récrite ainsi :

$$K = m v_0. \qquad (56.3)$$

La quantité de mouvement K de tout corps est égale à sa masse m multipliée par la vitesse de mouvement de son centre d'inertie v_0. La quantité de mouvement de tout le corps est indépendante du mouvement des particules du corps relativement au système des coordonnées mobile en translation avec le centre d'inertie du corps. Un corps solide en mouvement ne peut que pivoter relativement au référentiel mobile. Par conséquent, la quantité de mouvement du corps solide est indé-

pendante de la rotation du corps autour de l'axe passant par son centre d'inertie.

Cherchons maintenant la dépendance de la quantité de mouvement du corps de la grandeur des forces extérieures qui lui sont appliquées.

Appliquons la seconde loi de la dynamique au mouvement de chaque particule du corps. Posons qu'à l'i-ème particule du corps est appliquée la force

$$(\boldsymbol{f}_i)_{\text{in}} + (\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}},$$

où $(\boldsymbol{f}_i)_{\text{in}}$ est la force émanant des particules du corps considéré (force intérieure) et $(\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}}$, la force due à l'action des autres corps (force extérieure). La dérivée de la quantité de mouvement de chacune des particules est égale à la force appliquée, ou

$$\frac{d\,\Delta \boldsymbol{k}_i}{dt} = (\boldsymbol{f}_i)_{\text{in}} + (\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}}. \tag{56.4}$$

Ecrivons ces équations pour toutes les particules et additionnons-les, on obtient en définitive

$$\sum_i \frac{d\,\Delta \boldsymbol{k}_i}{dt} = \sum_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{in}} + \sum_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}}. \tag{56.5}$$

La première somme $\sum_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{in}} = 0$, car les forces $(\boldsymbol{f}_i)_{\text{in}}$ sont intérieures (à chacune étant associée une force égale et opposée), la seconde somme $\sum_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}} = \boldsymbol{F}$ est la somme de toutes les forces extérieures appliquées au corps. L'égalité (56.5) peut donc être récrite ainsi :

$$\frac{d}{dt} \sum_i \Delta \boldsymbol{k}_i = \frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{F}. \tag{56.6}$$

Si l'on tient compte de l'expression de la quantité de mouvement du corps (56.3), la dernière égalité peut être récrite ainsi :

$$m\,\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt} = \boldsymbol{F}, \tag{56.7}$$

où $\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt}$ est l'accélération du centre d'inertie du corps.

Donc, *pour tout corps la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures appliquées au corps* (56.6), et comme la quantité de mouvement est égale à la masse de tout le corps multipliée par la vitesse du centre d'inertie, *l'accélération du centre d'inertie est égale au rapport de la somme de toutes les forces extérieures à la masse de tout le corps* (56.7). Cela signifie que l'accélération du centre d'inertie est indépendante du point d'application de la force extérieure au corps et n'est fonction que de la grandeur de la force et de la direction de son action.

Supposons qu'on ait frappé sur une boîte d'allumettes gisant sur une table de façon que la force du coup passe par le centre d'inertie; la boîte effectuera un mouvement de translation et sa quantité de mouvement sera

$$m\boldsymbol{v}_0 = \int \boldsymbol{F}\, dt. \tag{56.8}$$

Maintenant frappons la boîte sur le coin en admettant que la force du coup est la même; la boîte se déplacera alors en pivotant, mais si la force $\boldsymbol{F}$ est dirigée de la même façon et agit durant le même temps la quantité de mouvement sera égale à $m\boldsymbol{v}_0$ en vertu de la formule (56.8) [1]. Quel que soit le point d'impact et quelle que soit la manière avec laquelle le corps est frappé il prendra le mouvement dans lequel son centre d'inertie se déplacera dans la direction de la force de frappe, la grandeur de la quantité de mouvement se déterminant d'après la formule (56.8), comme pour le point. Par conséquent, la seconde loi de la dynamique acquiert un sens déterminé pour tout corps; c'est pourquoi la notion du centre d'inertie est si importante en dynamique.

Faisons quelques remarques relatives aux notions introduites dans ce paragraphe.

1) L'ensemble des forces extérieures admet une résultante, c'est-à-dire peut être remplacé par une seule force représentant l'action de toutes les forces $(\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}}$ appliquées au corps si seulement les lignes d'action de toutes les forces conversent en un point ou sont parallèles. On appellera donc dans le cas général la force $\boldsymbol{F} = \sum_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}}$ *résultante* des forces extérieures appliquées au corps. La résultante est égale à la somme vectorielle de toutes les $(\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}}$ considérées comme *appliquées en un seul point*. La résultante définit la dérivée de la quantité de mouvement du corps, c'est-à-dire la dynamique du mouvement de translation du corps.

2) Ni la résultante ni la quantité de mouvement du corps ne peuvent fournir d'information sur le mode de rotation du corps au cours de son mouvement. Mais on peut tirer une conclusion importante de la loi fondamentale du mouvement du centre d'inertie (56.6), (56.7): si la résultante est nulle la quantité de mouvement du corps reste invariable ou: la *vitesse* du centre d'inertie du corps soumis aux forces extérieures dont la résultante est nulle, est constante. Si le corps solide est au repos dans un référentiel galiléen, l'action des forces extérieures à résultante nulle l'entraînera dans un mouvement dans lequel le centre d'inertie reste au repos. Dans ces conditions le corps ne peut que pivoter autour de l'axe passant par le centre d'inertie.

---

[1] Réfléchissez et répondez à la question: est-ce que dans les deux cas mentionnés, le travail de la force $\boldsymbol{F}$ sera le même?

L'exemple le plus élémentaire d'un système de forces extérieures à résultante nulle est un couple de forces. *Un couple de forces est un ensemble de deux forces égales et parallèles* appliquées à des points différents et dirigées dans des sens opposés (fig. 146). L'action d'un couple ne provoque pas le déplacement du centre d'inertie du corps.

3) La loi du mouvement du centre d'inertie ou la loi de la variation de la quantité de mouvement (56.6) et (56.7) démontrée pour un corps isolé reste vraie pour tout système de corps (particules). La démonstration de cette dernière assertion est conduite de façon analogue. Chaque corps entrant dans le système est divisé en particules et d'après les formules (55.2) ou (55.4) on détermine la position du centre d'inertie du système de corps pour tout moment de temps. La masse m du système est dans ce cas égale à la somme de masses de tous les corps entrant dans le système. Les forces *extérieures* sont les forces *mises en œuvre par des corps n'entrant pas dans le système*. Les forces agissant entre les particules des corps entrant dans le système sont évidemment considérées comme intérieures. Leur somme est toujours nulle. La loi (56.6) ou (56.7) montre qu'en cas d'égalité à zéro de la résultante des forces extérieures les corps entrant dans le système mécanique ne peuvent être entraînées que dans le mouvement pour lequel la quantité de mouvement de l'ensemble du système reste invariable, le centre d'inertie demeurant au repos ou en mouvement rectiligne et uniforme.

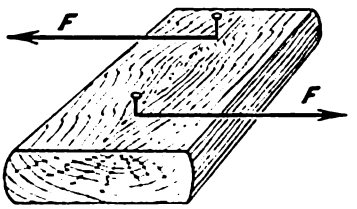


Fig. 146

La résultante des forces extérieures appliquées au système mécanique s'annule dans deux cas : ou bien l'ensemble des forces extérieures se réduit à un couple de forces ou bien le système mécanique est isolé de l'action des corps n'entrant pas dans le système : les forces extérieures n'agissent pas sur le système. Dans ce dernier cas le système est dit *isolé* ou *fermé*. Dans un système fermé seules les forces internes sont en action qui ne peuvent modifier la quantité de mouvement du système.

La loi d'inertie, formulée précédemment pour un point matériel (particule), peut être maintenant généralisée à tout ensemble de points (particules) matériels formant un système mécanique : *la quantité de mouvement d'un système mécanique isolé reste constante, quant au centre d'inertie d'un tel système de corps il demeure au repos ou est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.* C'est l'énoncé le plus précis et le plus complet de la loi de conservation de la quantité de mouvement (loi d'inertie) qui s'avère juste pour tout système isolé de corps matériels. Bref, la loi d'inertie est aussi bien applicable à une particule isolée qu'à tout système isolé de particules.

La vitesse du système de particules dans son ensemble est la vitesse de son centre d'inertie (centre des masses). S'il n'y a pas de forces extérieures, tout le système (comme au cas d'une seule particule) se meut de façon rectiligne et uniforme.

La loi de variation de la quantité de mouvement (56.6) et (56.7) fournit une première représentation du comportement du système sous l'action de l'ensemble donné de forces extérieures autrement dit de son mouvement de translation ou du mouvement de son centre d'inertie. Mais dans ce cas restent inconnus les détails se rapportant au mouvement des corps (particules) séparés formant le système. Les équations (56.6) et (56.7) ne suffisent donc pas pour décrire de façon complète le processus dans un système mécanique. Toutefois quand on ne s'intéresse qu'au mouvement de translation du système, en négligeant les détails du mouvement des particules du système relativement au centre d'inertie on peut le ramener aussi complexe qu'il soit au point matériel (placé au centre des masses), où se concentre toute la masse du système et auquel est appliquée la résultante de toutes les forces extérieures agissant sur le système. Pour atteindre ce but on peut se limiter à la seule équation (56.7). C'est précisément l'approche choisie aux problèmes de la dynamique au début de ce cours.

§ 57. MOUVEMENT PLAN DU CORPS

L'analyse du mouvement du corps pour une position quelconque du point d'application de la force extérieure agissant sur le corps solide est un problème relativement compliqué. Examinons donc tout d'abord le mouvement plan du corps dans lequel toutes les particules se déplacent parallèlement à un plan donné. Par exemple, le mouvement d'une caisse sur la surface lisse et régulière de la glace, le mouvement d'une boîte sur le plateau de la table, le roulement d'un cylindre, d'une roue etc.

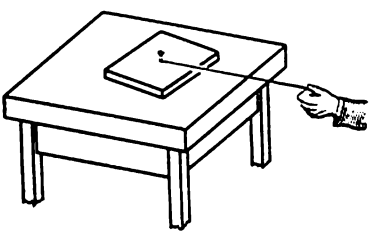


Fig. 147

Commençons par examiner les résultats de quelques expériences. Admettons qu'une planche lisse ne peut se déplacer que sur la glace ou sur le plateau poli de la table (fig. 147). Enfonçons dans la planche un clou et tirons horizontalement par le fil attaché au clou. La planche se déplacera de manière que l'accélération du centre d'inertie coïncide avec la direction de la force. Si le mouvement débute à partir du repos et si le fil a une direction invariable dans l'espace, la vitesse du centre d'inertie coïncidera avec la direction du fil. Mais en outre la planche pivotera autour de l'axe vertical. En variant

la position du clou sur la planche, on s'aperçoit que la rotation se ralentit si le point d'application de la force se rapproche du centre d'inertie de la planche. Et enfin, si le clou passe par le centre d'inertie de la planche, celle-ci effectue un mouvement de translation sans rotation. Dans ce cas le moment de la force extérieure par rapport à l'axe passant par le centre d'inertie est nul. On peut donc en

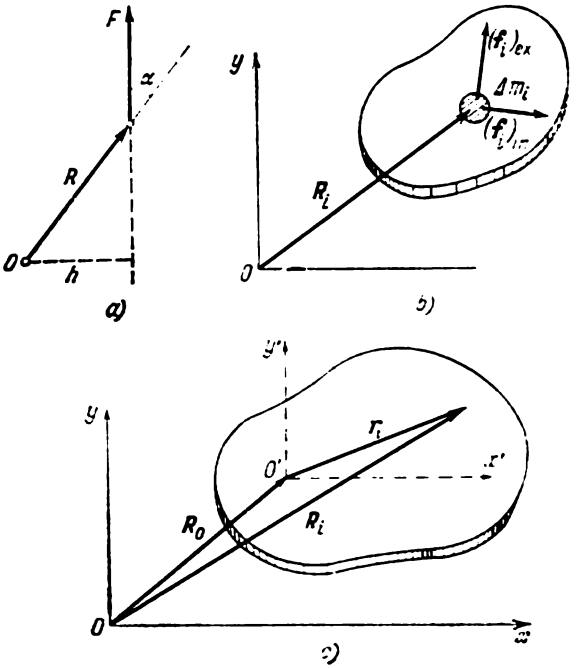


Fig. 148

conclure que la rotation est régie par le moment de la force extérieure par rapport à l'axe vertical passant par le centre d'inertie.

Cherchons la nature de la dépendance de la rotation du corps de ce moment. Elle est analogue à celle du corps tournant autour d'un axe immobile passant par le centre d'inertie, c'est-à-dire que *le moment de la force est égal au moment d'inertie du corps multiplié par l'accélération angulaire.*

Démontrons-le maintenant. Pour faciliter les calculs introduisons une formule plus générale de la grandeur du moment de la force par rapport à l'axe. Appelons moment de la force $\boldsymbol{F}$ par rapport à l'axe le produit vectoriel du vecteur $\boldsymbol{R}$ par la force $\boldsymbol{F}$, ou

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}], \tag{57.1}$$

où $\boldsymbol{R}$ est la distance de l'axe passant par le point O jusqu'au point d'application de la force $\boldsymbol{F}$ (fig. 148, *a*). L'axe de rotation est per-

pendiculaire au plan du mouvement (plan du dessin). D'après la règle du produit vectoriel le module du moment

$$M = FR \sin \alpha = Fh$$

coïncide avec la grandeur du moment de la force définie auparavant (bras de levier $h = R \sin \alpha$). La formule (57.1) indique aussitôt le signe et la direction du moment toujours perpendiculaire au plan du mouvement.

Examinons le mouvement plan du corps dans un certain référentiel *immobile Oxy* non lié au corps (fig. 148, *b*). Dégageons du corps une certaine petite particule de masse Δm_i qui peut être assimilée à un point matériel; sa position est définie par le rayon vecteur $\boldsymbol{R}_i$ mené de l'origine des coordonnées O. Soient $(\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}}$ la force extérieure et $(\boldsymbol{f}_i)_{\text{in}}$ la force intérieure agissant sur l'i-ème point. La loi du mouvement du point s'écrit alors ainsi

$$\Delta m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = (\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}} + (\boldsymbol{f}_i)_{\text{in}}, \tag{57.2}$$

où $\boldsymbol{v}_i = \frac{d\boldsymbol{R}_i}{dt}$ est la vitesse dans le référentiel immobile *Oxy*. Multiplions $\boldsymbol{R}_i$ vectoriellement par chaque terme de l'équation (57.2):

$$\Delta m_i \left[\boldsymbol{R}_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} \right] = [\boldsymbol{R}_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}}] + [\boldsymbol{R}_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{in}}]. \tag{57.3}$$

Le premier terme peut s'écrire sous la forme $\frac{d}{dt} [\boldsymbol{R}_i \Delta m_i \boldsymbol{v}_i]$ si l'on se souvient que

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{d\boldsymbol{R}_i}{dt},$$

soit

$$\left[\frac{d\boldsymbol{R}_i}{dt} \Delta m_i \boldsymbol{v}_i \right] \equiv 0.$$

Additionnant les équations (57.3) pour tous les points, il vient

$$\frac{d}{dt} \sum_i [\boldsymbol{R}_i \Delta m_i \boldsymbol{v}_i] = \sum_i [\boldsymbol{R}_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}}] + \sum_i [\boldsymbol{R}_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{in}}]. \tag{57.4}$$

La seconde somme du deuxième membre est nulle, car à chaque force intérieure est associée une force égale en grandeur et de direction opposée, appliquée en un autre point du corps, la somme de leurs moments étant nulle, vu que leurs directions sont opposées et les bras de levier égaux.

La grandeur $[\boldsymbol{R}_i \Delta m_i \boldsymbol{v}_i]$ est appelée *moment de la quantité de mouvement* du point, et la grandeur

$$\sum [\boldsymbol{R}_i \Delta m_i \boldsymbol{v}_i] = \boldsymbol{N}$$

moment de la quantité de mouvement de tout le corps par rapport à l'axe passant par le point O. Maintenant la loi générale du mouvement plan du corps solide considéré comme sa rotation par rapport à l'axe fixe passant par O, peut s'écrire ainsi :

$$\frac{dN}{dt} = M, \tag{57.5}$$

ou *la dérivée du moment de la quantité de mouvement est égale à la somme des moments des forces extérieures* :

$$M = \sum_i [R_i (f_i)_{ex}].$$

La forme de l'équation (57.5) est la même que celle de l'équation de la rotation du corps autour d'un axe constamment solidaire du corps (53.4) à cette différence seulement que les vitesses v_i du mouvement des points ne sont plus ici perpendiculaires à R_i et la grandeur et la direction de R_i varient dans le temps.

L'équation (57.5) reçoit une interprétation physique plus explicite si l'on tient compte de la loi du mouvement du centre d'inertie (56.7). Soit

$$R_i = R_0 + r_i,$$

où R_0 est le rayon vecteur du centre de masses O', r_i le rayon vecteur du point dans le référentiel $O'x'y'$ qui ne tourne pas et est solidaire du centre des masses du corps (fig. 148, *c*). Alors la vitesse de l'i-ème point sera

$$v_i = v_0 + u_i,$$

où

$$v_0 = \frac{dR_0}{dt}, \quad u_i = \frac{dr_i}{dt}.$$

Le rayon vecteur de chaque point se compose du rayon vecteur du centre des masses et du rayon vecteur de ce point dans le référentiel solidaire du centre des masses. Les mêmes relations peuvent également être écrites pour les vitesses. En portant ces expressions dans la formule (57.4) il vient

$$\frac{d}{dt} \sum_i [(R_0 + r_i) \Delta m_i (v_0 + u_i)] = \sum_i [(R_0 + r_i)(f_i)_{ex}],$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left\{ [R_0 v_0] \sum_i \Delta m_i + \left[R_0 \sum_i \Delta m_i u_i \right] + \right.$$
$$\left. + \left[\sum_i r_i \Delta m_i v_0 \right] + \sum_i [r_i \Delta m_i u_i] \right\} =$$
$$= \left[R_0 \sum_i (f_i)_{ex} \right] + \sum_i [r_i (f_i)_{ex}]. \tag{57.6}$$

Dans les accolades du premier membre de (57.6) la seconde et la troisième somme sont nulles en vertu de la définition du centre des masses. En effet

$$\sum_i \Delta m_i \boldsymbol{r}_i = 0,$$

dérivant cette égalité, il vient

$$\sum_i \Delta m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \sum_i \Delta m_i \boldsymbol{u}_i = 0.$$

Soit

$$\frac{d}{dt}\left\{ [\boldsymbol{R}_0 m \boldsymbol{v}_0] + \sum_i [\boldsymbol{r}_i \Delta m_i \boldsymbol{u}_i] \right\} = [\boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{F}] + \sum_i [\boldsymbol{r}_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}}], \qquad (57.7)$$

où $m = \sum_i \Delta m_i$ est la masse de tout le corps et $\boldsymbol{F} = \sum_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}}$, la somme de toutes les forces extérieures appliquées au corps. Les premiers termes des deux membres de (57.7) se simplifient. En effet,

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{R}_0 m \boldsymbol{v}_0] = \left[\frac{d\boldsymbol{R}_0}{dt} m \boldsymbol{v}_0\right] + \left[\boldsymbol{R}_0 m \frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt}\right] = [\boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{F}],$$

car $\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \boldsymbol{v}_0$ et $m \frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt} = \boldsymbol{F}$ d'après (56.7).

On obtient finalement une relation remarquable qui peut s'écrire ainsi :

$$\frac{d\boldsymbol{N}_0}{dt} = \boldsymbol{M}_0, \qquad (57.8)$$

où $\boldsymbol{N}_0 = \sum_i [\boldsymbol{r}_i \Delta m_i \boldsymbol{u}_i]$ est le moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe passant (à l'instant considéré) par le centre des masses O', $\boldsymbol{M}_0 = \sum_i [\boldsymbol{r}_i (\boldsymbol{f}_i)_{\text{ex}}]$ le moment des forces extérieures par rapport au même axe.

La loi (57.8) montre que dans un mouvement plan composé du corps *la dérivée du moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe traversant le centre des masses est égale au moment des forces extérieures par rapport au même axe.* La rotation s'effectue comme autour d'un axe immobile, immobile au sein du corps et dans l'espace (voir (53.4)).

Etant donné que dans un corps solide le centre des masses conserve une position invariable, on peut représenter la vitesse $\boldsymbol{u}_i$ sous la forme $\boldsymbol{u}_i = [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{r}_i]$, où la direction de $\boldsymbol{\omega}$ est constamment perpendiculaire au plan du mouvement. Donc le moment de la quantité de mouvement est égal

$$\sum_i [\boldsymbol{r}_i \Delta m_i \boldsymbol{u}_i] = \sum_i [\boldsymbol{r}_i \Delta m_i [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{r}_i]] = \boldsymbol{\omega} \sum_i \Delta m_i r_i^2 \text{[1]}.$$

[1] On tient compte dans les calculs de la formule bien connue de l'algèbre vectorielle $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})$.

La grandeur $I_0 = \sum_i \Delta m_i r_i^2$ est le moment d'inertie, déjà connu, du corps par rapport à l'axe passant par le centre des masses. L'équation (57.8) prend alors la forme habituelle :

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = M_0, \tag{57.9}$$

comme dans le cas de la rotation autour d'un axe immobile. Notons que les vecteurs ω, $\frac{d\omega}{dt}$, M_0 sont toujours normaux au plan du mouvement du corps.

Dans le cas où la force extérieure est dirigée vers l'axe passant par le centre d'inertie, $M_0 = 0$ et $\frac{d\omega}{dt} = 0$. Si à l'instant initial, avant l'application de la force, le corps était au repos, c'est-à-dire $\omega = 0$, alors ω continuera à rester nul. Autrement dit, le corps effectuera une *translation* si la ligne d'action de la résultante des forces extérieures passe par l'axe sur lequel se trouve le centre d'inertie, le corps se mettant en mouvement de l'état de repos. Si par contre dans ce cas le corps possédait à l'instant initial une vitesse angulaire ω_0, c'est-à-dire que le corps était en rotation, alors il poursuivra sa rotation avec la même vitesse angulaire, car $\frac{d\omega}{dt} = 0$.

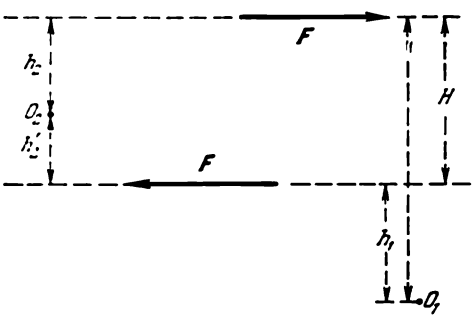


Fig. 149

Citons un cas particulier de mouvement plan s'effectuant sous l'action d'un couple de forces. Comme les forces parallèles composant le couple sont égales et opposées, leur résultante est nulle. Dans ce cas le centre d'inertie restera au repos s'il était au repos avant l'application des forces. Donc, *sous l'action d'un couple de forces, le corps effectue une rotation autour de l'axe passant par le centre d'inertie et perpendiculaire au plan du mouvement du corps* quel que soit le point d'application des forces.

Le moment du couple de forces par rapport à un axe arbitraire prendra la même valeur, égale au produit de la force F par la distance H qui les sépare (bras de levier) (fig. 149). En effet, les moments des forces par rapport aux axes passant par les points O_1 et O_2 sont égaux

$$M = F(H + h_1) - Fh_1 = FH,$$

$$M = Fh_2 + Fh_2' = FH.$$

En conclusion, on peut tout ce qui a été dit précédemment présenter sous la forme suivante. Dans un mouvement plan sous l'action de forces extérieures, le corps effectue en même temps un mouvement de translation et un mouvement de rotation. L'accélération de chaque point du corps est la somme de l'accélération de la translation et de l'accélération de la rotation autour de l'axe passant par le centre des masses. L'accélération de la translation est la même pour tous les points du corps et égale à

$$a = \frac{F}{m}, \tag{57.10}$$

où $F = \sum_i (f_i)_{ex}$ est la résultante de toutes les forces extérieures et m, la masse du corps. La direction de l'accélération coïncide avec celle de la résultante F. L'accélération de la rotation autour de l'axe passant par le centre des masses est égale à

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I}, \tag{57.11}$$

où M est le moment de toutes les forces extérieures par rapport à l'axe passant par le centre des masses, et I le moment d'inertie du corps par rapport au même axe.

§ 58. ROULEMENT DU CYLINDRE SUR UN PLAN. PENDULE DE MAXWELL

En guise d'exemple de mouvement plan examinons le roulement d'un cylindre ou d'une roue sur le plan.

L'axe du cylindre se meut avec une certaine vitesse v_0 quant au corps du cylindre il tourne avec la vitesse angulaire ω. Si le cylindre roule sur le plan sans glissement on a entre v_0 et ω la relation suivante

$$v_0 = \omega R_0, \tag{58.1}$$

où R_0 est le rayon du cylindre. Cela est évident, car le déplacement de l'axe $v_0\,dt$ est égal à l'arc de circonférence du cylindre $\omega R_0\,dt$ dont se déplace durant ce temps le point de contact avec le plan.

Si $v_0 > \omega R_0$ ou $v_0 < \omega R_0$ le point de contact du cylindre avec le plan glissera et le cylindre effectuera un roulement avec glissement. Dans le premier cas la vitesse du point de contact est dirigée vers l'avant, dans le second vers l'arrière.

Dans tous les cas la vitesse du point de contact du cylindre se détermine d'après la formule

$$\boldsymbol{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}], \tag{58.2}$$

où $\boldsymbol{r}$ est le vecteur de la distance de l'axe du cylindre au point donné. Le mouvement du cylindre est la somme d'un mouvement de transla-

tion de vitesse v_0 et d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω. Mais il est possible de représenter ce mouvement comme une rotation autour d'un axe instantané.

Dans tout mouvement plan du corps on peut indiquer l'*axe instantané de rotation*, qui est la ligne passant par les points invariablement solidaires du corps, qui au moment considéré sont au repos. Quand le cylindre ou la roue roulent sans glissement, l'axe instantané passe par les points de contact du cylindre avec le plan; ces points du cylindre sont à l'instant donné immobiles (possèdent

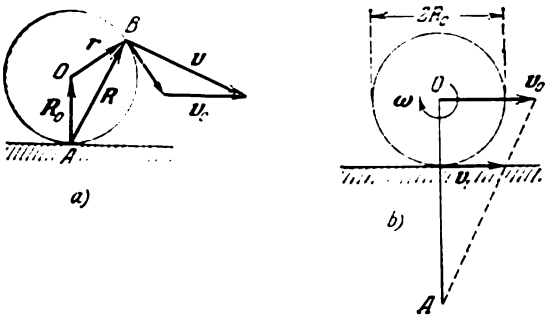


Fig. 150

une vitesse nulle). Les vitesses de tous les autres points du corps, leur direction et grandeur peuvent se déterminer en admettant que durant le temps dt le cylindre pivote avec la vitesse angulaire ω autour de l'axe instantané passant par le point A (fig. 150, *a*). En effet, soit $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r}$ le vecteur distance du point B de l'axe instantané et $\boldsymbol{R}_0$, le vecteur mené vers l'axe du cylindre; la vitesse du point peut alors s'écrire ainsi:

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}],$$

ou

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\,(\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r})] = \boldsymbol{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}], \tag{58.3}$$

où $\boldsymbol{v}_0 = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}_0]$ est la vitesse de l'axe du cylindre, ou la vitesse de la translation. Il va de soi que l'axe instantané se meut à la vitesse $\boldsymbol{v}_0$ le long du plan et chaque fois passe par des points différents de la surface du cylindre. L'axe de rotation passant par l'axe du cylindre se meut également dans l'espace, mais conserve une position invariable par rapport aux particules du cylindre.

Dans le cas du roulement du cylindre avec glissement, l'axe instantané ne passera plus par les points de contact. Pour $v_0 > \omega R_0$ (fig. 150, *b*) l'axe instantané passe par le point A situé au-dessous

du plan de roulement et le cylindre glisse avec la vitesse v_1 [1]. Pour $v_0 < \omega R_0$ l'axe instantané passe au-dessus du plan de roulement, la rotation l'emportant sur la translation. Dans tous les cas de roulement l'axe instantané se déplace le long du plan de roulement à la vitesse v_0 qui est la vitesse de l'axe du cylindre.

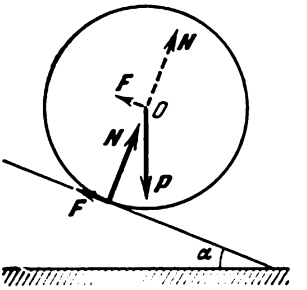


Fig. 151

Analysons maintenant la dynamique du roulement du cylindre. Soit un cylindre de rayon R_0 roulant sur un plan incliné formant un angle α avec l'horizon (fig. 151.) Trois forces agissent sur le cylindre : la force de pesanteur P, la force de pression normale du plan sur le cylindre N et la force de frottement du cylindre sur le plan F située dans ce plan. Evaluons d'abord l'accélération de la translation ; dans ce but supposons toutes les forces appliquées au centre des masses, ou transportons la force de frottement sur l'axe du cylindre, puisque les autres forces passent par l'axe O. Comme au cours du mouvement le cylindre ne quitte pas le plan, l'accélération du centre des masses dans la direction perpendiculaire au plan est nulle ; il s'ensuit que

$$P \cos \alpha - N = 0. \tag{58.4}$$

D'autre part la résultante de toutes les forces, parallèle au plan incliné, est égale à

$$f = P \sin \alpha - F. \tag{58.5}$$

Cette force déterminera l'accélération du centre des masses, ou l'accélération de la translation le long du plan incliné ; elle est donc égale à

$$a = \frac{f}{m} = \frac{1}{m}(P \sin \alpha - F), \tag{58.6}$$

où m est la masse du cylindre. L'accélération angulaire s'évalue d'après la formule (57.11) au moyen du seul moment du frottement F et du moment d'inertie du cylindre I par rapport à son axe, et elle est égale à

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I} = \frac{FR_0}{I}, \tag{58.7}$$

où R_0 est le rayon du cylindre.

[1] On peut se représenter un disque impondérable de rayon suffisamment grand constamment solidaire du cylindre ; l'axe instantané passe alors par un point de ce disque, situé au-dessous sur une circonférence de rayon OA.

Remarquons que les équations (58.6) et (58.7) sont toujours vérifiées quel que soit le mouvement du cylindre sur le plan, avec glissement ou sans glissement. Mais ces équations ne permettent pas de déterminer les trois grandeurs inconnues: F, a et $\frac{d\omega}{dt}$, car il faut encore une condition supplémentaire. Si le roulement du cylindre sur le plan incliné s'effectue sans glissement, l'accélération angulaire est liée à l'accélération linéaire par l'égalité

$$a = R_0 \frac{d\omega}{dt}, \tag{58.8}$$

déduite de la formule (58.1). Résolvant les trois équations (58.6), (58.7) et (58.8), on trouve l'accélération a. En effet, les deux dernières donnent

$$F = \frac{aI}{R_0^2}; \tag{58.9}$$

en portant cela dans la première il vient

$$ma = P \sin \alpha - \frac{Ia}{R_0^2},$$

ou

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{R_0^2}} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR_0^2}}, \tag{58.10}$$

où g est l'accélération de la force de pesanteur.

Par conséquent l'accélération a ne dépend que de l'angle de pente du plan et de la relation I/mR_0^2. Plus cette relation est grande, plus l'accélération est faible. L'accélération a ne peut être inférieure à $1/2g \sin \alpha$, car pour tout cylindre on a toujours

$$I < mR_0^2.$$

En effet, c'est seulement pour un cylindre creux aux parois très minces qu'on a

$$I \approx mR_0^2.$$

La relation I/mR^2 dépend non pas de la masse du cylindre, mais rien que de la distribution de la masse dans le volume du cylindre.

Pour un cylindre homogène $I = 1/2mR_0^2$ et, par suite, l'accélération avec laquelle un cylindre homogène roule sans glissement sur un plan incliné ne dépend que de l'angle de pente du plan et est égale à $2/3g \sin \alpha$.

Deux cylindres en métal homogène possèdent un même rayon, mais l'un est creux et l'autre plein (fig. 152). Lequel d'entre eux roulera plus vite? Il va de soi que I/mR_0^2 sera plus grand pour le cylindre creux, car les particules qui le composent se trouvent à une

plus grande distance de l'axe (voir plus loin (59.4) et (59.5)). Donc l'accélération du cylindre plein sera supérieure et il roulera plus vite.

Les équations (58.9) et (58.10) permettent de calculer le frottement, il est égal à

$$F = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{mR_0^2}{I}}. \tag{58.11}$$

Le frottement dépend de l'angle de pente α, de la force poids $P = mg$ et du rapport mR_0^2/I. Sans frottement il n'y aura pas de roulement.

Avec l'accroissement de l'angle de pente du plan, l'accélération de l'axe du cylindre roulant augmente proportionnellement à $\sin \alpha$;

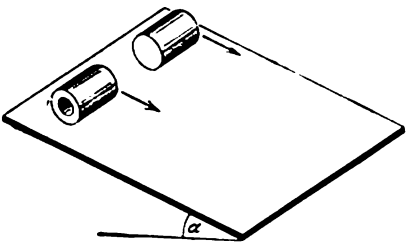


Fig. 152

elle sera toujours inférieure à $g \sin \alpha$, accélération du corps glissant sur ce plan sans frottement, mais supérieure à la moitié de cette accélération. Un cylindre roulant sera animé d'un mouvement accéléré, comme un corps qui glisse, mais son accélération sera inférieure; l'« inertie » du cylindre s'est pour ainsi dire accrue: grâce à la rotation, cette augmentation de l'« inertie » étant fonction du rapport I/mR_0^2.

Tout ce qui vient d'être dit se rapporte à un cylindre roulant sans glissement. On peut également étudier le roulement du cylindre avec glissement. Cela ne présente pas de difficulté si l'on admet que le frottement de roulement, comme le frottement de repos, prennent leur valeur maximale, égale à μN, où μ est le coefficient et N la pression normale du cylindre sur le plan. Un tel roulement sans glissement n'aura lieu que dans le cas où le frottement

$$F < \mu N, \tag{58.12}$$

ou, considérant (58.11) et (58.4), il vient

$$\operatorname{tg} \alpha < \mu \left(1 + \frac{mR_0^2}{I}\right), \tag{58.13}$$

c'est-à-dire que l'angle de pente doit être inférieur à une certaine grandeur. C'est seulement quand la tangente de l'angle de pente

du plan est supérieure à

$$\mu\left(1+\frac{mR_0^2}{I}\right), \tag{58.14}$$

que le roulement s'effectue avec glissement. La grandeur de l'accélération de l'axe du cylindre est dans ce cas égale à

$$a=\frac{1}{m}(P\sin\alpha-\mu N)=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha). \tag{58.15}$$

Le pendule de Maxwell. Un petit disque (volant) emmanché avec force sur un axe est descendu sous l'action de la force de pesanteur par deux fils enroulés au préalable sur l'axe du volant (fig. 153). Au cours du mouvement vers le bas les fils se déroulent complètement, le volant mis en rotation continue à tourner dans le même sens en enroulant les fils sur l'axe, ce qui le fait remonter en ralentissant la rotation. Une fois le point culminant atteint, le disque redescend de nouveau, etc. Le volant effectuera des mouvements oscillatoires de montée, et de descente d'où le nom de pendule donné à ce dispositif.

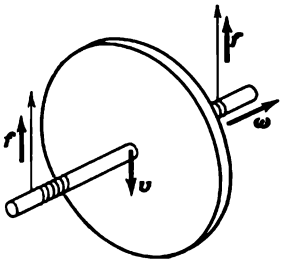


Fig. 153

Etablissons l'équation du mouvement du volant. Soit P la force de pesanteur, f la force de tension d'un fil, R le rayon de l'arbre, I le moment d'inertie du volant; alors l'équation de la translation est

$$P-2f=ma, \tag{58.16}$$

où a est l'accélération du centre des masses, tandis que l'équation de la rotation est

$$2fR=I\frac{d\omega}{dt}, \tag{58.17}$$

où ω est la vitesse angulaire de la rotation du disque. La vitesse du centre des masses v, ou la vitesse de l'axe du volant, et la vitesse de rotation du disque ω sont liées par la condition $v=\omega R$; leurs accélérations sont donc liées par le rapport

$$a=R\frac{d\omega}{dt}. \tag{58.18}$$

Résolvant les équations (58.15), (58.16) et (58.17) par rapport à trois inconnues, on obtient l'accélération du centre des masses

$$a=\frac{P}{m+\frac{I}{R^2}} \tag{58.19}$$

et la force de tension du fil

$$f=\frac{P}{2}\frac{I}{I+mR^2}. \tag{58.20}$$

Remarquons que l'accélération et la force de tension du fil sont complètement indépendantes du sens dans lequel se meut le volant, vers le haut ou vers le bas. Au cours des oscillations du pendule la vitesse change de signe, tandis que l'accélération, comme les forces, ne le modifie pas.

Le fait que la tension du fil reste la même dans le mouvement vers le bas et vers le haut peut être montré facilement en attachant les fils du pendule à

une balance (fig. 154). En affaiblissant le mécanisme de blocage de la balance au cours de la descente ou de la montée du pendule, on s'assure que le « poids » du pendule ne dépend pas du sens de rotation du volant. Il est évident que dans ce cas le « poids » du pendule est $2f$, qui est la tension des fils.

Le mécanisme de blocage ne peut rester desserré tout le temps, car le choc subi en bas de course avec le changement de sens du mouvement du pendule peut endommager la balance.

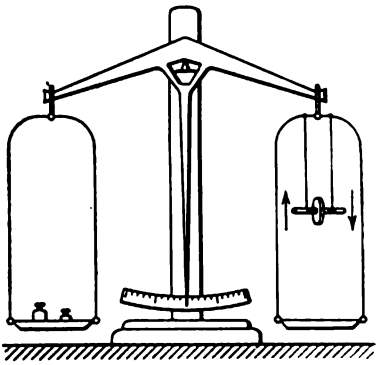


Fig. 154

§ 59. MOMENTS D'INERTIE DE CERTAINS CORPS. THÉORÈME DE HUYGENS-STEINER

1) Moment d'inertie d'un cylindre homogène, d'un cylindre creux, etc. par rapport à un axe géométrique. Chacun de ces corps peut être divisé en de minces couches cylindriques dont les particules se trouvent à la même distance de l'axe. Divisons le cylindre de rayon R_0 en des couches concentriques d'épaisseur dR (fig. 155). Soit R le rayon d'une certaine couche; alors, la masse des particules contenues dans cette couche est

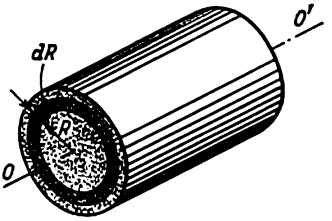


Fig. 155

$$dm = 2\pi\, Rh\, \rho\, dR, \qquad (59.1)$$

où h est la hauteur du cylindre, ρ la densité de la matière du cylindre. Toutes les particules de la couche se trouvent alors à la distance R de l'axe et donc son moment d'inertie est

$$dI = dm\, R^2 = 2\pi\rho\, hR^3\, dR. \qquad (59.2)$$

Supposons que tout le cylindre est divisé en de telles couches; le moment d'inertie de tout le cylindre sera alors égal à la somme des moments infiniment petits, ou le moment de tout le cylindre

$$I = \int dI = \int R^2\, dm = 2\pi\rho h \int_0^{R_0} R^3\, dR = 2\pi\rho h \frac{R_0^4}{4}. \qquad (59.3)$$

Se souvenant que la masse du cylindre $m = \pi R_0^2 h\rho$, on peut écrire (59.3) ainsi

$$I = \frac{1}{2} m R_0^2. \qquad (59.4)$$

Le moment d'inertie d'un cylindre homogène plein est égal à sa masse multipliée par le demi du carré de son rayon.

Le moment d'inertie d'un cylindre creux, dont le rayon intérieur est R_1 et le rayon extérieur R_0, peut être facilement calculé sur la base de la formule (59.3)

il faut seulement poser dans l'intégrale d'autres limites, bref

$$I = 2\pi\rho h \int_{R_1}^{R_0} R^3 dR = 2\pi\rho h \left(\frac{R_0^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right). \tag{59.5}$$

Notant que la masse du cylindre creux est $m = \pi\rho (R_0^2 - R_1^2) h$, écrivons le moment d'inertie du cylindre creux ainsi:

$$I = \frac{1}{2} m (R_0^2 + R_1^2). \tag{59.6}$$

Par une voie aussi simple on peut obtenir le moment d'inertie de tout corps qui se prête à la division en un ensemble de cylindres creux, d'anneaux, de disques.

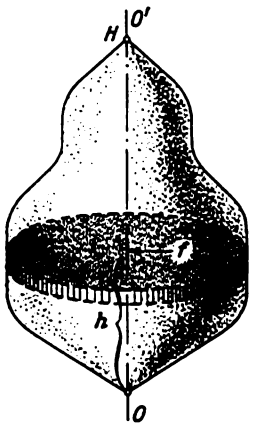


Fig. 156

2) Moment d'inertie d'un corps de révolution. Un corps de révolution est un corps dont la surface est engendrée par la rotation d'une certaine courbe plane autour d'un axe, cette courbe étant appelée génératrice. Imaginons qu'une certaine courbe $f(h)$ située dans le plan de l'axe OO' (fig. 156) et s'appuyant par ses extrémités à l'axe tourne sur cet axe et engendre de cette manière la surface d'un certain corps homogène. Quel est le moment d'inertie du corps si l'on connaît la fonction $f(h)$ et la densité de la substance ρ? Divisons le corps en des disques infiniment minces de hauteur dh. Le moment d'inertie de ce disque est alors

$$dI = \frac{1}{2} dm f^2 = \frac{1}{2} \pi\rho f^4 dh. \tag{59.7}$$

Donc le moment d'inertie de tout le corps est

$$I = \frac{1}{2} \int dm f^2 = \frac{\pi}{2} \rho \int_0^H f^4 dh. \tag{59.8}$$

Si l'on connaît f comme fonction de h, on peut toujours calculer le moment d'inertie du corps de révolution.

Moment d'inertie du cône et de la sphère. Pour un cône de hauteur H la grandeur $f = \frac{R_0}{H} h$ (fig. 157, *a*). Portant cette expression dans (59.8) on obtient le moment d'inertie du cône:

$$I = \frac{\pi}{2} \rho \left(\frac{R_0}{H} \right)^4 \int_0^H h^4 dh = \frac{\pi}{2} \rho \left(\frac{R_0}{H} \right)^4 \frac{H^5}{5}. \tag{59.9}$$

Si l'on tient compte de ce que le volume du cône est $\frac{\pi R_0^2 H}{3}$, la formule (59.9) peut être écrite ainsi:

$$I = \frac{3}{10} m R_0^2, \tag{59.10}$$

où m est la masse du cône.

Par le même procédé on peut évaluer le moment d'inertie de la sphère. Il est plus simple de déterminer d'abord le moment d'inertie d'une demi-sphère

obtenue par une section perpendiculaire à l'axe de rotation. Alors $f^2 + h^2 = R_0^2$ (fig. 157, *b*). D'où

$$f^2 = R_0^2 - h^2. \tag{59.11}$$

Portant cette expression dans la formule (59.8) et intégrant par rapport à h de 0 à R_0, on obtient le moment d'inertie d'une demi-sphère. On invite le lecteur

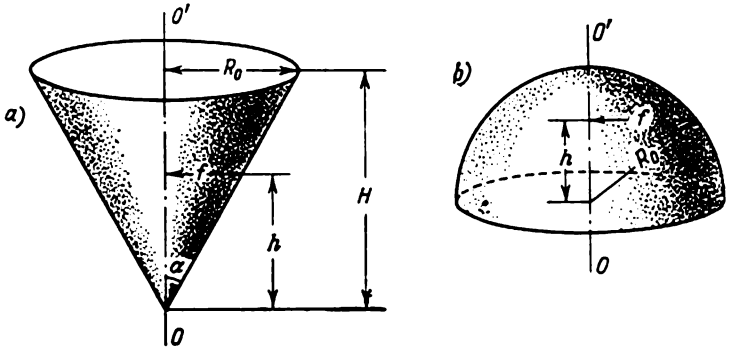


Fig. 157

de faire les calculs à titre d'exercice et d'évaluer le moment d'inertie de la sphère ; il est égal à

$$I = \frac{2}{5} m R_0^2. \tag{59.12}$$

3) Moment d'inertie du corps par rapport à l'axe passant par le centre des masses, mais ne constituant pas un axe de symétrie. Jusque-là on avait calculé le moment d'inertie relativement à un axe de symétrie ; le calcul du moment d'inertie relativement à tout axe passant par le centre des masses constitue un problème plus ardu. Examinons tout d'abord le plus simple des exemples : déterminons le moment d'inertie d'une baguette fine et homogène de longueur l et de masse m par rapport à l'axe formant avec la baguette un angle α et passant par son centre des masses (fig. 158). Notons par x la distance du milieu de la baguette d'une certaine particule de longueur dx. La masse de la particule est $dm = \frac{m}{l} dx$ et elle se trouve à la distance f de l'axe $f = x \sin \alpha$. Le moment d'inertie est

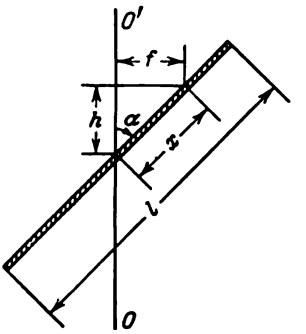


Fig. 158

$$dI = dm f^2 = \frac{m}{l} dx\, x^2 \sin^2 \alpha,$$

quant au moment d'inertie de toute la baguette

$$I = 2 \int_0^{l/2} dm f^2 = \frac{2m}{l} \sin^2 \alpha \int_0^{l/2} x^2\, dx = \frac{1}{12} m l^2 \sin^2 \alpha. \tag{59.13}$$

Il est évident que si la baguette est perpendiculaire à l'axe de rotation ($\alpha = \pi/2$) alors

$$I = \frac{1}{12} ml^2. \tag{59.14}$$

On a supposé dans les calculs que la baguette était très fine ; cela signifie mathématiquement que le diamètre de la section de la baguette a une grandeur infiniment petite et, dans les calculs approchés habituels, on admet que le diamètre de la baguette est petit devant sa longueur.

Moment d'inertie d'un disque mince par rapport à l'axe situé dans le plan du disque. Le résultat obtenu pour la baguette peut être utilisé pour le calcul du moment d'inertie du disque. Divisons le disque de rayon R_0 en des « baguettes » fines perpendiculaires à l'axe ; la masse d'une telle « baguette » de largeur dh et située à la distance h du centre est

$$dm = \frac{2m\sqrt{R_0^2 - h^2}}{\pi R_0^2}\, dh,$$

son moment d'inertie, d'après la formule (59.14), est

$$dI = \frac{2}{12} \frac{m\sqrt{R_0^2 - h^2}}{\pi R_0^2} \cdot 4\,(R_0^2 - h^2)\, dh.$$

Donc le moment d'inertie de tout le disque sera [1]

$$I = \frac{4}{3} \frac{m}{\pi R_0^2} \int_0^{R_0} (R_0^2 - h^2)^{3/2}\, dh = \frac{1}{4} mR_0^2. \tag{59.15}$$

4) Moment d'inertie du corps par rapport à un axe ne traversant pas le centre des masses. Si l'on détermine par un certain procédé le moment d'inertie du corps par rapport à un certain axe passant par le centre des masses, il est très simple de trouver le moment d'inertie par rapport à tout axe parallèle. Soit I_0 le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre des masses, dans ce cas le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle est

$$I = I_0 + ma^2, \tag{59.16}$$

où m est la masse du corps, a la distance entre les axes. C'est le *théorème* dit de *Huygens-Steiner* ; démontrons-le.

Prenons la droite OO' comme axe z d'un système des coordonnées rectangulaire et menons le plan (x, y) par le centre des masses du corps (fig. 159, *a*). Un second axe $O''\,O'''$ passe par le point (x_0, y_0). Si la distance entre les axes est a, on a

$$a^2 = x_0^2 + y_0^2. \tag{59.17}$$

Supposons que la particule du corps de masse Δm_i a pour coordonnées x_i et y_i ; alors, le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe OO' passant par le centre d'inertie est

$$I_0 = \sum_i \Delta m_i\,(x_i^2 + y_i^2). \tag{59.18}$$

---

[1] Pour le calcul de l'intégrale il faut utiliser la substitution $R_0 \sin\alpha = h$ et tenir compte de ce que $\int_0^{\pi/2} \cos^4\alpha\, d\alpha = \frac{3}{16}\pi$

Le carré de la distance de la même i-ème particule du second axe $O''\ O'''$ est

$$(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2,$$

le moment d'inertie du corps par rapport au second axe peut donc s'écrire ainsi :

$$I = \sum_i \Delta m_i \left[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2\right].$$

Ouvrons les parenthèses et sommons, il vient alors

$$I = (x_0^2 + y_0^2) \sum_i \Delta m_i + \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) - \\ \underline{-2x_0 \sum_i \Delta m_i x_i} \underline{-2y_0 \sum_i \Delta m_i y_i}. \qquad (59.19)$$

Tenant compte des formules (59.17) et (59.18) ainsi que de ce que les termes soulignés dans l'égalité (59.19) sont nuls, on obtient d'après les formules pour le centre des masses (55.1) l'expression cherchée (59.16).

Il suffit donc de calculer le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe passant par le centre des masses. S'il est connu, on peut facilement trouver

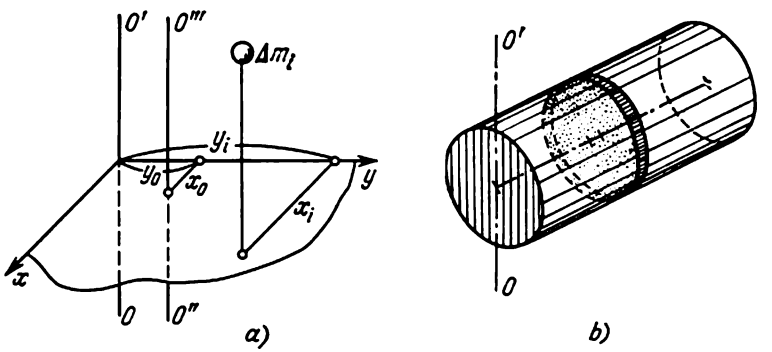


Fig. 159

d'après la formule (59.16) le moment d'inertie du corps pour tout axe parallèle.

Cette règle permet sans difficulté de trouver le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe longeant sa génératrice.

Sur la base des formules (59.4) et (59.16), on trouve ce moment d'inertie :

$$I = \frac{1}{2} m R_0^2 + m R_0^2 = \frac{3}{2} m R_0^2. \qquad (59.20)$$

On peut également utiliser la formule (58.16) pour calculer le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe OO' perpendiculaire à son axe (fig. 159, *b*). Pour effectuer ce calcul, divisons le cylindre en des disques infiniment minces, puis, d'après la formule (59.15), déterminons le moment de chaque disque par rapport à l'axe se trouvant dans son plan et parallèle à OO' et enfin, connaissant la distance du disque jusqu'à l'axe OO', cherchons d'après (59.16) le moment de ce disque par rapport à cet axe. En sommant les moments de tous les disques composant le cylindre, on obtient son moment d'inertie par rapport à l'axe OO'. On invite le lecteur à effectuer les calculs en guise d'exercice.

§ 60. ÉNERGIE CINÉTIQUE DU CORPS EN MOUVEMENT DE TRANSLATION ET DE ROTATION

L'énergie cinétique du corps solide est la somme des énergies cinétiques de ses différentes parties. L'énergie cinétique de la particule du corps de masse Δm_i est

$$\frac{\Delta m_i v_i^2}{2}.$$

La vitesse linéaire v_i de la particule peut toujours être représentée sous forme de la somme de deux vitesses : la vitesse du centre des masses v_0 et la vitesse du mouvement u_i dans le référentiel invariablement solidaire du centre des masses et effectuant un mouvement de translation avec lui :

$$v_i = v_0 + u_i. \tag{60.1}$$

Dans ce cas l'énergie cinétique de tout le corps

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i (v_0 + u_i)^2 =$$

$$= \frac{v_0^2}{2}\sum_i \Delta m_i + v_0 \sum_i \Delta m_i u_i + \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i u_i^2,$$

ou

$$E_{\text{cin}} = \frac{m v_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i u_i^2, \tag{60.2}$$

car $\sum_i \Delta m_i u_i = 0$ (voir § 56).

Cette assertion fondamentale est vraie pour tout mouvement du corps solide, non seulement pour le corps solide, mais également *pour tout système de corps.*

L'énergie cinétique est donc composée de deux parties : l'énergie cinétique de la translation $\left(\frac{m v_0^2}{2}\right)$ et l'énergie cinétique du mouvement relatif $(\sum_i \Delta m_i u_i^2)$ dans le référentiel en translation solidairement au centre des masses.

Tout mouvement plan du corps solide peut être représenté sous forme de deux mouvements : la translation avec le centre des masses et la rotation autour de l'axe passant par le centre des masses et présentant une direction invariable dans l'espace. Par conséquent, l'énergie cinétique du mouvement par rapport au centre des masses est l'énergie de rotation du corps autour de l'axe.

Comme on le sait d'après (54.2), l'énergie cinétique de rotation du corps à la vitesse angulaire ω a pour expression

$$\frac{I\omega^2}{2}, \tag{60.3}$$

où $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe passant par le centre des masses.

Donc, toute l'énergie cinétique est

$$E_{\text{cin}} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \tag{60.4}$$

ou : l'énergie cinétique d'un corps effectuant un mouvement plan quelconque est la somme de l'énergie cinétique du corps en translation $\frac{mv_0^2}{2}$ et en rotation $\frac{I\omega^2}{2}$.

Voyons un exemple, où l'utilisation de la loi de conservation de l'énergie fournit un procédé simple de solution du problème.

Deux cylindres de même masse m et de même rayon R roulent sur un plan incliné sans glissement, $v = \omega R$ (voir fig. 152). Lequel des cylindres atteint l'horizontale avant l'autre si les moments d'inertie des cylindres sont différents, mais ils sont lâchés en même temps d'une même hauteur H? Quand les cylindres atteindront l'horizontale leur énergie cinétique sera la même et égale à l'énergie potentielle PH, où $P = mg$ est la force de pesanteur du cylindre. Donc, d'après la formule (60.4), on peut écrire pour chaque cylindre :

$$PH = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{I_1\omega_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2}, \tag{60.5}$$

où v_1, v_2, ω_1, ω_2 sont les vitesses de descente de la hauteur H et I_1, I_2, les moments d'inertie des cylindres. Considérant qu'il n'y a pas de glissement, on a $v_1 = \omega_1 R$, $v_2 = \omega_2 R$ et l'égalité (60.5) peut s'écrire ainsi :

$$v_1^2\left(m + \frac{I_1}{R^2}\right) = v_2^2\left(m + \frac{I_2}{R_2}\right). \tag{60.6}$$

Par conséquent, il devient évident que le cylindre de moment d'inertie plus petit descendra avant.

La loi de conservation de l'énergie (60.5) appliquée au cylindre roulant sans glissement sur un plan incliné permet d'établir un lien univoque entre la hauteur d'où descend le cylindre et la vitesse de roulement, comme dans le cas de la chute libre des corps.

§ 61. AXES DE ROTATION LIBRE

Si l'axe de rotation du corps ne traverse pas son centre des masses, les forces d'inertie centrifuges exercent une pression sur l'axe. Par exemple, si l'on fait tourner une baguette autour d'un axe passant près de son extrémité (fig. 160, *a*) les forces centrifuges, égales à

$$m\omega^2 R,$$

(où m est la masse et R, la distance du centre des masses de la baguette à l'axe) tendront à courber l'axe. Il est absolument évident que ces forces n'existeront si l'axe de rotation passe par le centre des masses de la baguette (fig. 160, *b*) ; dans ce cas les forces centrifuges, agissant sur un bout de la baguette, seront contrebalancées par des forces centrifuges appliquées à la seconde moitié de la baguette. Si

l'axe de rotation passe par le centre des masses, la baguette étant fixée sur l'axe de manière à former un angle aigu avec l'axe de rotation (fig. 160, *c*), alors les résultantes des forces d'inertie formeront un couple de forces qui pliera justement l'axe. Dans ce cas l'axe est soumis à l'action du moment du couple de forces.

Donc l'action du corps en rotation sur l'axe ne devient nulle qu'au cas où l'axe passe par le centre des masses et les moments

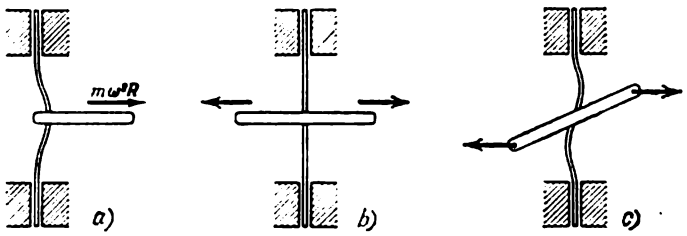


Fig. 160

des forces d'inertie par rapport à toute direction perpendiculaire à l'axe sont nuls.

Au cas où le corps présente une symétrie ces directions des axes sont facilement repérables. Par exemple, un parallélépipède rectangulaire en matériau homogène rappelant par sa forme une boîte d'allumettes présente trois axes mutuellement perpendiculaires et passant par le centre des faces parallèles (fig. 161). Si le corps tourne autour de l'un de ces axes, la rotation n'exerce aucune action sur les supports de l'axe, et c'est pourquoi de tels *axes* sont dits *libres* ou de *rotation libre*.

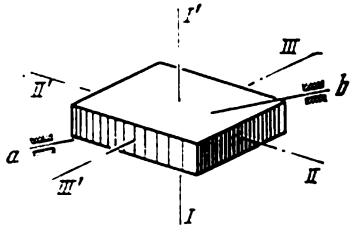


Fig. 161

En effet si on laisse un corps libre tourner autour d'un tel axe cette rotation en l'absence de forces extérieures, se prolongera aussi longtemps que l'on désire. Inversement, si l'on met en rotation le corps autour d'un axe quelconque ne coïncidant pas avec l'axe libre, par exemple, si on fait tourner le parallélépipède autour de l'axe oblique *ab*, montré sur la figure 161, le corps, une fois abandonné à lui-même, n'effectuera plus une pure rotation autour de l'axe, le mouvement du corps devenant composé.

L'axe $I - I'$ (voir fig. 161) passant par les plus grandes faces du parallélépipède correspond au moment d'inertie le plus grand et l'axe $II - II'$, au plus petit. On montrera au § 64 que tout corps possède trois axes libres mutuellement perpendiculaires et, passant

par le centre des masses. En théorie générale on démontre que la rotation autour de l'axe correspondant à la grandeur moyenne du moment d'inertie est instable, par exemple la rotation autour de l'axe *III — III'* (voir fig. 161) est instable.

La stabilité du mouvement autour des axes de moment d'inertie maximal (et minimal) peut être facilement montrée en lançant en l'air une boîte d'allumette vide à laquelle on a imprimé un mouvement de rotation (fig. 162). La boîte aura un mouvement giratoire stable si elle est mise en rotation autour des axes *I — I'* et *II — II'* (voir fig. 161). En imprimant à la boîte la rotation autour de l'axe libre *III — III'* on n'obtient plus de rotation stable autour de cet axe, le mouvement n'étant plus plan, comme dans les deux cas précédents.

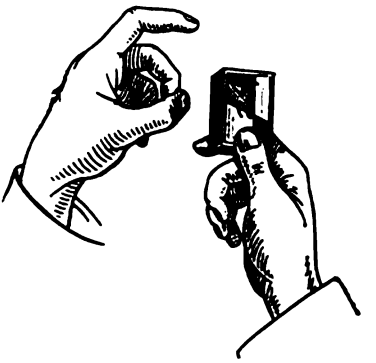


Fig. 162

Une illustration simple et parlante du rôle des axes libres est fournie par le cylindre exécutant des « culbutes ». Avec un matériau léger, par exemple, de la mousse, on façonne au tour un cylindre (fig. 163, *a*). Aux abouts du cylindre on encastre, en les colmatant, deux masselottes en plomb, comme c'est montré sur la figure. Le centre des masses se trouve sur l'axe du cylindre, mais cet axe n'est évidemment pas un axe libre. On laisse le cylindre descendre un plan incliné. Si la pente est faible, le cylindre roule comme un cylindre homogène

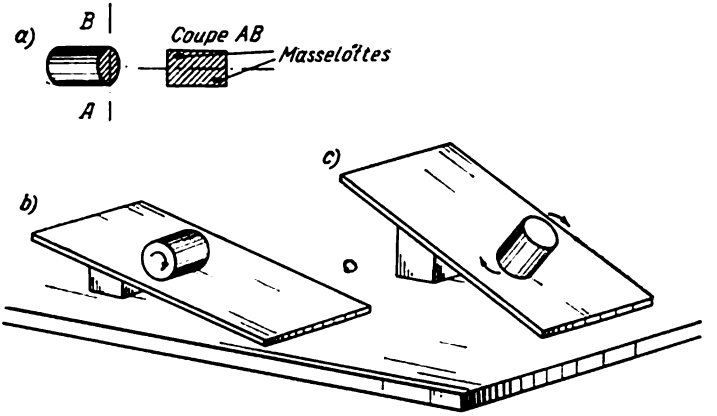


Fig. 163

habituel (fig. 163, *b*). En augmentant la pente, on observe la vitesse de rotation croissante, une descente irrégulière avec des rebondissements et des culbutes (fig. 163, *c*).

La stabilité de rotation de différents corps autour des axes libres peut être de même illustrée de la façon suivante : attachons un corps quelconque, un disque en métal, par exemple, avec une corde à la broche d'une centrifugeuse (fig. 164, *a*) et communiquons à ce corps un mouvement de rotation rapide

(fig. 164, *b*). A mesure que la vitesse de rotation augmente, après quelques trépidations, le corps commence à tourner de façon stable autour de l'axe libre,

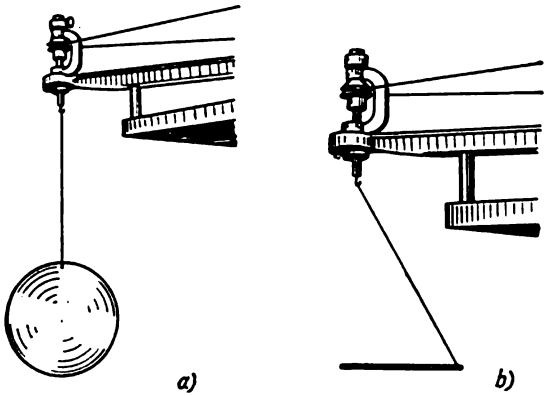


Fig. 164

même en dépit de l'action de la force de pesanteur du corps, qui tend à modifier l'axe de rotation du corps. Ensuite, si l'on arrête la centrifugeuse et on enlève le fil du crochet de la broche, le corps continuera sa rotation autour de l'axe de rotation stable.

§ 62. CINÉMATIQUE DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE

Dans le cas général, quand on applique au corps des forces non pas en son centre des masses, le mouvement devient composé ; ceci se voit quand on observe la rotation du corps autour d'un axe quelconque ne coïncidant pas avec l'axe libre. La loi du mouvement du corps sous l'action de forces passant par le centre des masses est aussi simple que celle du mouvement du point matériel : tous les points du corps acquerront une même accélération et le corps effectuera une translation dans l'espace de sorte que toute ligne solidaire du corps conservera une direction invariable dans l'espace. On peut donc diviser le mouvement du corps en deux : la translation définie par le mouvement du centre des masses et la rotation autour d'un certain axe passant par le centre des masses. Dans le cas général cet axe modifie sa position au sein du corps et sa direction dans l'espace.

On n'exposera pas ici les lois compliquées de la cinématique du corps solide sous leur forme générale, en se bornant à l'examen de quelques exemples importants pour la suite, où un point du corps reste immobile.

Notons avant tout que dans l'étude de la rotation du corps solide autour d'un axe fixe, il est commode de transcrire les vitesses des différents points du corps de la façon suivante. Choisissons sur l'axe de rotation AA' un certain point O pris pour origine du système des

coordonnées immobile ($Oxyz$) ; la position de chaque point du corps à un instant donné sera alors déterminée par le rayon vecteur $\boldsymbol{R}_i$ (fig. 165). La vitesse de l'i-ème point peut s'écrire ainsi :

$$\boldsymbol{v}_i = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}_i], \qquad (62.1)$$

où le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ est dirigé le long de l'axe suivant la règle de la vis à filet droit. En effet, la distance du point à l'axe $\rho_i = R_i \sin\alpha$ et la formule (62.1) fournit la direction correcte et la grandeur de la vitesse du point $\boldsymbol{v}_i$. Il est évident que la vitesse de tout point est normale au plan passant par $\boldsymbol{\omega}$ et $\boldsymbol{R}_i$, et a pour grandeur $\omega\rho_i$.

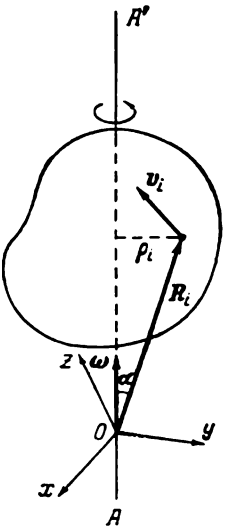


Fig. 165

Tirons quelques conclusions utiles de la définition faite plus haut de la vitesse $\boldsymbol{v}_i$ des points d'un corps en rotation.

a) La grandeur et la direction de la vitesse $\boldsymbol{v}_i$ est indépendante de la position du point O sur l'axe. Par exemple, pour le point O' (fig. 166, a)

$$\boldsymbol{v}_i = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}_i'] = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}_i] \text{ et } v_i = \omega\rho_i.$$

b) Puisque $\boldsymbol{\omega}$ est un vecteur, il peut être toujours décomposé en deux vecteurs $\boldsymbol{\omega}_1$ et $\boldsymbol{\omega}_2$ et la rotation autour de l'axe AA' à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ peut être représentée comme une rotation *simultanée* autour de deux axes OC et OE avec des vitesses angulaires

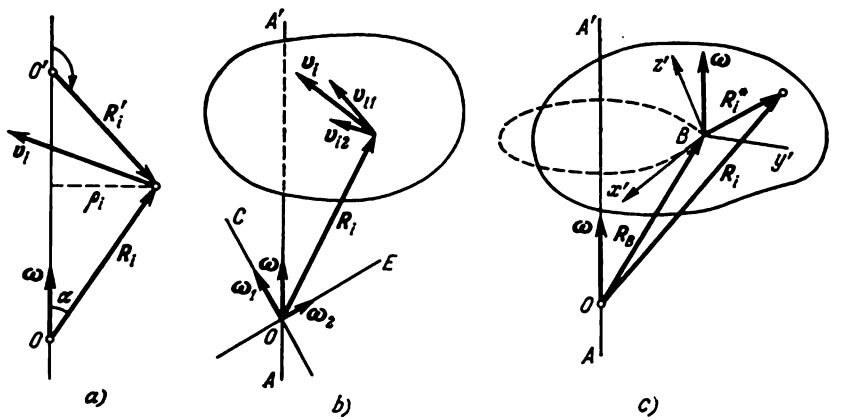


Fig. 166

$\boldsymbol{\omega}_1$ et $\boldsymbol{\omega}_2$ respectivement (fig. 166, b). En effet, si $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ on a

$$\boldsymbol{v}_i = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}_i] = [\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{R}_i] + [\boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{R}_i] = \boldsymbol{v}_{i1} + \boldsymbol{v}_{i2},$$

où $\boldsymbol{v}_{i1} = [\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{R}_i]$ est la vitesse de rotation autour de l'axe OC et $\boldsymbol{v}_{i2} = [\boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{R}_i]$, la vitesse de rotation autour de l'axe OE.

c) Il est quelquefois commode de représenter la rotation du corps autour de l'axe AA' ainsi : avec un point (quelconque) B du corps est lié un système de référence $(Bx'y'z')$ *en translation* (sur un cercle!), par rapport auquel le corps tourne avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe passant par B (fig. 166, *c*). En effet, considérant que $R_i = R_B + R_i^*$ on déduit de la formule (62.1) que

$$v_i = [\omega R_i] = [\omega R_B] + [\omega R_i^*] = v_B + [\omega R_i^*],$$

où $v_B = [\omega R_B]$; autrement dit, la vitesse de chaque point du corps est constituée de la somme de la vitesse du mouvement du point B et de la vitesse impliquée par la rotation du corps à la vitesse angulaire ω par rapport à l'axe passant parallèlement à AA' par le point B.

Examinons maintenant un mouvement plus compliqué du corps solide dans lequel l'axe OA, invariablement solidaire du corps, est lui-même en rotation autour d'un autre axe fixe OB, comme cela se passe avec le globe fixé sur une broche de centrifugeuse en rotation (fig. 167).

Ou bien, supposons qu'un corps tourne à la vitesse angulaire ω_A autour de l'axe OA invariablement lié au corps, tandis que l'axe OA

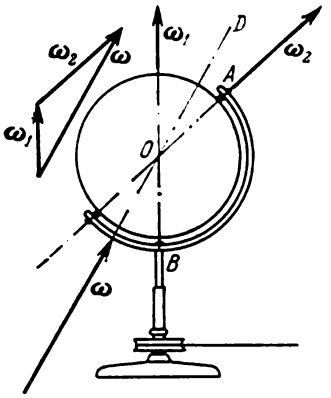


Fig. 167

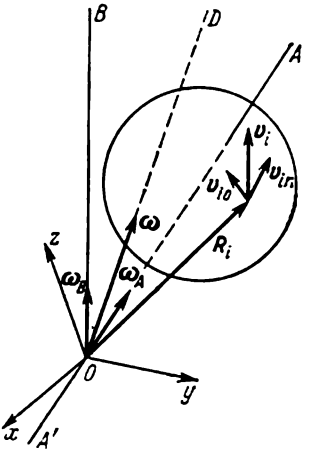


Fig. 168

tourne à son tour autour de l'axe fixe OB à la vitesse angulaire ω_B (fig. 168). Le mouvement composé du corps se dédouble en deux mouvements de rotation simples : celui autour de l'axe OA fixe (pour $\omega_B = 0$) et celui de rotation du corps autour de l'axe OB en l'absence de rotation par rapport à l'axe OA (pour $\omega_A = 0$). Supposons que dans la rotation simultanée du corps autour des axes OA et OB la vitesse résultante de l'i-ème point v_i situé à l'extrémité du rayon vecteur R_i peut être décomposée en deux vitesses : v_{i0} que le point aurait acquise pour $\omega_B = 0$ et la vitesse v_{in} que

le point aurait acquise pour $\omega_A = 0$. Il est évident que

$$v_{i0} = [\omega_A R_i], \quad v_{in} = [\omega_B R_i];$$

par conséquent, la vitesse de l'i-ème point du corps dans le mouvement composé s'écrira sous la forme

$$v_i = v_{i0} + v_{in} = [\omega_A R_i] + [\omega_B R_i] = \\ = [(\omega_A + \omega_B) R_i] = [\omega R_i], \tag{62.2}$$

où $\omega = \omega_A + \omega_B$ est la somme géométrique des vitesses angulaires. Le vecteur ω_B conserve une position invariable étant dirigé suivant l'axe fixe OB, quant aux vecteurs ω_A et ω leur position varie dans l'espace le vecteur ω étant situé dans le plan passant par les axes de rotation fixe et mobile du corps. Donc le mouvement composé du corps peut être représenté comme une rotation à l'instant donné autour de l'axe OD passant par O dans la direction de ω; cet axe est appelé *axe instantané de rotation*. Il modifie constamment sa direction dans l'espace ainsi que sa position par rapport au corps. Il est clair que les points du corps, situés au moment donné sur l'axe instantané de rotation, possèdent *la vitesse v_i égale à zéro*, ou $v_{in} = -v_{i0}$, c'est-à-dire que dans des rotations simples les vitesses sont égales et opposées.

En observant la rotation composée du globe autour de deux axes (voir fig. 167), on peut suivre la position et le mouvement de l'axe instantané : aux endroits où l'axe OD traverse sa surface les contours de la carte semblent plus nets qu'ailleurs. Si l'on couvre le globe d'un papier journal l'effet produit est plus frappant.

On donne une interprétation géométrique simple à la description faite plus haut de la rotation composée autour de deux axes à des vitesses constantes ω_A et ω_B. Le mouvement du corps est assimilé à un roulement d'un cône imaginaire OA', invariablement lié au corps, sur un cône, également imaginaire, OB' immobile dans l'espace; la ligne de contact des cônes OD est justement l'*axe instantané* (fig. 169, *a*). Le cône OA' pivote à tout instant autour de l'axe instantané OD, c'est-à-dire roule sans glissement sur le cône OB'. Suivant la grandeur et la direction de ω_A et ω_B, l'axe OD peut se trouver à l'extérieur de l'angle formé par les axes OA et OB; dans ce cas le cône OA' se trouvera à l'intérieur du cône OB' et roulera sur sa surface intérieure (fig. 169, *b*). Ceci se produira au cas où les vitesses angulaires de rotation autour des axes OA et OB sont dirigées dans des sens différents, comme c'est indiqué sur la figure 169, *b*.

Examinons encore deux exemples d'addition des vitesses angulaires.

Le roulement du corps sur le plateau d'une table est un mouvement composé du corps solide (fig. 170, *a*). A chaque instant le cône effectue une rotation à la vitesse angulaire ω_1 autour de l'axe instantané $11'$ situé sur la ligne de contact du cône avec le plateau de la table. Ce mouvement peut être également représenté comme une rotation simultanée autour de deux axes : l'axe vertical $22'$ (immobile

dans l'espace) à la vitesse angulaire ω_2 et l'axe oblique OO' (coïncidant avec l'axe géométrique du cône) à la vitesse angulaire ω_0. Le vecteur ω_1 est égal à la somme des vecteurs ω_2 et ω_0.

C'est à peu près de la même façon qu'on peut se représenter les vitesses angulaires de rotation de la meule tournante montrée sur

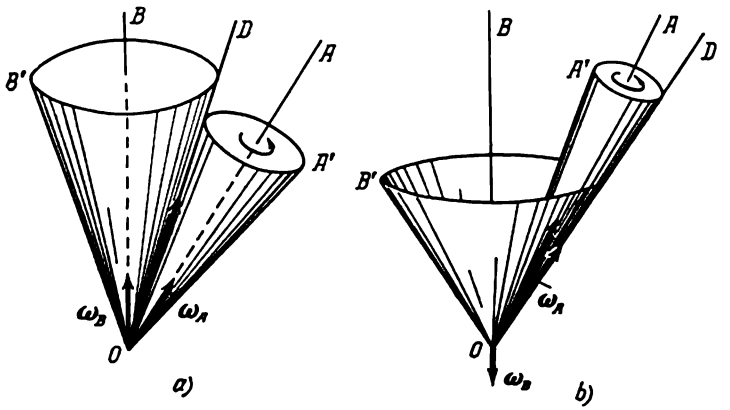


Fig. 169

la figure 170, *b*. La meule, roulant sur le plan, effectue un mouvement composé qui peut être assimilé à une rotation du corps solide

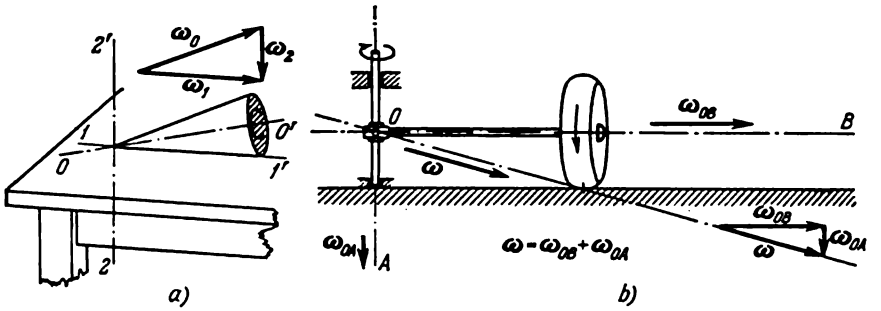


Fig. 170

autour d'un point fixe O. Le mouvement de la meule peut être assimilé au roulement du cône sur le bord de sa base suivant un plan horizontal, son axe géométrique restant tout le temps horizontal. La direction des axes et la relation liant les vitesses angulaires sont indiquées sur la figure 170, *b*.

§ 63. MOMENT DE LA FORCE PAR RAPPORT AU POINT ET MOMENT DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT DU CORPS SOLIDE

Si la direction de la force agissant sur le corps solide maintenu par un point passe par ce point, il va de soi que cette force ne modifiera pas l'état du corps, l'action de la force étant équilibrée par la force extérieure appliquée au corps au point de fixation. L'état d'équilibre ou de mouvement ne peut donc être modifié que par la force appliquée au corps dont la ligne d'action ne passe pas par le point de fixation.

Dans ce cas, comme auparavant, la mesure de l'action de la force est son moment, la force tendant à faire pivoter le corps autour

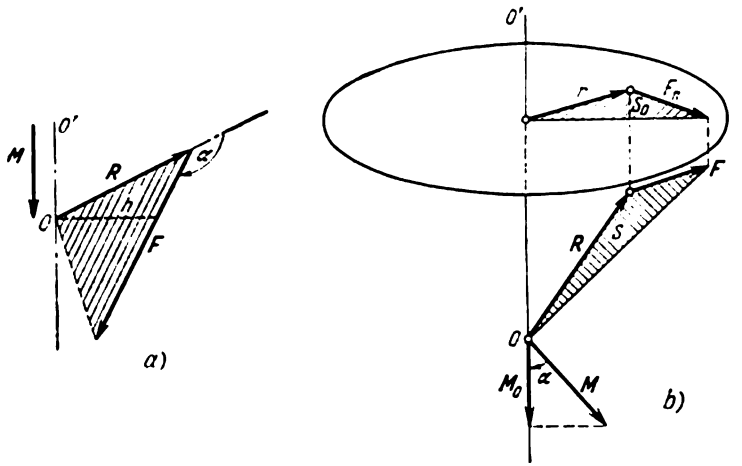


Fig. 171

de l'axe perpendiculaire au plan passant par la ligne d'action de la force et le point de fixation. Par conséquent, le moment de la force $\boldsymbol{M}$ par rapport au point O (fig. 171, *a*) est une grandeur vectorielle définie comme le produit vectoriel du rayon vecteur R (mené du point O vers le point d'application de la force) par le vecteur force $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{RF}], \quad M = RF \sin \alpha = Fh, \tag{63.1}$$

où h est le « bras de levier » de la force $\boldsymbol{F}$ ($h = R \sin \alpha$). La définition du moment de la force comme une grandeur vectorielle donne la direction de l'axe autour duquel la force tend à faire pivoter le corps et tient compte de la grandeur du « bras de levier » de la force h, exprimant la distance du point de fixation à la ligne d'action de la force.

Il est évident qu'il y aura équilibre du corps ayant un point fixe au cas d'égalité à zéro de la somme des moments de toutes les forces par rapport au point fixe ou quand l'ensemble des vecteurs moments de toutes les forces forme un polygone (en général gauche) fermé.

On a abouti ainsi à la notion du moment d'une force par rapport au point, en examinant le problème du mouvement et de l'équilibre du corps maintenu en un point. Or, dans nombre d'autres problèmes de la mécanique un rôle important est joué par la notion de *moment d'une force par rapport à tout point O donné*, généralement appelé *pôle*. Si sont connus la force $\boldsymbol{F}$ et le point de son application, on peut toujours trouver le moment de la force $[\boldsymbol{RF}]$ par rapport à un certain pôle O à partir duquel le vecteur $\boldsymbol{R}$ est mené vers le point d'application de la force.

Dans le cas particulier de mouvement plan (voir § 57) on avait déjà rencontré la définition du moment d'une force par rapport au pôle, mais ce moment y avait toujours une direction déterminée dans l'espace et coïncidait avec le moment par rapport à un axe toujours perpendiculaire au plan du mouvement.

Le moment d'une force par rapport à un axe donné OO', dont la définition a été fournie au § 54, est égal à M_0, projection sur l'axe OO' du moment $\boldsymbol{M}$ d'une force par rapport *à tout point O situé sur l'axe OO'* (fig. 171, *b*). En effet, l'aire S_0 égale à la projection de l'aire S sur le plan perpendiculaire à l'axe OO' est la même pour tous les points O se trouvant sur l'axe; si $2S$ est numériquement égal au module de $\boldsymbol{M}$, moment de la force $\boldsymbol{F}$, $2S_0$ est égal au moment M_0 de la même force par rapport à l'axe, et il suit de l'égalité $S_0 = S \cos \alpha : M_0 = M \cos \alpha$ (voir fig. 171, *b*).

Dans l'étude des lois de mouvement du corps solide, un rôle important revient au moment de la quantité de mouvement par rapport au pôle O. On appelle moment de la quantité de mouvement (ou moment cinétique) d'une particule matérielle isolée du corps de masse Δm_i par rapport au point considéré le produit vectoriel du rayon-vecteur de la particule $\boldsymbol{R}_i$ par le vecteur de la quantité de mouvement de cette particule $\Delta m_i \boldsymbol{v}_i$ (fig. 172). Le moment cinétique de tout le corps solide se définit comme la somme des moments cinétiques de toutes les particules du corps:

$$\boldsymbol{N} = \sum_i \Delta m_i [\boldsymbol{R}_i \boldsymbol{v}_i]. \tag{63.2}$$

Il est évident que le moment cinétique du corps solide est une grandeur vectorielle. Rappelons que le moment cinétique du corps par rapport à un axe fixe (§ 53) est égal à $I\omega$, où I est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe considéré et ω, la vitesse angulaire de rotation. Comme dans le cas du moment d'une force, la projection

sur un axe fixe du moment cinétique par rapport à tout point de l'axe est égale à $I\omega$.

En général le vecteur moment cinétique *ne coïncide pas* avec la direction de l'axe instantané ou fixe. Soit, par exemple, un corps composé de deux particules de masse m_1 et m_2 en rotation près du point O au moment considéré autour de l'axe ω (fig. 173) coupant obliquement la ligne joignant les particules. L'axe de rotation et les particules se trouvent dans le plan du dessin. Il va alors de soi que les vitesses v_1 et v_2 sont perpendiculaires au plan du dessin, tandis

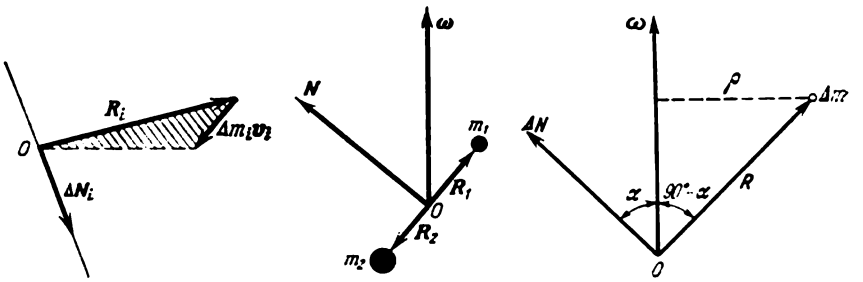


Fig. 172 Fig. 173 Fig. 174

que le vecteur N, vecteur moment cinétique par rapport à O, doit être perpendiculaire à la ligne joignant les particules et se trouve dans le plan du dessin. Pour une sphère homogène en rotation autour du centre, le moment cinétique coïncide avec l'axe instantané de rotation.

Comme il a été dit plus haut, chaque corps possède trois *axes libres* mutuellement perpendiculaires et passant par le centre des masses; on les appelle encore *axes d'inertie principaux*. Si l'axe de rotation coïncide avec l'axe d'inertie principal, le moment cinétique se confond alors aussi avec l'axe de rotation.

§ 64. MOMENT CINÉTIQUE (D'IMPULSION) DU CORPS SOLIDE ET MOMENT D'INERTIE

Si un corps solide tourne autour de l'axe ω passant par un point fixe O (fig. 174), le moment d'impulsion de la particule de masse Δm est

$$\Delta N = \Delta m\,[\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}] = \Delta m\,[\boldsymbol{R}\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}]]\,; \qquad (64.1)$$

ΔN est situé dans le plan de ω et de $\boldsymbol{R}$ et est normal à $\boldsymbol{R}$. La projection de ΔN sur ω est $\Delta N_\omega = \Delta m\rho^2\omega$. En effet,

$$\Delta N_\omega = \Delta N \cos\alpha = \Delta m R v \cos\alpha =$$

$$= \Delta m\, vR \sin(90° - \alpha) = \Delta m\, v\rho = \Delta m\rho^2\omega,$$

car $v = \omega\rho$. Donc auparavant, en parlant de la rotation du corps autour d'un axe fixe, on n'envisageait que la projection du moment cinétique sur l'axe de rotation ΔN_ω égale au moment d'inertie de la particule $\Delta I = \Delta m\rho^2$, multiplié par ω. Il est évident que ΔN_ω ne dépend pas de la position du point O sur l'axe de rotation. L'égalité $\Delta N = \Delta I\omega$ montre une simple dépendance entre des nombres (des scalaires).

Ne peut-on trouver une liaison entre les vecteurs $\Delta \boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{\omega}$ dans le cas général? Il s'avère que c'est dans le domaine du possible et qu'elle s'exprime par un double produit vectoriel qu'il est commode de représenter au moyen d'une nouvelle grandeur physique, le *tenseur*, qui est une extension et une généralisation de la notion de grandeur vectorielle. Pour spécifier la liaison directe entre les vecteurs $\Delta \boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{\omega}$, cherchons la dépendance entre les projections de $\Delta \boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{\omega}$ sur les axes des coordonnées. Au préalable, sur la base de la formule d'algèbre vectorielle

$$[\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{ab})$$

écrivons (64.1) sous la forme:

$$\Delta \boldsymbol{N} = \Delta m R^2 \boldsymbol{\omega} - \Delta m \boldsymbol{R}\,(\boldsymbol{\omega R}). \tag{64.2}$$

Cela revient à décomposer $\Delta \boldsymbol{N}$ suivant les composantes le long de $\boldsymbol{\omega}$ et de $\boldsymbol{R}$ (fig. 175). Maintenant écrivons les projections de $\Delta \boldsymbol{N}$ sur les axes x, y, z d'un système des coordonnées rectangulaire solidaire du corps:

$$\Delta N_x = \Delta m R^2 \omega_x - \Delta m x\,(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z),$$

ou

$$\Delta N_x = \Delta m\,(R^2 - x^2)\,\omega_x - \Delta m xy\omega_y - \Delta m xz\omega_z, \tag{64.3}$$

et de la même façon

$$\Delta N_y = -\Delta m yx\omega_x + \Delta m\,(R^2 - y^2)\,\omega_y - \Delta m yz\omega_z,$$
$$\Delta N_z = -\Delta m zx\omega_x - \Delta m zy\omega_y + \Delta m\,(R^2 - z^2)\,\omega_z,$$

où, comme toujours, x, y, z sont les projections du vecteur $\boldsymbol{R}$. Chaque projection de $\Delta \boldsymbol{N}$ est linéairement dépendante de *toutes* les projections de $\boldsymbol{\omega}$; la régularité des coefficients est évidente: chacun d'eux a la dimension du moment d'inertie de la particule de masse Δm.

L'ensemble des neuf facteurs accompagnant $\boldsymbol{\omega}$ constitue le *tenseur du moment d'inertie* de la particule de masse Δm. Ce tenseur est désigné par une lettre manuscrite et s'écrit sous la forme d'un tableau (*matrice*):

$$\Delta \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \Delta m\,(R^2 - x^2) & -\Delta m xy & -\Delta m xz \\ -\Delta m yx & \Delta m\,(R^2 - y^2) & -\Delta m yz \\ -\Delta m zx & -\Delta m zy & \Delta m\,(R^2 - z^2) \end{pmatrix}. \tag{64.4}$$

Les trois dernières égalités de (64.3) se réduisent à la formule

$$\Delta N = \Delta\, \mathcal{J}\omega. \tag{64.5}$$

La formule (64.5) est de la forme analogue à $\Delta N_\omega = \Delta I\omega$ à la différence qu'ici $\Delta\mathcal{J}$ n'est pas un nombre, mais un tenseur de rang 2; la multiplication de $\Delta\mathcal{J}$ par ω s'effectue d'après la règle du produit matriciel. Cette règle se dégage de (64.3); la projection du vecteur ΔN sur l'axe x est égale à la somme des produits des éléments de la première ligne de $\Delta\mathcal{J}$ par les projections correspondantes du vecteur ω, la projection de ΔN sur l'axe y étant égale à une somme analogue des produits de la seconde ligne, etc.

Le tenseur est un ensemble ordonné de neuf nombres (représentant des grandeurs physiques) appelés *composantes* du tenseur et qui dépendent du système des coordonnées choisi; ces composantes se transforment au cas de changement du système des coordonnées comme les *produits des coordonnées*. Rappelons que le vecteur est un système ordonné de trois nombres qui se transforment avec la variation du système des coordonnées, de la même façon que les coordonnées. Le scalaire (le nombre) ne varie pas avec le changement des coordonnées. La multiplication du tenseur par le nombre se réduit à la multiplication de chaque composante par ce nombre.

Le tenseur constitue une somme ou une différence de deux tenseurs si chacune de ses composantes est égale à la somme ou à la différence des composantes respectives des tenseurs « additionnés ».

Parmi les tenseurs on distingue le tenseur *unité* égal à

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dont la multiplication par un vecteur ne modifie pas ce vecteur. Le tenseur unitaire ne se modifie pas avec le changement des coordonnées. La multiplication du tenseur $a\mathcal{E}$ par le vecteur se réduit à la multiplication du scalaire a par le vecteur. La règle de multiplication du tenseur par le vecteur a été indiquée plus haut.

Toutes les composantes du tenseur $\Delta\mathcal{J}$ (64.4) sont constituées de produits des coordonnées du point (multipliés par la masse constante Δm). Aussi appelle-t-on la grandeur $\Delta\mathcal{J}$ *tenseur* chacune de ses composantes se transformant en concordance avec la condition mentionnée de transformation des composantes du tenseur.

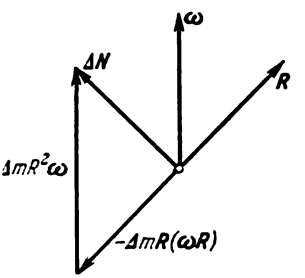


Fig. 175

On aurait pu ne pas introduire le tenseur d'inertie $\Delta\mathcal{J}$ pour une seule particule, car la relation entre ΔN et ω se dégage directement de l'égalité (64.2): le vecteur ΔN se trouve dans le plan de ω et de R et son tracé est montré à la figure 175. Mais le tenseur $\mathcal{J}$ est nécessaire à la description de la rotation du corps solide autour d'un point fixe. Dans ce cas le moment cinétique

$$N = \sum \Delta m_i\, [R_i\, [\omega R_i]] = \sum \Delta m_i R_i^2\, \omega - \sum \Delta m_i R_i\, (\omega R_i),$$

en faisant appel au tenseur peut s'écrire ainsi :

$$N = \mathcal{J}\omega, \tag{64.6}$$

où $\mathcal{J} = \sum \Delta\mathcal{J}_i$, ou

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix},$$

les composantes du tenseur $\mathcal{J}$ étant

$$\begin{gathered} I_{xx} = \sum \Delta m_i (R_i^2 - x_i^2), \\ I_{yy} = \sum \Delta m_i (R_i^2 - y_i^2), \\ I_{zz} = \sum \Delta m_i (R_i^2 - z_i^2), \\ I_{xy} = I_{yx} = -\sum \Delta m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = I_{zx} = -\sum \Delta m_i x_i z_i, \\ I_{yz} = I_{zy} = -\sum \Delta' m_i y_i z_i. \end{gathered} \tag{64.7}$$

Il est évident que les composantes à deux indices identiques constituent des moments d'inertie autour des axes respectifs, par exemple

$$I_{xx} = \sum \Delta m_i (R_i^2 - x_i^2) = \sum \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

qui est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe x, etc. Les composantes aux indices différents sont appelées *produits d'inertie*. Le tenseur $\mathcal{J}$ n'a que *six* composantes indépendantes, car $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$; ce tenseur est dit *symétrique*.

Les composantes du tenseur dépendent du choix du système des coordonnées, de la direction des axes. Si le système des coordonnées est invariablement lié au corps, les composantes du tenseur $\mathcal{J}$ sont des grandeurs invariables dans le temps. Et dans ce cas les composantes N et ω se définissent alors par rapport aux mêmes axes. Donc six grandeurs (I_{xx}, I_{xy}, . . .) définissent une multitude de valeurs de N correspondant à toute direction de ω, chaque N ne coïncide pas, en général, avec la direction de ω.

Or il se révèle que pour tout corps et pour tout point O il existe au moins trois directions de ω (axes de rotation) mutuellement perpendiculaires pour lesquelles le vecteur N coïncide avec le vecteur ω. Ces directions sont dites *principales* ou *axes principaux de rotation*. Pour les directions principales

$$N = \lambda\omega,$$

où λ est un nombre. Ecrivons l'égalité générale fondamentale (64.6) en projections sur les axes des coordonnées :

$$\begin{gathered} N_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ N_y = I_{yx} + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ N_z = I_{zx}\omega_y + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{gathered} \tag{64.8}$$

Pour une direction principale, ces équations s'écriront ainsi :

$$\begin{aligned}\lambda\omega_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z,\\ \lambda\omega_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z,\\ \lambda\omega_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z;\end{aligned} \tag{64.9}$$

ce sont trois équations homogènes par rapport aux inconnues ω_x, ω_y, ω_z. Ce système n'admet des solutions différentes de zéro qu'au cas où le déterminant des coefficients du système est nul, ou

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-\lambda & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & I_{yy}-\lambda & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{64.10}$$

C'est une équation algébrique du troisième ordre par rapport à l'inconnue λ:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \tag{64.11}$$

où a_1, a_2, a_3 dépendent des connues I_{xx}, I_{xy}... (composantes du tenseur d'inertie).

Supposons qu'on a résolu l'équation (64.11) et trouvé trois racines différentes λ_1, λ_2, λ_3. Ensuite, en portant l'une des valeurs de λ, par exemple λ_1 de nouveau dans le système (64.9), on trouve la direction principale $\boldsymbol{\omega}_1$ pour laquelle $\boldsymbol{N} = \lambda_1\boldsymbol{\omega}_1$. Ecrivons les deux premières équations du système (64.9):

$$\lambda_1 - I_{xx} = I_{xy}\frac{\omega_y}{\omega_x} + I_{xz}\frac{\omega_z}{\omega_x},$$

$$I_{yx} = (I_{yy}-\lambda_1)\frac{\omega_y}{\omega_x} + I_{yz}\frac{\omega_z}{\omega_x},$$

De là on tire ω_y/ω_x et ω_z/ω_x, c'est-à-dire la direction de l'axe principal de rotation, ou la direction de $\boldsymbol{\omega}_1$, la grandeur du vecteur pouvant être quelconque. De façon analogue, on trouvera les directions des axes principaux pour λ_2 et λ_3.

Désignons les directions des axes principaux des λ_1, λ_2, λ_3 respectifs par des vecteurs unitaires $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$. Démontrons que $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ sont mutuellement perpendiculaires si tous les λ_1, λ_2, λ_3 sont différents.

Pour les composantes de $\boldsymbol{n}_1$ on peut écrire le système d'équations $\lambda_1\boldsymbol{n}_1 = \mathcal{J}\boldsymbol{n}_1$, ou en projections :

$$\begin{aligned}\lambda_1 n_{1x} &= I_{xx}n_{1x} + I_{xy}n_{1y} + I_{xz}n_{1z},\\ \lambda_1 n_{1y} &= I_{yx}n_{1x} + I_{yy}n_{1y} + I_{yz}n_{1z},\\ \lambda_1 n_{1z} &= I_{zx}n_{1x} + I_{zy}n_{1y} + I_{zz}n_{1z}.\end{aligned} \tag{64.12}$$

Multiplions la première équation par n_{2x}, la seconde par n_{2y} et la troisième par n_{2z} et additionnons-les terme à terme, il vient

$$\lambda_1\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = A_1,$$

où par A_1 on désigne le produit scalaire du vecteur $\boldsymbol{n}_2$ par le vecteur $\mathcal{J}\boldsymbol{n}_1$, ou $A_1 = \boldsymbol{n}_2\mathcal{J}\boldsymbol{n}_1$. Si l'on écrit le système d'équations $\lambda_2\boldsymbol{n}_2 = \mathcal{J}\boldsymbol{n}_2$, puis on multiplie chaque équation par les composantes correspondantes de $\boldsymbol{n}_1$ et on les somme on obtient $\lambda_2\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = A_2 = \boldsymbol{n}_1\mathcal{J}\boldsymbol{n}_2$. Comme le tenseur $\mathcal{J}$ est symétrique (c'est-à-dire $I_{xy} = I_{yx}$, ...) il est facile de reconnaître que $A_1 = A_2$. Donc

$$\lambda_1\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_1 = \lambda_2\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2, \tag{64.13}$$

ou $(\lambda_1 - \lambda_2)\,\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = 0$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ la dernière égalité n'est satisfaite que pour $\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = 0$, les vecteurs $\boldsymbol{n}_1$ et $\boldsymbol{n}_2$ sont donc orthogonaux. De façon analogue on démontre que $\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3 = 0$ si $\lambda_2 \neq \lambda_3$ et $\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3 = 0$ pour $\lambda_1 \neq \lambda_3$.

Il est important de noter que si les directions $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ sont les directions des axes des coordonnées, le tenseur d'inertie comme les autres expressions prendront une forme particulièrement simple. Dans ce cas

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{n}_1 + \omega_2\boldsymbol{n}_2 + \omega_3\boldsymbol{n}_3 \text{ et}$$

$$\boldsymbol{N} = N_1\boldsymbol{n}_1 + N_2\boldsymbol{n}_2 + N_3\boldsymbol{n}_3 = \mathcal{J}\boldsymbol{w} = \mathcal{J}(\omega_1\boldsymbol{n}_1 + \omega_2\boldsymbol{n}_2 + \omega_3\boldsymbol{n}_3) =$$
$$= \omega_1\mathcal{J}\boldsymbol{n}_1 + \omega_2\mathcal{J}\boldsymbol{n}_2 + \omega_3\mathcal{J}\boldsymbol{n}_3 = \omega_1\lambda_1\boldsymbol{n}_1 + \omega_2\lambda_2\boldsymbol{n}_2 + \omega_3\lambda_3\boldsymbol{n}_3.$$

D'où dans le système des axes principaux

$$N_1 = \lambda_1\omega_1, \quad N_2 = \lambda_2\omega_2, \quad N_3 = \lambda_3\omega_3,$$
$$N^2 = N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = \lambda_1^2\omega_1^2 + \lambda_2^2\omega_2^2 + \lambda_3^2\omega_3^2. \tag{64.14}$$

Aussi le tenseur d'inertie, dans ce système des coordonnées, prend-il la forme simple suivante

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

C'est seulement sur la diagonale principale que les composantes sont différentes de zéro.

Il est certain que λ_1, λ_2, λ_3 constituent des moments d'inertie du corps dans la rotation autour des axes principaux d'inertie, ou des *moments d'inertie principaux*. Ils sont fonction de la répartition des masses de tout le corps et sont indépendants du système des coordonnées choisi. Si les axes principaux sont définis par rapport au centre des masses, ces axes seront alors des *axes libres*.

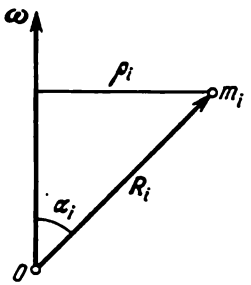


Fig. 176

On peut ensuite montrer que si deux racines λ sont mutuellement égales, par exemple $\lambda_1 = \lambda_2$, il existe un nombre infini d'axes principaux situés dans le plan normal à $\boldsymbol{n}_3$. Il en est ainsi si le corps est symétrique par rapport à un certain axe, $\boldsymbol{n}_3$ prenant alors la direction de cet axe. Les corps homogènes, un cylindre de section circulaire ou carrée, un corps de révolution, etc. possèdent une symétrie axiale. Une sphère homogène présente une symétrie centrale, et tout axe passant par le centre est un axe principal.

Donnons maintenant l'expression de l'énergie cinétique du corps solide en rotation avec une vitesse angulaire autour de l'axe passant par un point fixe O (fig. 176). On montrera que l'énergie cinétique T est liée à $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{N}$ et $\mathcal{J}$ par la relation suivante:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{N} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathcal{J}\boldsymbol{\omega}. \tag{64.15}$$

En effet, considérant (64.6), on peut écrire:

$$\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{N} = \sum \Delta m_i \boldsymbol{\omega}\,[\boldsymbol{R}_i\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}_i]],$$

et le produit

$$\boldsymbol{\omega}\,[\boldsymbol{R}_i\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}_i] = \boldsymbol{\omega}\,\{R_i^2\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{R}_i\,(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}_i)\} =$$
$$= \omega^2 R_i^2 - (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}_i)^2 = \omega^2 R_i^2\,(1 - \cos\alpha_i) = \omega^2\rho_i^2 = v_i^2.$$

Donc $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{N} = \sum \Delta m_i v_i^2 = 2T$.

On peut également présenter l'énergie cinétique ainsi :

$$T = \frac{1}{2}\sum \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum \Delta m_i \rho_i^2 = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2, \tag{64.16}$$

comme dans la rotation autour de l'axe fixe, $I_\omega = \sum \Delta m_i \rho_i^2$, qui est le moment d'inertie par rapport à l'axe coïncidant avec $\boldsymbol{\omega}$ et I_ω étant un nombre (scalaire).

Il faut noter que

$$2T = \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{N} = \omega N_\omega = I_\omega \omega^2; \tag{64.17}$$

d'où se dégage une égalité connue :

$$N_\omega = I_\omega \omega, \tag{64.18}$$

c'est-à-dire que la projection de $\boldsymbol{N}$ sur $\boldsymbol{\omega}$ est égale au moment d'inertie par rapport à l'axe coïncidant avec $\boldsymbol{\omega}$ multiplié par ω. Ce qui a été vrai pour un axe de rotation immobile au sein du corps et dans l'espace s'avère maintenant vrai pour tout axe instantané de rotation.

Habituellement on calcule d'abord le moment cinétique par rapport à l'axe passant par le centre des masses O, car on peut montrer que le moment cinétique $\boldsymbol{N}$ par rapport à tout point O' (fig. 177) est toujours égal à

$$\boldsymbol{N} = m\,[\boldsymbol{R}_0\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}_0]] + \boldsymbol{N}_0, \tag{64.19}$$

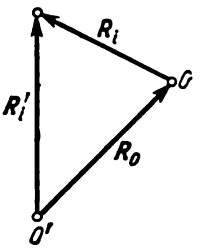


Fig. 177

où $m = \sum \Delta m_i$ est la masse de tout le corps, $\boldsymbol{R}_0$ le rayon vecteur du centre des masses du corps mené du point O' (voir fig. 177), $\boldsymbol{N}_0$ le moment cinétique du corps dans la rotation à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ autour de l'axe passant par le centre des masses O. En effet, si $\boldsymbol{R}_i' = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{R}_i$, alors

$$\boldsymbol{N} = \sum \Delta m_i\,[\boldsymbol{R}_i'\,[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}_i']] = \sum \Delta m_i\,[(\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{R}_i)\,[\boldsymbol{\omega}\,(\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{R}_i)]].$$

En explicitant le produit vectoriel complexe et en se rappelant que $\sum \Delta m_i \boldsymbol{R}_i = 0$, il vient

$$\boldsymbol{N} = m\,[\boldsymbol{R}_0\,[\boldsymbol{w}\boldsymbol{R}_0]] + \sum \Delta m_i\,[\boldsymbol{R}_i\,[\boldsymbol{w}\boldsymbol{R}_i]].$$

La dernière somme, désignée plus haut par $\boldsymbol{N}_0$, est le moment cinétique de la rotation autour de l'axe passant par O à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$, quant au premier terme, c'est le moment cinétique du corps dans son ensemble, s'identifiant à une particule de masse m tournant à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ autour de l'axe passant par O'.

Le moment cinétique par rapport à l'axe passant par le centre des masses peut s'écrire ainsi :

$$\boldsymbol{N}_0 = \mathcal{J}_0 \boldsymbol{\omega}, \tag{64.20}$$

où $\mathcal{J}_0$ est le tenseur du moment d'inertie dans le système des coordonnées dont l'origine coïncide avec le centre des masses. Les composantes de $\mathcal{J}_0$ sont invariables dans le temps si le système des coordonnées est invariablement lié au corps.

Connaissant $\mathcal{J}_0$, on peut déterminer le moment d'inertie par rapport à tout point passant par O, centre des masses du corps. Soit $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire définissant la direction de l'axe de rotation. Alors, considérant (64.18) et (64.20), la projection de $\boldsymbol{N}$ sur $\boldsymbol{n}$ peut être mise sous la forme :

$$N_n = \boldsymbol{N}_0 \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\,\mathcal{J}_0 \boldsymbol{n} \omega = I_n \omega,$$

où I_n est le moment d'inertie par rapport à l'axe $\boldsymbol{n}$. Ou encore :

$$I_n = \boldsymbol{n}\,\mathcal{J}_0\boldsymbol{n}. \tag{64.21}$$

Si l'on écrit le nombre I_n en faisant appel aux composantes du tenseur $\mathcal{J}_0$ et du vecteur $\boldsymbol{n}$, on obtiendra une expression rébarbative. Donnons une formule plus brève et explicite en prenant pour axes des coordonnées les directions principales $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$; alors, $\boldsymbol{n} = \alpha_1\boldsymbol{n}_1 + \alpha_2\boldsymbol{n}_2 + \alpha_3\boldsymbol{n}_3$, où α_1, α_2, α_3 sont les cosinus directeurs de $\boldsymbol{n}$ par rapport aux axes $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$. Par conséquent,

$$\mathcal{J}_0\boldsymbol{n} = \alpha_1\mathcal{J}_0\boldsymbol{n}_1 + \alpha_2\mathcal{J}_0\boldsymbol{n}_2 + \alpha_3\mathcal{J}_0\boldsymbol{n}_3 = \alpha_1\lambda_1\boldsymbol{n}_1 + \alpha_2\lambda_2\boldsymbol{n}_2 + \alpha_3\lambda_3\boldsymbol{n}_3$$

et donc

$$I_n = \boldsymbol{n}\mathcal{J}_0\boldsymbol{n} = \alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 + \alpha_3^2\lambda_3, \tag{64.22}$$

où λ_1, λ_2, λ_3 sont les moments d'inertie par rapport aux axes principaux passant par le centre des masses. D'après (64.22) on peut, connaissant λ_1, λ_2, λ_3 et α_1, α_2, α_3, trouver le moment d'inertie I_n par rapport à tout axe $\boldsymbol{n}$.

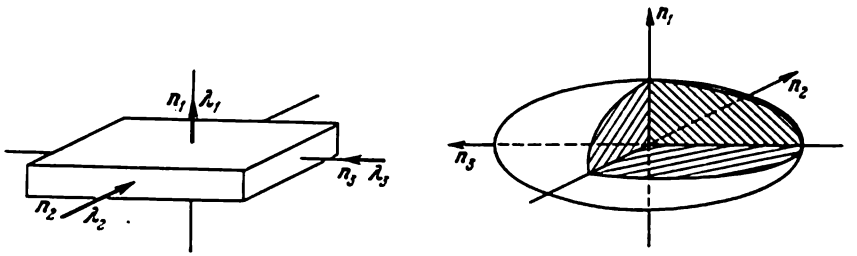


Fig. 178

On peut se faire une représentation parlante de la grandeur I_n suivant une direction quelconque en recourant à un « ellipsoïde d'inertie ». On divise l'égalité de base (64.22) par I_n et on note: $\alpha_1/\sqrt{I_n} = x_1$, $\alpha_2/\sqrt{I_n} = x_2$, $\alpha_3/\sqrt{I_n} = x_3$, l'égalité (64.22) prend alors la forme

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1.$$

C'est l'équation de l'ellipsoïde en coordonnées x_1, x_2, x_3 portées suivant les axes principaux du tenseur d'inertie $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$. Les demi-axes de l'ellipsoïde sont évidemment égaux à $1/\sqrt{\lambda_1}$, $1/\sqrt{\lambda_2}$, $1/\sqrt{\lambda_3}$, la distance du centre jusqu'à la surface de l'ellipsoïde dans la direction de $\boldsymbol{n}$ étant égale à ρ, avec

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1/I_n,$$

car $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. Donc ρ est égal à la grandeur inverse de la racine carrée du moment d'inertie I_n par rapport à l'axe de direction $\boldsymbol{n}$. Ainsi la surface de l'ellipsoïde d'inertie donne une représentation explicite de la grandeur de tous les moments d'inertie possibles par rapport aux axes passant par le centre des masses [1]. Le plus petit axe de l'ellipsoïde coïncide avec l'axe du plus grand moment d'inertie possible, tandis que le grand axe se confond avec l'axe du plus petit moment d'inertie.

On peut s'assurer que l'aspect général de l'ellipsoïde d'inertie « rappelle » la forme d'un corps homogène. Par exemple, un parallélépipède homogène aux arêtes de longueur différente (de la forme d'une boîte d'allumettes) engendre un ellipsoïde d'inertie montré en coupe sur la figure 178 ; le plus grand demi-axe

[1] On peut construire l'ellipsoïde d'inertie par rotation autour de l'axe passant par un point arbitraire du corps.

est dirigé suivant n_3, le plus petit, suivant n_1. Les axes principaux du tenseur du moment d'inertie par rapport au centre des masses sont des *axes libres*. Les axes principaux du tenseur du moment d'inertie par rapport à un point quelconque du corps ne seront pas des axes libres, car dans la rotation du corps autour de l'un de ces axes, cet axe sera soumis à l'action de la force d'inertie centrifuge, la direction de N coïncidant toutefois avec celle de ω. (Voir plus en détail, p. 236.)

Pour un corps de révolution, l'ellipsoïde d'inertie est également un ellipsoïde de révolution, l'un des axes principaux coïncidant avec l'axe de symétrie, et tout axe perpendiculaire à cet axe qui passe par le centre des masses est un axe principal. Deux directions mutuellement perpendiculaires d'un plan perpendiculaire à l'axe de rotation peuvent être prises pour axes de l'ellipsoïde. Pour une sphère en matériau homogène, toute direction passant par le centre des masses est une direction principale, c'est-à-dire que l'ellipsoïde d'inertie dégénère en une sphère.

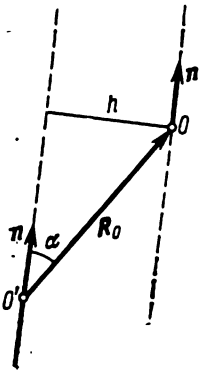


Fig. 179

Si le corps à axe de symétrie et dont les moments d'inertie sont égaux à deux axes principaux mutuellement perpendiculaires, l'ellipsoïde d'inertie qui lui correspond sera un ellipsoïde de révolution. C'est le cas d'une barre à section carrée; des conditions de symétrie on déduit que deux axes principaux possèdent des moments d'inertie égaux. Ces considérations autorisent également à affirmer que l'ellipsoïde d'inertie d'un cube dégénère en une sphère.

Remarquons en conclusion de ce paragraphe que le théorème de Huygens-Steiner découle de l'égalité (64.19). Multiplions cette égalité par le vecteur unitaire n, et considérant (64.20) et que $\omega = n\omega$, il vient

$$N_n = nN = m\omega n\,[R_0\,[nR_0]] + n\,\mathcal{J}_0 n\omega = n\,\mathcal{J} n\omega;$$

$I_{0n} = n\,\mathcal{J}_0 n$ est le moment d'inertie par rapport à l'axe dirigé suivant n qui pas separ le centre des masses O; $I_n = n\mathcal{J}n$ est le moment d'inertie par rapport à l'axe dirigé suivant n passant par un certain point O' (fig. 179). Le produit scalaire prend la forme

$$n\,[R_0\,[n\,R_0]] = R_0^2 - (n\,R_0)^2 = R_0^2\,(1 - \cos^2\alpha) = h^2,$$

où h est la distance entre les axes de direction n et passant par les points O et O'. Portant cette expression dans l'égalité de base et simplifiant par ω, il vient:

$$mh^2 + I_{0n} = I_n$$

qui est l'expression du *théorème sur les moments d'inertie par rapport aux axes parallèles*.

Utilisant ce théorème, déterminons les ellipsoïdes d'inertie de la sphère pour divers points de rotation.

Supposons que la sphère tourne autour du point O' situé à la distance h de son centre. La symétrie permet d'affirmer qu'un axe principal passe par le point O' et le centre de la sphère, et que les moments d'inertie autour de tout axe passant par O' et normal à OO' sont identiques. Deux autres axes *mutuellement perpendiculaires dans le plan normal* à OO' correspondent aux moments d'inertie égaux et sont des *axes principaux*. Aussi l'ellipsoïde d'inertie est-il un ellipsoïde de révolution autour du premier axe principal suivant la ligne OO'. Il va de soi que le moment d'inertie par rapport à cet axe est égal à I_0, autrement dit, au moment d'inertie de la sphère. Le moment d'inertie par rapport au deuxième (et troisième) axe principal est $I_0 + mh^2$. Donc le rapport des demi-

axes de l'ellipsoïde d'inertie pour le point O' est

$$\frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{I_0+mh^2}}=\frac{\sqrt{2/5}}{\sqrt{2/5+h^2/r^2}}=\left(1+\frac{5h^2}{2r^2}\right)^{-1/2},$$

si l'on se souvient que $I_0 = 2/5\ mr^2$, où r est le rayon de la sphère (voir (59.12)). On a donné sur la figure 180 les dimensions respectives des ellipsoïdes d'inertie pour trois points: $h = 0$, $h = r$, $h = 2r$. Dans ce cas $A = 1\sqrt{I_0}$.

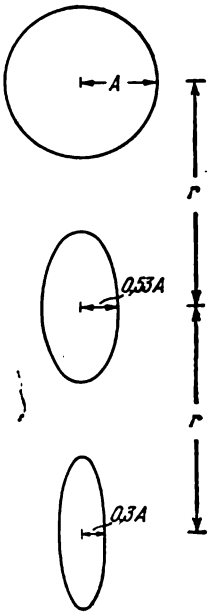


Fig. 180

§ 65. LOI FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE DU CORPS SOLIDE

Considérons le mouvement du corps solide dans un système des coordonnées dont l'origine coïncide avec le point O et admettons que l'on connaisse les forces agissant sur chacune des particules du corps. Soit $\boldsymbol{F}_i$ la force agissant sur la particule de masse Δm_i située au point dont le rayon vecteur mené du point O est $\boldsymbol{R}_i$. La force $\boldsymbol{F}_i$ est considérée comme étant la résultante de toutes les forces, extérieures et intérieures, agissant sur la particule. Alors en vertu de la seconde loi de la dynamique

$$\Delta m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}=\boldsymbol{F}_i. \tag{65.1}$$

Multiplions vectoriellement les deux membres de l'égalité par le rayon vecteur de la particule $\boldsymbol{R}_i$:

$$\Delta m_i\left[\boldsymbol{R}_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\right]=[\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{F}_i]=\Delta\boldsymbol{M}_i. \tag{65.2}$$

Ecrivons maintenant le moment cinétique de la même particule par rapport au point O

$$\Delta\boldsymbol{N}_i = \Delta m_i\,[\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{v}_i] \tag{65.3}$$

et sa dérivée par rapport au temps

$$\frac{d}{dt}\Delta\boldsymbol{N}_i=\frac{d}{dt}(\Delta m_i\,[\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{v}_i])=\Delta m_i\left[\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\,\boldsymbol{v}_i\right]+\Delta m_i\left[\boldsymbol{R}_i\,\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\right]. \tag{65.4}$$

La dérivée du rayon vecteur est égale à la vitesse du point, ou

$$\frac{d\boldsymbol{R}_i}{dt}=\boldsymbol{v}_i,$$

donc

$$\left[\frac{d\boldsymbol{R}_i}{dt}\,\boldsymbol{v}_i\right]=[\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i]=0.$$

Comparant (65.4) et (65.2), il vient

$$\frac{d}{dt}\Delta N_i = \Delta m_i \left[R_i \frac{dv_i}{dt} \right] = \Delta M_i, \tag{65.5}$$

c'est-à-dire que le moment de la force agissant sur la particule du corps est égal à la dérivée du moment cinétique de cette particule.

Additionnons maintenant les moments de toutes les forces appliquées à toutes les particules du corps ainsi que les dérivées des moments cinétiques de toutes les particules qui leur sont égales:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \Delta N_i = \sum_i \Delta M_i,$$

ou

$$\frac{dN}{dt} = M, \tag{65.6}$$

avec

$$\sum_i \Delta N_i = N \quad \text{et} \quad \sum M_i = M.$$

Comme toutes les forces intérieures interviennent dans le système toujours deux par deux, la somme des moments des forces intérieures par rapport à tout point est nulle et, par suite, par moment de toutes les forces il faut entendre le moment des seules forces *extérieures* appliquées au corps.

La loi fondamentale de la dynamique du corps solide peut par suite s'énoncer ainsi: *le moment de toutes les forces extérieures est égal à la dérivée du moment cinétique du corps par rapport à tout point fixe O.*

Cette loi peut être formulée aussi de la façon suivante: l'accroissement du moment cinétique dN durant le temps dt se confond en grandeur et en direction avec le produit du moment de toutes les forces extérieures M par le temps dt (dt et dN sont des grandeurs infiniment petites).

A la loi (65.6) il faut encore ajouter la loi, toujours vraie, du centre des masses dégagée au § 56:

$$m\frac{dv_0}{dt} = F, \tag{65.7}$$

où v_0 est la vitesse du centre des masses et F, la somme des forces extérieures.

La loi de variation du moment cinétique (65.6) peut également être adaptée à un système des coordonnées non en rotation, subissant une translation et restant lié au centre des masses et démontrer que

$$\frac{dN_0}{dt} = M_0, \tag{65.8}$$

où N_0 est le moment cinétique par rapport au centre des masses et M_0 le moment des forces extérieures par rapport au centre des

masses. La démonstration est menée de la même façon que pour le mouvement plan au § 57, lors de la déduction d'une formule analogue (voir (57.8)), mais ici tous les vecteurs ($\boldsymbol{R}_i$, $\boldsymbol{v}_i$, etc.) prennent, en général, des directions quelconques dans l'espace.

Ainsi donc les formules (65.7) et (65.8) décrivent complètement la dynamique du mouvement du corps solide. Habituellement, les calculs pratiques et l'analyse du mouvement au moyen de la formule (65.8) ne sont pas si simples. La situation se complique par le fait

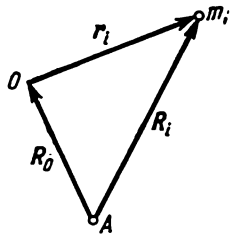


Fig. 181

que dans nombre de cas il s'avère difficile de déterminer simplement la direction du moment cinétique.

En passant en revue la déduction des lois fondamentales de la dynamique du corps solide, il devient aisé de conclure que les lois

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{F}, \quad \frac{d\boldsymbol{N}}{dt} = \boldsymbol{M} \tag{65.9}$$

se justifient pour tout système de particules matérielles. Rappelons que $\boldsymbol{K} = \sum \boldsymbol{K}_i$ est la somme des impulsions (des quantités de mouvement) de toutes les particules, $\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i$ étant la somme de toutes les forces extérieures, etc.

Il faut noter tout particulièrement la nature de la variation des moments (65.6) (pour un système de particules et pour un corps solide) au cours du changement de *pôle* par rapport auquel se définissent les moments. Posons que $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}_i$, $\boldsymbol{R}_i$, etc. sont calculés par rapport à un certain point A (fig. 181) dans un référentiel immobile. Comment variera la loi des moments au cours du passage à un autre pôle O défini par le vecteur $\boldsymbol{R}_0$?

Dans un but de généralisation posons pour l'instant que $\boldsymbol{R}_0$ est une fonction de t, c'est-à-dire que le pôle O est mobile. Alors pour chaque i-ème particule (voir fig. 181)

$$\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r}_i.$$

Montrons que le moment des impulsions du système des particules par rapport à O, égal à

$$\boldsymbol{N}_0 = \sum [\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{K}_i],$$

remplit la condition :

$$\frac{dN_0}{dt} = M_0 - \left[\frac{dR_0}{dt} K\right], \tag{65.10}$$

où $M_0 = \sum [r_i F_i]$. En effet, en portant dans la formule $N = \sum [R_i K_i]$ la valeur de R_i on peut écrire :

$$N = \sum [(R_0 + r_i) K_i] = [R_0 \sum K_i] + \sum [r_i K_i],$$

ou

$$N = [R_0 K] + N_0.$$

D'où

$$\frac{dN}{dt} = \left[\frac{dR_0}{dt} K\right] + \left[R_0 \frac{dK}{dt}\right] + \frac{dN_0}{dt},$$

ce qui, d'après (65.6), doit être égal à

$$M = \sum [R_i F_i] = \sum [(R_0 + r_i) F_i] = \\ = [R_0 \sum F_i] + \sum [r_i F_i] = [R_0 F] + M_0.$$

Ayant en vue que $F = \frac{dK}{dt}$, on trouve la relation (65.10). Elle montre que le pôle fixe O peut être choisi de façon quelconque, alors $\frac{dR_0}{dt} = 0$ et la loi de variation du moment cinétique prend sa forme habituelle (65.6) ; cela a lieu également dans le cas de $\frac{dR_0}{dt} \parallel K$, quand le pôle O se déplace parallèlement au vecteur quantité de mouvement du système de particules (du corps), c'est-à-dire à la vitesse du centre des masses et enfin quand $m \frac{dR_0}{dt} = K$, le centre d'inertie du système étant confondu avec le pôle O.

Notons qu'en déterminant N_0 on tient compte de la vitesse (et de la quantité de mouvement) relativement au référentiel immobile. Mais on peut montrer que la somme des moments sera aussi égale à la même grandeur N_0 dans le cas où l'on tient compte de la vitesse de la particule relativement à un référentiel effectuant un mouvement de translation avec le centre d'inertie.

Soit k_i la quantité de mouvement (impulsion) de la particule dans ce référentiel, alors

$$K_i = m_i \frac{dR_0}{dt} + k_i,$$

où $\frac{dR_0}{dt}$ est la vitesse du centre des masses. Donc,

$$N_0 = \sum [r_i K_i] = \sum \left[r_i \left(m_i \frac{dR_0}{dt} + k_i\right)\right] = \\ = \left[\sum m_i r_i \frac{dR_0}{dt}\right] + \sum [r_i k_i] = \sum [r_i k_i].$$

Puisque le pôle O est le centre des masses du système de particules $\sum m_i r_i = 0$. La loi (65.7) du mouvement du centre des masses est donc toujours valable pour le système de particules comme pour le corps solide.

§ 66. GYROSCOPES

Dans certains cas, quand le corps effectue une rotation rapide autour d'un axe et une rotation relativement lente autour d'autres axes, on peut déterminer de façon approchée la direction du moment cinétique. Cette circonstance simplifie pour une grande part l'analyse des lois du mouvement du corps dans ces conditions.

Les phénomènes physiques ayant lieu dans la rotation des toupies ou des gyroscopes s'effectuent habituellement suivant les conditions

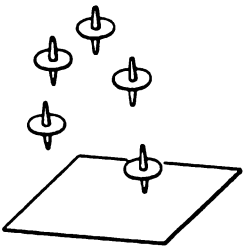


Fig. 182

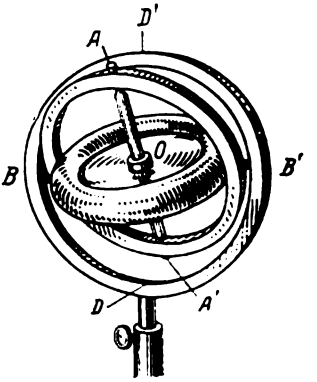


Fig. 183

mentionnées plus haut. C'est pourquoi il est relativement aisé d'aborder l'analyse élémentaire des lois du mouvement d'un gyroscope.

Chacun connaît le jouet d'enfants dénommé la toupie (le toton). En communiquant une rotation rapide à la toupie autour de son axe, chacun a observé l'étonnante stabilité de la toupie s'appuyant sur la pointe aiguisée de son axe. Après avoir « lancé » une toupie sur une plaque de carton, on peut l'envoyer en l'air. Durant le vol la toupie conserve la direction de son axe et en retombant sur la pointe demeure en équilibre tant que la vitesse de rotation autour de son axe est suffisante (fig. 182). Tous ces phénomènes s'expliquent par les lois de variation du moment cinétique (formule (65.8)) qu'on commentera plus bas en analysant les lois du mouvement des gyroscopes. On appelle *gyroscope* un corps symétrique par rapport à son axe de rotation (généralement un disque) effectuant un mouvement

de rotation rapide sur son axe. Afin de dégager les principales lois de la rotation du gyroscope, il faut le fixer au centre des masses du disque (volant). Cette fixation peut être réalisée au moyen d'une suspension à cardan du disque sur deux anneaux (cercles), comme c'est montré à la figure 183.

Un corps en forme de disque (volant) est fixé sur l'axe AA' qui tourne avec un frottement minimum dans des paliers maintenus sur l'anneau (cercle) intérieur. Le cercle intérieur peut de son côté pivoter autour de l'axe BB' s'appuyant sur des paliers fixés sur le cercle extérieur. L'axe BB' conventionnellement appelé axe horizontal, forme un angle de 90° avec l'axe du gyroscope. Le cercle externe peut tourner librement autour de l'axe DD' passant par les paliers immobiles du support. L'axe DD' est perpendiculaire à l'axe horizontal, et on l'appellera, aussi conventionnellement, axe vertical. Donc le point d'intersection des trois axes AA', BB' et DD' se confond toujours avec le centre des masses du gyroscope.

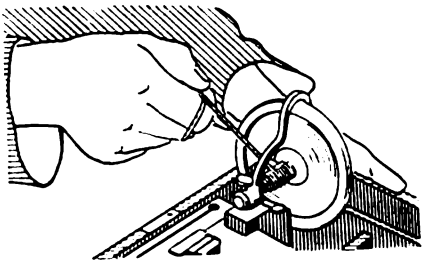


Fig. 184

Si les cercles sont symétriques par rapport à leurs axes, le volant et les cercles conserveront leur équilibre pour toute position, car la résultante des forces de pesanteur sera appliquée au point d'intersection des trois axes. Dans ce mode de « fixation » le gyroscope peut être assimilé à un corps solide symétrique stabilisé au centre des masses. L'axe du gyroscope, en pivotant sur des axes horizontal et vertical, peut prendre une direction quelconque dans l'espace. En outre, le volant peut pivoter de tout angle par rapport à son axe et, partant, peut occuper n'importe quelle position si le point O est fixe. Ce gyroscope est dit *gyroscope libre*, si, toutefois, on néglige les frottements dans les paliers des trois axes et le moment cinétique de la monture (des cercles).

Quand le volant ne tourne pas autour de son axe, il suffit d'un faible effort (le frottement dans les paliers étant réduit au minimum) pour mettre en rotation autour de tout axe le volant avec la monture. Lançons maintenant le volant du gyroscope à une très grande vitesse au moyen d'une ficelle enroulée sur l'axe (fig. 184). Le gyroscope acquerra un certain moment cinétique; étant donné que l'axe de symétrie du gyroscope reste immobile dans l'espace, il devient évident que le moment cinétique N se confond avec la direction de l'axe et est égal en grandeur à $N = I\omega$, autrement dit au moment d'inertie I multiplié par la vitesse angulaire ω.

Notons la direction de l'axe du gyroscope, puis prenons dans la main par le support tout l'instrument et imposons au support des positions différentes en soulevant et abaissant tout l'appareil; il saute aussitôt aux yeux que quelles que soient les manipulations, la direction de l'axe du volant du gyroscope ne varie pas, l'axe du gyroscope conservant dans l'espace une direction invariable. Puis, à l'aide d'une baguette, frappons le cercle intérieur et on s'aperçoit, que même sous des chocs assez forts, l'axe du gyroscope ne se déplace pas, ne modifie pas sa direction, le gyroscope paraît comme figé. Si les secousses analogues étaient imprimées au gyroscope immobile, son axe accomplirait sous le choc une rotation rapide avec le cercle.

Il est facile d'expliquer ces phénomènes sur la base de la loi fondamentale du mouvement d'un corps solide maintenu en un point. Puisque les moments des frottements dans les paliers sont infiniment petits et le moment de la pesanteur par rapport au point fixe est nul, les moments des forces extérieures n'agissent pas sur le volant tournant de l'appareil mobile; donc *le vecteur du moment cinétique conservera une valeur constante et une direction invariable dans l'espace.* Au début l'axe du gyroscope coïncidait en direction avec celle du moment cinétique et il gardera cette direction invariable dans l'espace en continuant de coïncider avec elle dans la suite. Pour la même raison une toupie lancée dans l'air conserve également la direction prise par son axe (voir fig. 182). En vol la toupie est libre, le moment de la force de pesanteur par rapport au centre des masses est nul, la pesanteur seule ne pouvant modifier la rotation du corps. Par conséquent, en vol, la toupie conserve le moment cinétique en grandeur et en direction.

Le choc sur le cercle du gyroscope engendre un certain moment M durant le temps dt, le moment cinétique reçoit durant ce temps un accroissement dN, mais la rotation du gyroscope étant très rapide son moment cinétique est très grand et l'accroissement de la quantité de mouvement ne peut donc modifier la direction du moment que d'un angle infime $d\alpha$. Le moment cinétique additionnel dN est infiniment petit devant N, et même si dN avait été perpendiculaire à N, l'axe du gyroscope n'aurait pu dévier d'un angle fini de la direction du moment cinétique, donc pratiquement il restera immobile.

Théoriquement un tel gyroscope libre aurait pu être utilisé comme boussole. Si on pouvait réduire à zéro le frottement dans les paliers de l'axe et le frottement des axes des cercles, l'axe de ce gyroscope pointerait toujours vers une certaine direction de l'espace nonobstant la rotation et le mouvement de la Terre. L'axe du gyroscope ne participerait pas alors au mouvement de la Terre et indiquerait toujours une direction invariable, celle de l'étoile Polaire par exemple. Mais on ne peut réduire tout à fait le frottement, et la présence des moments de forces de frottement, même infimes, se

traduira au bout d'un certain temps, par un changement de la direction du moment cinétique et de la direction de l'axe du gyroscope par rapport à leur position initiale. Aussi le gyroscope libre ne peut-il servir de boussole et indiquer la direction qu'un temps très restreint. Et ce sont les gyroscopes d'un genre différent qui servent de boussole.

§ 67. MOUVEMENT DE L'AXE DU GYROSCOPE

On étudiera ici le mouvement de l'axe d'un gyroscope tournant. Le volant du gyroscope peut effectuer plusieurs mouvements, l'un autour de son axe, quant aux autres ils dépendent du mouvement de cet axe. Le moment cinétique ne coïncidera plus dans ce cas avec l'axe de rotation du gyroscope. Mais si le gyroscope tourne très vite autour de l'axe du volant tout en effectuant des mouvements relativement lents avec l'axe du volant, on peut admettre que la direction du moment cinétique coïncide toujours approximativement avec l'axe de rotation du volant.

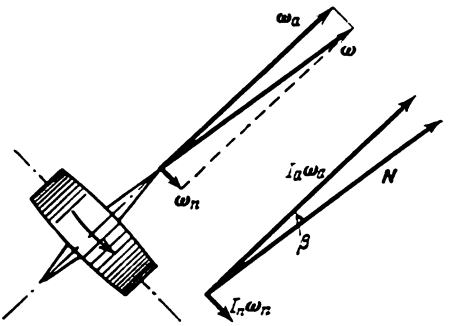


Fig. 185

Par exemple, dans des expériences habituelles avec les gyroscopes la vitesse angulaire de rotation du volant est d'environ de quelques dizaines (et même plus) de tours par seconde, quant à la rotation de l'axe lui-même elle s'effectue plus lentement, à moins d'un tour par 10 secondes. Dans de tels mouvements la direction du vecteur moment cinétique différera de la direction de l'axe de moins de 1/100 de l'unité d'angle ou de moins de 1°.

En effet, comme il a été indiqué au § 64, le moment cinétique peut toujours être décomposé suivant les directions des axes principaux du corps et dans ce cas comme il y a été montré, il est facile de calculer ses composantes sous forme de produits des moments d'inertie correspondants du corps par les composantes de la vitesse angulaire. L'axe de rotation du volant et les axes perpendiculaires à ce dernier sont des axes principaux.

Décomposons la vitesse instantanée de rotation ω en les composantes ω_a et ω_n (fig. 185). Alors, connaissant les moments d'inertie du volant par rapport à l'axe du volant (I_a) et à l'axe qui lui est perpendiculaire (I_n), on peut déterminer la direction de N et l'angle β entre N et l'axe de rotation, ou ω_a. Il apparaît évident que $I_a > I_n$ et, par suite, $\beta < \operatorname{arctg} \frac{\omega_n}{\omega_a}$. Donc, pratiquement la différence entre

les directions du vecteur moment cinétique N et de l'axe ω_a est très petite et si on la néglige cela n'influe pas sur les principales déductions. On considérera donc toujours dans la suite que N coïncide pratiquement avec ω_a.

Disposons l'axe du volant horizontalement et obligeons-le à tourner rapidement, suspendons au cercle intérieur, près de l'axe du volant, une petite masse (fig. 186, *a*). Sous l'action de la pesanteur de la masse P le cercle ne s'abaissera pas, mais effectuera une lente rotation avec l'axe du volant et le cercle extérieur autour de l'axe vertical dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Si l'on enlève la masse, la rotation cesse aussitôt. Si l'on augmente

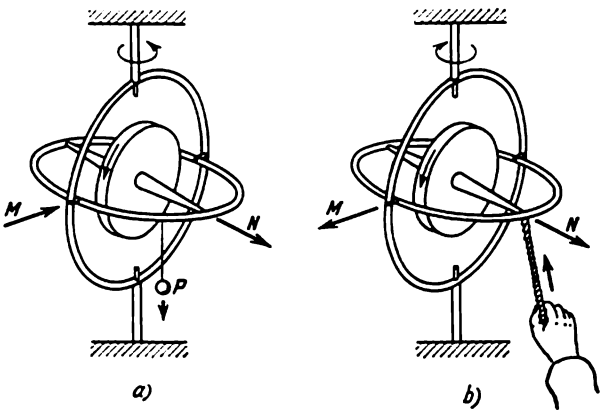


Fig. 186

la masse, la vitesse de rotation du cercle autour de l'axe vertical grandira. Enlevons la masse et appuyons légèrement avec une baguette sur le cercle intérieur vers le bas en l'endroit où était suspendue la masse, le cercle fuira de côté comme sous l'action de la masse. Appuyons maintenant avec la baguette vers le haut (fig. 186, *b*) le cercle fuira également de côté, mais de côté opposé de celui de sa fuite quand on appuyait avec la baguette vers le bas.

A prime abord cette conduite du gyroscope paraît étrange. En effet, on appuie sur le corps vers le haut et il prend une direction horizontale, la direction perpendiculaire à la ligne d'action de la force ! L'absence d'« inertie » est aussi étonnante : on poussait avec la baguette, et un mouvement se déclenchait, on écartait la baguette et le mouvement disparaissait aussitôt.

La rotation de l'axe du gyroscope sous l'action d'une force, de la force de pesanteur de la masse, par exemple, est appelée *précession* et peut facilement s'expliquer sur la base de la loi du mouvement du corps solide, formulée précédemment (voir formule (65.6)). Sur

le volant tournant, dont l'axe est horizontal agit le moment de la pesanteur de la masse; le moment cinétique du volant, doit donc se modifier. D'après la loi (65.6) l'accroissement dN du moment cinétique durant le temps dt sera $M\,dt$. Le moment de la force de pesanteur par rapport au point fixe du volant (point d'intersection de trois axes) est représenté par le vecteur M situé dans le plan horizontal. Le moment cinétique est également un vecteur coïncidant avec la direction de l'axe du volant et situé dans le plan horizontal. L'accroissement $dN = M\,dt$ est dirigé perpendiculairement au moment cinétique N (fig. 187). Par conséquent, durant le temps dt le vecteur moment cinétique tournera de l'angle

$$d\alpha = \frac{M\,dt}{N}, \tag{67.1}$$

et avec lui tournera du même angle $d\alpha$ l'axe du volant du gyroscope. La formule (67.1) fournit la valeur exacte de l'angle de rotation

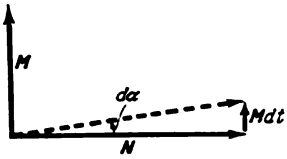


Fig. 187

de la direction de N et la valeur approchée de l'angle de rotation de l'axe du gyroscope. Comme le moment de la force agit constamment et est tout le temps dirigé perpendiculairement au moment cinétique, l'axe du volant accomplira un mouvement de rotation autour de l'axe vertical avec une vitesse angulaire

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{M}{N}. \tag{67.2}$$

Le moment de la force détermine dans ce cas la *vitesse* de rotation de l'axe du volant du gyroscope et non pas l'accélération comme de coutume et c'est pourquoi la suppression de l'action de la force conduit à la cessation du mouvement de l'axe. La vitesse angulaire de rotation de l'axe Ω porte le nom de *vitesse angulaire de précession* qui est égale au rapport du moment des forces au moment cinétique du gyroscope.

Si la force est appliquée de la sorte que son moment n'est pas perpendiculaire au moment cinétique, par exemple, si la masse est suspendue au cercle de côté, il faut pour déterminer la vitesse de précession ne prendre que la composante normale au moment cinétique du vecteur moment de la force extérieure P, c'est-à-dire $dN = M_n\,dt$. La composante du moment M_a dirigée suivant l'axe du volant sera équilibrée par l'action du support du cercle extérieur.

Le mouvement de la pointe de l'axe du gyroscope s'effectue dans la direction du moment des forces et non pas dans la direction des forces, ce qui explique le comportement « étrange » du gyroscope.

Les mêmes phénomènes s'observent également dans une suspension du gyroscope à la Cardan qui est quelque peu différente et qu'on a montré à la figure 188. Le cercle dans lequel est maintenu l'axe de rotation du volant du gyroscope est fixé sur la tige AB constituant le prolongement de l'axe de rotation. La tige est fixée sur l'axe horizontal au point O s'appuyant sur une demi-bague qui peut tourner sur l'axe vertical dans le support. Les trois axes de rotation se coupent au point O, le volant du gyroscope pouvant occuper une position quelconque dans l'espace si l'on considère que le point O, se trouvant sur son axe, est assujetti à rester immobile. Le moment de la pesanteur tendant à faire tourner le cercle avec le volant autour de l'axe horizontal est équilibré par le moment de la force P du contrepoids coulissant sur le prolongement de la tige AB.

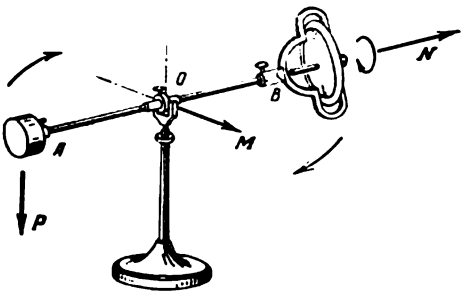


Fig. 188

Le déséquilibre du contrepoids engendre un moment faisant tourner l'axe du volant autour de l'axe horizontal et se traduisant par la précession du gyroscope. Si c'est le côté du levier où se trouve le gyroscope qui l'emporte, la rotation s'effectue dans un sens; si c'est le contrepoids qui l'emporte, le sens de la rotation change.

La précession peut être également montrée de la façon suivante. Suspendons par un fil le cercle avec le gyroscope en rotation (fig. 189) ou une tige sur laquelle est monté le cercle avec le gyroscope, l'axe du volant tournant étant dirigé sous un angle par rapport à la verticale. Le gyroscope effectuera un mouvement de précession sans tendance à « tomber » vers le bas, comme cela se produirait avec un volant immobile.

La précession s'observe également avec une toupie. Rigoureusement parlant, la précession est toujours propre à la toupie, mais au début, quand la vitesse de rotation est grande, la vitesse de précession est très faible. En effet, la toupie s'appuie sur la pointe A (fig. 190) située au-dessous de son centre des masses et, par suite, avec l'inclinaison un moment du couple de force est engendré : la force de réaction du support Q et la force de pesanteur P, autrement dit, le moment engendrant la précession.

L'axe de la toupie effectue un mouvement de précession en restant sur la surface d'un cône de sommet A et avec cet axe est

entraîné dans le mouvement le vecteur moment cinétique [1]. Si h est la distance de la pointe jusqu'au centre des masses de la toupie, I le moment d'inertie de la toupie par rapport à l'axe et ω la vitesse angulaire de rotation, le moment du couple $M = Qh \sin \alpha =$

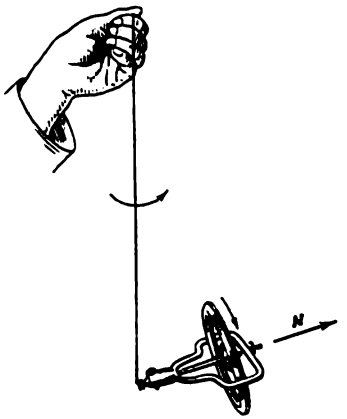


Fig. 189

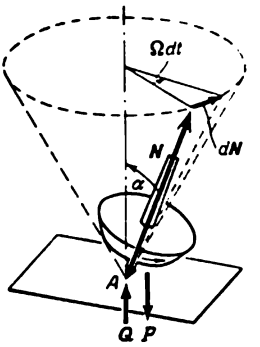


Fig. 190

$= Ph \sin \alpha$, l'accroissement du moment cinétique étant $dN = M\,dt = \Omega\,dtN \sin \alpha$, où Ω est la vitesse de précession (voir fig. 190). Substituant $I\omega$ à N, on obtient la vitesse de précession

$$\Omega = \frac{Ph \sin \alpha}{I\omega \sin \alpha} = \frac{Ph}{I\omega}. \qquad (67.3)$$

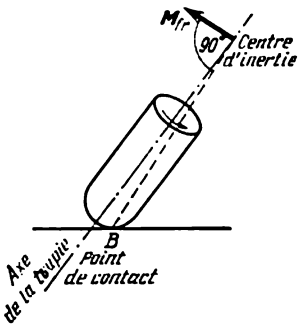


Fig. 191

Pour une grande vitesse ω de rotation de la toupie, la vitesse de précession est très petite. Quand la rotation de la toupie s'affaiblit, on observe toujours une précession.

Mais outre le moment du couple de forces mentionné plus haut, la toupie est encore soumise au moment de la force de frottement dont l'action tend à faire prendre à la toupie la position verticale. En effet, après avoir lancé la toupie sous un angle par rapport à l'horizon, on voit, qu'après un certain temps, son axe devient vertical. L'effet de redressement est particulièrement sensible quand la pointe de l'axe de la toupie est émoussée.

[1] On a représenté en pointillé sur la figure 190 ce cône virtuel qu'aurait décrit le vecteur N dont l'origine est en A.

Examinons la pointe de la toupie, dont N est dirigé vers le haut suivant l'axe, dans un grossissement (fig. 191). Le point de contact B de la pointe avec la surface ne se trouve pas sur l'axe de la toupie, et par suite la force de frottement, appliquée à la pointe, dirigée vers l'observateur regardant le dessin engendre le moment $\boldsymbol{M}_{fr}$ par rapport au centre des masses de la toupie. Le moment $\boldsymbol{M}_{fr}$ situé dans le plan du dessin est dirigé vers la verticale et, par suite, l'accroissement du moment cinétique de la toupie $d\boldsymbol{N} = \boldsymbol{M}_{fr}\, dt$ est également dirigé vers la verticale, l'axe de la toupie tendant à prendre une position perpendiculaire au plan.

Deux moments agissent sur la toupie inclinée: le moment du couple de forces (réaction de support et pesanteur) et le moment de frottement; le mouvement est toujours la conséquence de ces deux moments si l'on néglige la résistance de l'air.

§ 68. FORCES GYROSCOPIQUES

Les expériences sur la précession du gyroscope permettent de tirer également la conclusion suivante: si l'on observe que l'axe du gyroscope tourne dans une certaine direction, on en conclut que

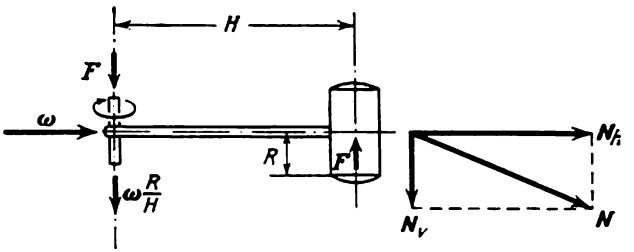


Fig. 192

le gyroscope est soumis à des forces dont le moment coïncide avec la direction du mouvement du bout positif [1] de l'axe du gyroscope.

Ainsi, par exemple, dans la rotation de la meule tournante montrée à la figure 170, *b* du côté de la surface sur laquelle roule la meule cylindrique émane une force dirigée vers le haut et dont le moment déclenche la rotation de l'axe de la meule dans le plan horizontal; sur la surface par contre agit, de la part de la meule, une force égale et opposée. La grandeur de cette force gyroscopique peut être déterminée d'après la loi de précession (67.2). Si la vitesse angulaire de rotation de la meule autour de son axe est ω, la vitesse de rotation de l'axe de la meule sera $\omega \frac{R}{H}$ (fig. 192) (on admet que

[1] On appelle bout positif du gyroscope celui d'où sort la flèche du moment cinétique. Le sens positif de la direction du moment cinétique et de la vitesse angulaire de rotation se détermine toujours de la *même façon*, suivant la règle de la vis à filet droit.

le roulement s'effectue sans glissement). Le rouleau peut être assimilé à un cylindre homogène de rayon R se trouvant à la distance H de l'axe vertical. Comme il découlera des calculs qui suivront la force de pression de la meule sur la surface peut être de plusieurs fois supérieure à son poids en l'absence de rotation; c'est la raison de l'utilisation de cette construction.

Le moment cinétique de la meule se situe toujours dans le plan passant par les axes de rotation et est dirigé sous un certain angle par rapport à la verticale (voir fig. 192). Il ne nous faut connaître que la composante horizontale du moment cinétique

$$N_h = I\omega = \frac{1}{2} mR^2\omega, \qquad (68.1)$$

où m est la masse du rouleau. Il est évident que seule la composante horizontale du moment cinétique modifiera sa direction; la composante verticale N_v ne variera pas en grandeur et en direction. Par conséquent, dN est égal à l'accroissement de la composante horizontale, qui est la variation de la direction de l'axe de rotation de la meule. Donc

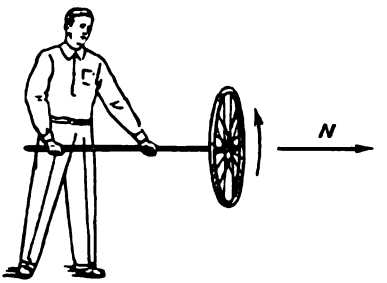


Fig. 193

$$dN = N_h\omega \frac{R}{H} dt = FH\, dt. \qquad (68.2)$$

En y portant la valeur de N_h tirée de (68.1), il vient

$$\frac{1}{2} mR^2\omega^2 \frac{R}{H} = FH; \qquad (68.3)$$

d'où la force F est:

$$F = \frac{1}{2} m \frac{R^3}{H^2} \omega^2. \qquad (68.4)$$

Par conséquent, la force de pression du rouleau sur la surface (force de mouture) sera plus grande que son poids en l'absence de rotation de la grandeur de la force F.

Le moment des forces qu'il faut appliquer à la rotation de l'axe du gyroscope ou d'un corps tournant rapidement peut être facilement ressenti en maintenant avec les mains l'axe d'un corps qui tourne, par exemple, l'axe de la roue d'une bicyclette (fig. 193), et en essayant de lui faire prendre une direction donnée. On sent aussitôt que la roue tend à « échapper » des mains dans la direction perpendiculaire; pour retenir l'axe, il faut produire un effort important qui sera d'autant plus grand que le virage est plus rapide.

Un effort gyroscopique identique ressentiront les paliers des axes des parties du véhicule, tournant rapidement, dans le virage

du véhicule lui-même. Par exemple, les paliers de l'arbre de la turbine d'un bateau, les paliers de l'arbre de la turbine ou de l'hélice d'un avion seront soumis à des grands efforts au cours des manœuvres du bateau ou de l'avion, et ces efforts seront d'autant plus grands que la vitesse angulaire du virage est grande au cours de la manœuvre.

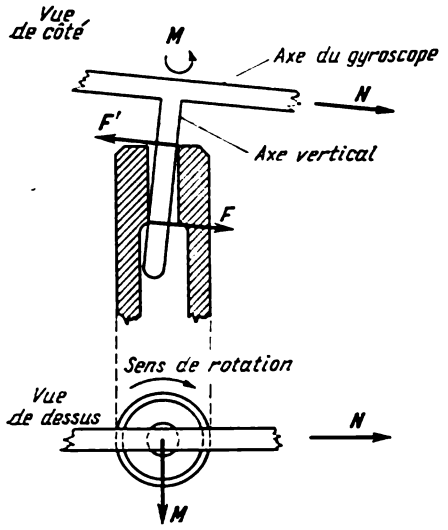


Fig. 194

§ 69. ROTATION DE L'AXE D'UN GYROSCOPE GÊNÉ

Si on enlève au gyroscope un degré de liberté, ou si on le fixe de manière qu'il ne puisse tourner autour de l'un des axes, alors, dans la rotation autour de l'autre axe, le gyroscope n'offrira pas de « résistance » et se comportera comme un corps ordinaire, c'est-à-dire pivotera sous l'action d'une force dans le sens de l'action de celle-ci.

Fixons l'axe horizontal du gyroscope montré sur la figure 188. Une petite secousse fera tourner ce gyroscope autour de l'axe vertical. De même, si l'on fixe l'axe vertical, le gyroscope, après une secousse, se mettra à tourner autour de l'axe horizontal. La raison de ce comportement est la conséquence du fait que le moment des forces capables de faire pivoter le moment cinétique (ou l'axe du gyroscope) est créé par la pression du palier de l'axe autour duquel peut tourner la tige avec le gyroscope et non pas par les forces appliquées de l'extérieur.

Supposons qu'on appuie avec une baguette sur la tige avec le gyroscope dans la direction horizontale. S'il était libre il se mettrait alors à tourner autour de l'axe horizontal de la sorte que le cercle avec le gyroscope s'abaisserait, car le moment de la force exercée par la baguette M_b est dirigé vers le bas. Or si l'axe horizontal est fixe, à ce mouvement s'oppose le palier de l'axe vertical, comme c'est montré schématiquement sur la figure 194; le palier sur l'axe vertical avec les forces F et F' dont le moment M est normal à l'axe horizontal, son action provoquant le déplacement de l'axe du gyroscope justement dans la direction de l'action de la baguette.

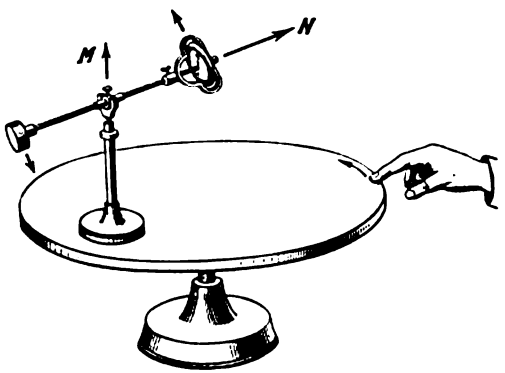


Fig. 195

Fixons l'axe vertical du gyroscope et posons-le sur un disque qui tourne (fig. 195) en fixant solidement le support du gyroscope au disque. En observant

la rotation du disque avec le gyroscope, on constate que l'axe du gyroscope tend à tourner de façon que les directions de la rotation du disque et du gyroscope coïncident. L'explication en est simple: en tournant, le disque transmet au gyroscope par le support et par l'axe vertical le moment des forces M dont la direction est parallèle à l'axe de rotation du disque. Ce moment ne peut engendrer que la rotation autour de l'axe horizontal jusqu'à ce que l'axe de rotation

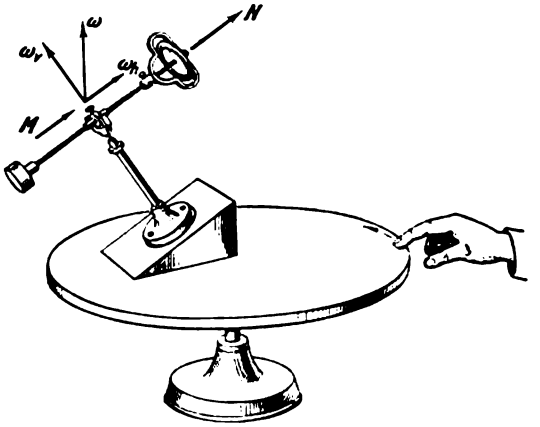


Fig. 196

du disque coïncide en direction avec le moment M qui est la direction de l'axe de rotation, ou que la tige du gyroscope atteigne la butée.

Fixons maintenant le support du gyroscope sur le disque en l'inclinant, comme c'est montré sur la figure 196 et en maintenant l'axe « horizontal » de manière que le gyroscope ne puisse tourner qu'autour de son axe et l'axe « vertical ». Dans ce montage le gyroscope sera soumis au moment des forces toujours situé dans le plan vertical passant par l'axe de rotation du disque. En effet, décomposons la vitesse angulaire ω du support en deux vitesses: ω_v et ω_h; la rotation avec la vitesse ω_v n'aura pas d'effet, car l'axe « vertical » est libre, tandis que la rotation avec la vitesse ω_h engendrera par contre le moment M coïncidant en direction avec ω_h, ω_h étant obligatoirement située dans le plan mentionné plus haut.

Ces expériences sont très parlantes, car en changeant le sens de rotation du disque on voit aussitôt le gyroscope faire demi-tour. Elles fournissent des indications sur le mode de construction d'un compas gyroscopique.

§ 70. MOUVEMENT D'UN GYROSCOPE LIBRE (À TROIS DEGRÉS DE LIBERTÉ)

Donnons un exemple de solution précise du problème du mouvement d'un gyroscope « libre », c'est-à-dire d'un gyroscope maintenu au centre des masses avec la condition que le moment des forces extérieures $M = 0$. Le moment cinétique dans ce cas est

$$N = \text{const}, \frac{dN}{dt} = 0. \tag{70.1}$$

Avant d'écrire cette condition, rappelons la règle des dérivées du vecteur dans un système des coordonnées en rotation (§ 48). La dérivée du vecteur N est prise dans (70.1) par rapport à un référentiel absolu (immobile). Quant à la dérivée dans le référentiel lié au corps du gyroscope en rotation à la vitesse angulaire ω, elle est, en général, d'après (48.10)

$$\frac{(dN)_0}{dt} = \frac{dN}{dt} + [N\omega]$$

ou dans le cas considéré

$$\frac{(dN)_0}{dt} + [\omega N] = 0. \tag{70.2}$$

Cette équation définit complètement le mouvement d'un corps solide tournant librement et maintenu au centre des masses. Le vecteur N est constant et immobile dans l'espace, mais varie sa direction par rapport au corps tournant, d'où la possibilité de déterminer le mouvement du corps. Il en est évidemment ainsi sauf au cas où ω et N coïncident, alors $\frac{(dN)_0}{dt} = 0$ et le corps, tout en tournant, conserve invariable son axe de rotation ω dans l'espace et dans le corps.

Prenons les axes d'inertie principaux du corps comme axes des coordonnées et écrivons l'équation (70.2) en projections sur ces axes. Rappelons que les projections sont:

$$N_1 = \lambda_1\omega_1, \quad N_2 = \lambda_2\omega_2, \quad N_3 = \lambda_3\omega_3,$$

où λ_1, λ_2, λ_3 sont les moments d'inertie principaux du corps et N_1, ω_1, les projections sur le premier axe principal de moment λ_1, etc. Les grandeurs λ_1, λ_2, λ_3 sont dans ce référentiel constantes. Donc

$$\frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 \frac{d\omega_1}{dt}, \quad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_2 \frac{d\omega_2}{dt},$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_3 \frac{d\omega_3}{dt}, \tag{70.3}$$

car

$$\frac{(d\omega_0)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \text{ et } (dN)_0 = dN_1 n_1 + dN_2 n_2 + dN_3 n_3,$$

où n_1, n_2, n_3 sont des vecteurs unitaires des directions des axes principaux.

Considérant (70.3), on peut écrire l'équation (70.2) en projections sur les axes principaux:

$$\lambda_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 N_3 - \omega_3 N_2 = 0,$$

$$\lambda_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3 N_1 - \omega_1 N_3 = 0,$$

$$\lambda_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1 N_2 - \omega_2 N_1 = 0,$$

ou

$$\lambda_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3 (\lambda_3 - \lambda_2) = 0,$$

$$\lambda_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3\omega_1 (\lambda_1 - \lambda_3) = 0, \qquad (70.4)$$

$$\lambda_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1\omega_2 (\lambda_2 - \lambda_1) = 0.$$

Ces équations sont appelées *équations d'Euler* pour $\boldsymbol{M} = 0$.

Dans le cas général l'analyse de ces équations est assez compliquée. On n'étudiera que le cas d'un gyroscope libre qui est un corps de révolution. Dans un tel gyroscope deux moments d'inertie principaux sont identiques, soit $\lambda_2 = \lambda_3$. L'équation (70.4) prend alors la forme

$$\frac{d\omega_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3\omega_0 = 0, \quad \frac{d\omega_3}{dt} - \omega_2\omega_0 = 0, \qquad (70.5)$$

où $\omega_0 = \omega_1 \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2}$.

La première équation donne $\omega_1 = \text{const}$, la projection de $\boldsymbol{\omega}$ sur le premier axe principal (axe de symétrie, axe de la figure) reste

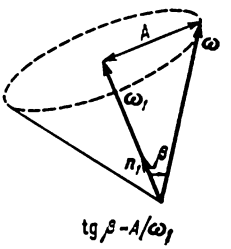


Fig. 197

constante dans le temps. Par conséquent, ω_0 est également une grandeur constante, quant aux deux équations restantes leur solution ne présente pas de difficultés. On peut s'assurer facilement au moyen d'une substitution que la solution sera

$$\omega_2 = A \cos (\omega_0 t + \varphi), \quad \omega_3 = A \sin (\omega_0 t + \varphi), \qquad (70.6)$$

où A et φ sont des constantes dépendant des conditions initiales.

En analysant cette solution, on voit que le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ reste constant en grandeur par rapport au corps et engendre un cône autour de l'axe de la figure (fig. 197) à la vitesse angulaire ω_0. La grandeur $A = \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}$ dépend des conditions initiales et l'angle d'ouverture du cône β se définit par le rapport A/ω_1. La grandeur ω_0/ω_1 ne dépend que du rapport des moments d'inertie principaux, c'est-à-dire de la répartition des masses du gyroscope.

Pour se représenter le mouvement de l'axe du gyroscope dans ce cas, il faut passer du référentiel mobile au référentiel fixe. Cela se fait plus simplement de la manière suivante.

Revenons à la formule (64.14). Dans tous les cas

$$N = \lambda_1\omega_1 n_1 + \lambda_2\omega_2 n_2 + \lambda_3\omega_3 n_3.$$

et pour le gyroscope $\lambda_3 = \lambda_2$; alors

$$N = \lambda_1\omega_1 n_1 + \lambda_2(\omega_2 n_2 + \omega_3 n_3) + \lambda_2\omega_1 n_1 - \lambda_2\omega_1 n_1 = \\ = (\lambda_1 - \lambda_2)\,\omega_1 n_1 + \lambda_2\omega. \qquad (70.7)$$

D'où on voit que n_1 (axe de la figure), N et ω sont situés dans un même plan. Tenant compte de cette circonstance et de l'égalité

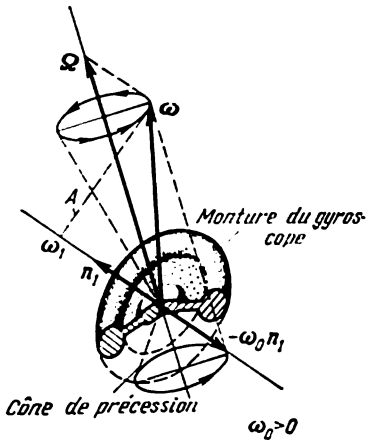


Fig. 198

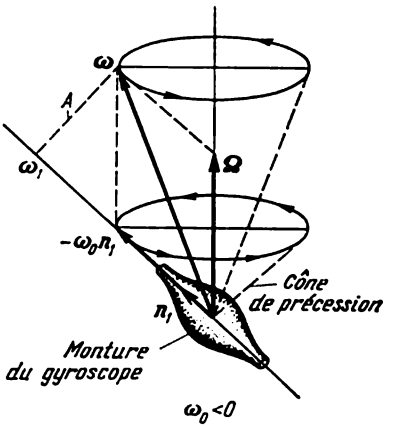


Fig. 199

(70.7), on peut définir le mouvement de l'axe du gyroscope. Pour cela récrivons (70.7) ainsi:

$$\omega = \frac{N}{\lambda_2} - \omega_0 n_1, \qquad (70.8)$$

où $\frac{N}{\lambda_2} = \Omega$ est la composante de la vitesse angulaire suivant la direction de N. Le vecteur Ω reste constant en grandeur et en direction. Comme ω et $-\omega_0 n_1$ sont constants en module et sont situés dans le plan passant par Ω, ils tournent avec la vitesse angulaire Ω, les angles entre les vecteurs restant invariables. Par conséquent, Ω est la *vitesse de précession* du gyroscope. On a représenté sur les figures 198 et 199 les images de la précession.

Supposons connu l'angle β entre ω et n_1 (axe du gyroscope), cherchons alors $\omega_0 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2}\,\omega_1$. Notons qu'au cas où $\lambda_1 > \lambda_2$

(fig. 198) la grandeur $\omega_0 > 0$ et, par suite, la vitesse angulaire de rotation du gyroscope autour de son axe $-\omega_0 \boldsymbol{n}_1$ est opposée à la vitesse de précession Ω. L'axe du gyroscope est animé d'un mouvement de précession dans le sens opposé à sa rotation. La condition $\lambda_1 > \lambda_2$ traduit le fait que le corps du gyroscope est « aplati » par rapport à l'axe de symétrie, ce qui se voit sur la figure.

L'image de la précession de la figure 199 est de nature différente quand le corps est « étiré » suivant l'axe, $\lambda_1 < \lambda_2$. Le mouvement de précession s'effectue ici dans le sens de la rotation autour de l'axe de la figure, puisque $\omega_0 < 0$. L'angle β (ou la grandeur A) est fonction des conditions initiales.

Cette rotation de l'axe du gyroscope suivant le cône formé autour de la direction du moment d'impulsion $\boldsymbol{N}$ est dite *précession régulière*, par opposition à la *précession pseudo-régulière* engendrée sous l'action du moment constant de la force de pesanteur. Dans ce cas, pour une vitesse de rotation relativement grande autour de l'axe du gyroscope, comme il avait été sous-entendu au paragraphe précédent, la nature de la précession pseudo-régulière ne diffère pas habituellement de celle de la précession régulière. Dans la précession pseudo-régulière il y a, en général, des petites oscillations de l'axe du gyroscope (*nutations*) autour de la surface du cône circulaire de précession. Mais elles sont insensibles à l'œil à des grandes vitesses de rotation.

Rappelons qu'il peut y avoir des mouvements sans précession, quand $A=0$ et $\boldsymbol{N}$ coïncide avec la direction de $\boldsymbol{\omega}$. Pour un gyroscope sphérique il n'y a pas de précession, car on a toujours $\boldsymbol{N} = \lambda\boldsymbol{\omega}$.

§ 71. INTERPRÉTATION DES « EFFETS GYROSCOPIQUES »

L'analyse des phénomènes gyroscopiques faite antérieurement était basée sur la loi du mouvement du corps solide dégagée au § 65 et exprimée par la formule sommaire $\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{N}}{dt}$; en s'appuyant sur cette loi, on a expliqué toutes les singularités de la conduite du gyroscope. Or, en observant l'accélération des points séparés du volant, on peut se représenter directement les forces qui doivent agir sur lui dans ce mouvement; ces forces sont habituellement appelées « gyroscopiques ».

Soit $d\alpha$ l'angle dont pivote l'axe du volant tournant durant le temps dt. Quelles sont les accélérations des différents points du volant dans ce mouvement? Prenons sur le volant quatre points A, B, C et D se disposant symétriquement à l'instant t par rapport à l'axe OO' autour duquel tourne l'axe du volant (fig. 200). Décomposons les vitesses des quatre points choisis en deux composantes: les unes parallèles à l'axe OO' ($v_{\parallel}$, $v'_{\parallel}$) et les autres perpendiculaires à lui ($v_{\perp}$, $v'_{\perp}$). Chacune des composantes parallèles des vitesses des points A et B est $v_{\parallel}$ et des points C et D, $v'_{\parallel}$; chacune des composantes perpendiculaires des vitesses des points A et D est $v_{\perp}$ et des points C et B, $v'_{\perp}$. Outre ces deux composantes de la vitesse de chaque point (composantes situées dans le plan du volant), il existe encore des composantes perpendiculaires au plan du volant engendré par le mouvement autour de l'axe OO'. Toutefois, en admettant que la rotation autour

de l'axe OO' est de beaucoup plus lente que la rotation du volant autour de son axe, on peut, pour simplifier les raisonnements, négliger les composantes des vitesses des points perpendiculaires au volant.

Examinons maintenant les accroissements des vitesses des points durant le temps dt. Durant le temps dt, tous les points se déplaceront dans le sens de la rotation du volant d'une certaine portion de l'arc et, vu la rotation autour de l'axe OO', les points A et B sortiront du plan du dessin, tandis que les points C et D passeront derrière le dessin (voir fig. 200).

Fixons notre attention sur l'accroissement des différentes composantes de la vitesse de chaque point. Les composantes $v_{\parallel}$ des points A et B acquerront les

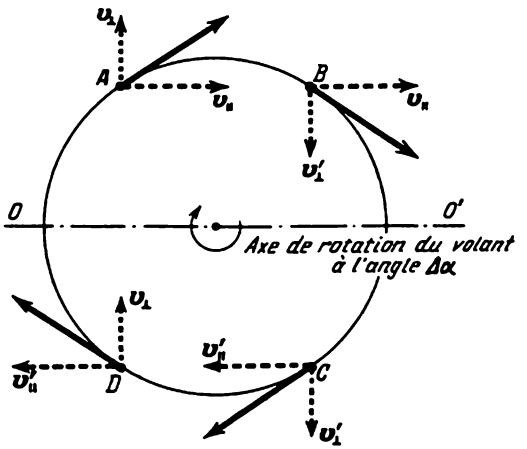


Fig. 200

accroissements $\Delta v_{\parallel A}$ et $\Delta v_{\parallel B}$, situés dans le plan du volant, égaux en grandeur et de direction opposée (fig. 201, *a*) comme on peut en conclure de par la symétrie; il en sera de même pour les points C et D. Les accroissements des composantes $v_\perp$ et $v'_\perp$ ne se trouvent pas dans le plan du volant et ont des composantes perpendiculaires au volant qu'on désignera par $\Delta v_\perp$ et $\Delta v'_\perp$ (fig. 201, *b*), tandis que les composantes parallèles au volant seront notées par Δv_A, Δv_B, Δv_C, Δv_D (voir fig. 201, *a*). Toutes les composantes des accroissements seront égales deux à deux, ce qui découle également de la disposition symétrique des points A, B, C et D. Donc toutes les composantes des accroissements de la vitesse, situées dans le plan du volant, auront une somme nulle.

Il est facile de se représenter le mode de détermination de la grandeur des accroissements: les accroissements de la vitesse situés dans le plan du volant (voir fig. 201) correspondent aux accroissements des points accomplissant un mouvement uniforme le long du cercle, la somme de ces accroissements de la vitesse sera donc déterminée par l'accélération centripète du point considéré. Par suite de la rotation du volant autour de l'axe OO' seules les composantes perpendiculaires à l'axe OO' $v_\perp$ et $v'_\perp$ modifient leur direction, et de ce fait les grandeurs de l'accroissement des vitesses des points A, B, C et D dans la direction de la perpendiculaire au volant seront égales à $\Delta v_\perp = \Delta\alpha v_\perp$.

Les composantes des accroissements de la vitesse perpendiculaires au volant (voir fig. 201, *b*) ont même grandeur, mais sont dirigées dans des sens opposés. On aboutira au même résultat en considérant tous les autres points pris par quatre.

Donc, tous les points du volant ont des accélérations coïncidant en direction avec les accroissements de la vitesse, montrés à la figure 201, *b*, et par conséquent le volant est soumis à un couple de forces dont le moment est dirigé per-

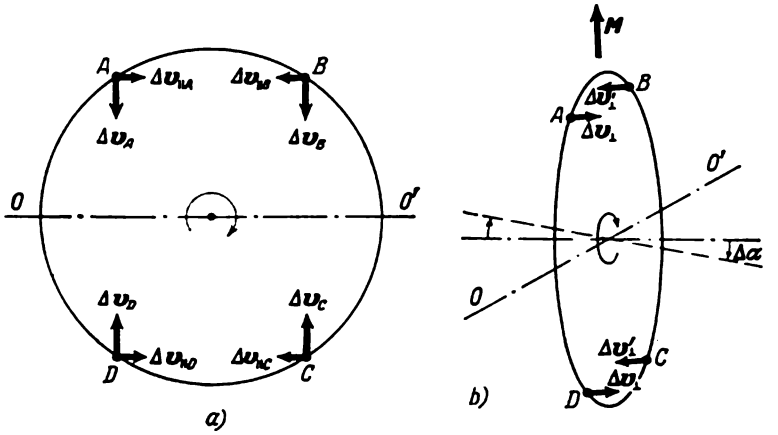


Fig. 201

pendiculairement à l'axe du volant et à l'axe de rotation OO'. D'où une conclusion réciproque qui se dégage facilement: si sur un volant mis en rotation agit un couple de forces, son axe pivotera en conformité avec la relation générale

$$M = \frac{dN}{dt},$$

dans laquelle il est admis que l'axe du volant et N coïncident en direction.

Au § 61 et sur la figure 160 on a donné une notion qualitative des axes libres du solide. Le contenu des §§ 64, 65 et 70 permet de déduire les conditions quantitatives définissant la position des axes libres pour tout corps solide et d'en tirer une conclusion sur la stabilité de rotation sur ces axes.

Soit un solide de forme quelconque tournant à la vitesse angulaire ω sur un axe rigide AB, dont la position dans l'espace est fixée par deux paliers A et B (voir fig. 202, *a*).

Chaque particule du corps se meut sur un cercle avec une accélération $\frac{dv_i}{dt} = [\omega\,[\omega R_i]] = -\omega\rho^2{}_i$.

Après avoir choisi le point A comme pôle et origine des axes des coordonnées x, y, z, écrivons pour ce cas les lois fondamentales de la dynamique (65.9):

$$\sum_i \Delta m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_i \Delta m_i\,(-\omega^2\rho_i) = F_A + F_B,$$

$$\sum_i \Delta m_i \left[R_i \frac{dv_i}{dt}\right] = \sum_i \Delta m_i\,[R_i\,(-\omega^2\rho_i)] = [R_B F_B],$$

où F_A et F_B sont les forces extérieures qui émanent des paliers et agissent par l'intermédiaire des axes rigides sur le solide. (On admet que la force de pesanteur n'agit pas sur le solide.) En projetant les équations vectorielles de la dynamique sur les axes des coordonnées x, y, z, il vient

$$\omega^2 \sum_i \Delta m_i x_i + F_{Ax} + F_{Bx} = 0,$$

$$\omega^2 \sum_i m_i y_i + F_{Ay} + F_{By} = 0,$$

$$\omega^2 \sum_i \Delta m_i y_i z_i + l F_{By} = 0,$$

$$\omega^2 \sum_i \Delta m_i x_i z_i + l F_{Bx} = 0,$$

où $l = AB = [R_B]$.

Dans la rotation sur l'axe libre, le solide ne doit exercer aucune action sur les paliers. Aussi, en posant dans les dernières équations

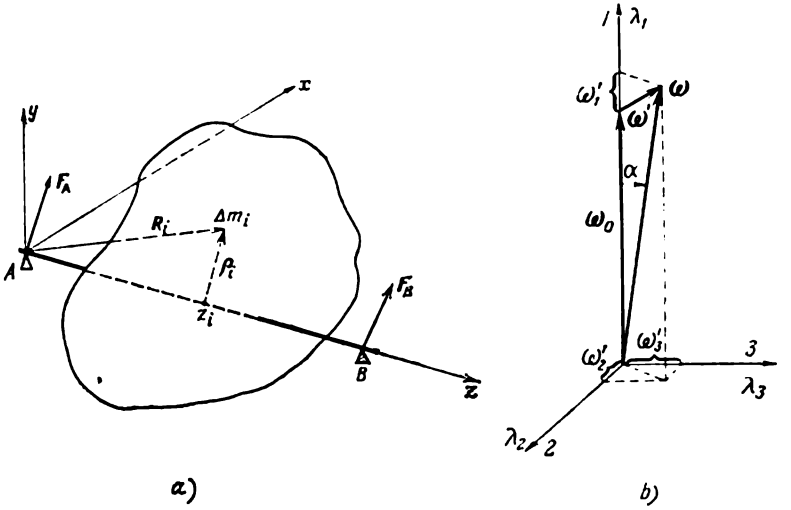


Fig. 202

$F_{Ax} = F_{Ay} = F_{Bx} = F_{By} = 0$, aboutit-on aux conclusions que doivent satisfaire les axes de rotation libre

$$1.\ \sum_i \Delta m_i x_i = m x_0 = 0, \quad 2,\ \sum_i \Delta m_i y_i z_i = -I_{yz} = 0,$$

$$\sum_i \Delta m_i y_i = m y_0 = 0. \qquad \sum_i \Delta m_i x_i z_i = -I_{xz} = 0.$$

Il s'ensuit que l'axe libre doit passer par le centre des masses du corps (1) et les produits d'inertie (moments centrifuges) par rapport à l'axe libre doivent être nuls (2).

Un solide à distribution arbitraire des masses possède trois axes semblables. Ce sont les axes principaux du tenseur d'inertie par rapport au centre des masses du solide (§ 64).

En technique, l'observation des premières conditions est dénommée équilibrage statique et des secondes, équilibrage dynamique de la construction tournante.

La rotation du solide sur un axe libre en l'absence de moments extérieurs doit durer théoriquement aussi longtemps qu'il le faut. Toutefois, dans les conditions d'une expérience concrète, sous l'action de circonstances aléatoires, l'axe de rotation du solide ne conservera pas avec rigueur la direction de l'axe libre. La vitesse angulaire ω_0, dirigée au début le long de l'axe libre *1* (voir fig. 202, *b*), acquerra par la suite un faible accroissement ω' et déviera de la position initiale d'un petit angle α. Si ces déviations ont la tendance de s'accroître, l'axe de rotation du solide s'écartera alors de la direction initiale et la rotation sur l'axe libre sera instable. Si, par contre, les petites déviations n'augmentent pas dans le temps, la direction de l'axe de rotation s'écartera alors très peu de celle de l'axe libre et, partant, la rotation sera stable.

Pour étudier la stabilité de la rotation du solide sur les axes libres, on utilisera les équations d'Euler (§ 70). En écrivant ces équations, on admettra : d'abord, que les projections de l'accroissement de la vitesse angulaire ω_1', ω_2', ω_3' sur les axes principaux *1*, *2*, *3* sont petites devant ω_0 et que, par suite, on peut négliger les termes avec leurs produits ; ensuite, qu'à l'état initial le solide tourne sur l'axe *1* à la vitesse angulaire ω_0. On obtiendra ainsi un système d'équations pour des petits accroissements de la vitesse angulaire :

$$\lambda_1 \frac{d\omega_1'}{dt} = 0,$$

$$\lambda_2 \frac{d\omega_2'}{dt} + \omega_3'\omega_0 (\lambda_1 - \lambda_3) = 0,$$

$$\lambda_3 \frac{d\omega_3'}{dt} + \omega_2'\omega_0 (\lambda_2 - \lambda_1) = 0.$$

De la première équation il découle que $\omega_1' = \text{const}$ en restant petit. En dérivant la seconde équation par rapport au temps et en y portant $\frac{d\omega_3'}{dt}$ tiré de la troisième, il vient

$$\frac{d^2\omega_2'}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_2\lambda_3} \omega_2' = 0.$$

Si $\Omega^2 = \omega_0^2 \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_2\lambda_3} > 0$, cette équation possédera des solutions harmoniques : $\omega_2'(t) = A \cos(\Omega t - \varphi)$. L'autre composante aura également des solutions harmoniques : $\omega_3'(t) = B \sin(\Omega t - \varphi)$.

De telles variations dans le temps de ω_2' et ω_3' signifient que la rotation est stable, les petits accroissements restant petits.

L'inégalité ($\Omega^2 > 0$) a la signification indiquée dans deux cas:

$$1.\ \lambda_1 > \lambda_2, \quad \lambda_1 > \lambda_3. \qquad 2.\ \lambda_1 < \lambda_2, \quad \lambda_1 < \lambda_3.$$

Par conséquent, la rotation sur les axes libres à valeur maximale et minimale des moments d'inertie doit être stable.

Pour l'axe libre correspondant à la valeur intermédiaire du moment d'inertie: $\lambda_2 > \lambda_1 > \lambda_3$, l'inégalité change de signification ($\Omega^2 < 0$) et la solution du système d'équations conduit aux fonctions hyperboliques.

Dans ce cas les petits accroissements ω_2' et ω_3' augmenteront sans cesse. C'est le signe de l'instabilité de la rotation sur un tel axe libre.

Pour les solides de révolution, seul l'axe matériel de symétrie du solide est stable. Les résultats de l'étude effectuée sont en accord complet avec l'expérience (§ 61).

CHAPITRE VIII

FROTTEMENT DE ROULEMENT

§ 72. FORCES ENGENDRÉES PAR LE ROULEMENT. FROTTEMENT DE GLISSEMENT DANS LE ROULEMENT DU CYLINDRE

Une attention particulière est attachée en physique et en technique aux forces engendrées par le roulement sur le plan d'une roue (d'un cylindre). Ces forces sont, en général, appelées frottements. Mais pour dégager la nature du phénomène il faut distinguer trois genres de forces: les *frottements de roulement* proprement dits, les *frottements de glissement* et les *frottements d'adhésion* (ou *adhérence*). Les frottements de roulement, comme les frottements en mouvement de translation, ont toujours lieu et aboutissent toujours au freinage du mouvement. Les frottements de glissement et l'adhérence peuvent dans le roulement freiner et accélérer le corps roulant, l'adhérence (comme d'ailleurs le frottement statique) ne s'accompagnant pas obligatoirement d'une transformation de l'énergie mécanique en chaleur.

Soit un cylindre homogène roulant sur un plan incliné avec glissement; les trois genres de frottement interviennent alors dans ce cas. S'il n'y a pas de glissement, seuls agissent l'adhérence et le frottement de roulement; dans nombre de cas le frottement de roulement est faible, et il ne reste plus que le frottement dû à l'adhérence, comme on l'a admis au § 58. Quand n'agissent que les frottements d'adhésion, le point de contact du cylindre avec le plan ne se déplaçant pas par rapport à ce dernier, il n'y a pas de pertes d'énergie mécanique, comme au cas de frottement statique.

Supposons qu'il n'y a pas de frottement de roulement ainsi que de forces de viscosité et étudions le roulement du cylindre sur un plan quand l'axe du cylindre est perpendiculaire à la vitesse du mouvement. Admettons que le cylindre roule sans glissement de façon uniforme sur le plan horizontal; quelle est la grandeur de la force d'interaction du plan avec le cylindre? (Il est posé que la résistance de l'air est inexistante.) Il va de soi que la force tangentielle d'interaction (l'adhérençe) est nulle, car le cylindre est animé d'un mouvement uniforme.

Maintenant imaginons qu'on a posé sur le plan horizontal un cylindre auquel on a préalablement imprimé une rotation autour de son propre axe et qui, de ce fait, a acquis la vitesse angulaire ω_0 (fig. 203). Qu'arrivera-t-il une fois l'axe du cylindre libéré aussitôt

établi le contact avec le plan? Le cylindre roulera sur le plan. Au début, on observe évidemment une accélération le long de la direction du mouvement et, partant, une force extérieure agit sur le cylindre. Cette force émane du plan horizontal et est égale à la masse du cylindre multipliée par l'accélération des points situés sur son axe. La vitesse linéaire du mouvement croît de zéro, par conséquent au début du trajet il y a obligatoirement un glissement et la force engendrée par le frottement de glissement *accélère* le cylindre mais freine sa rotation. Donc, avec l'accroissement de la vitesse de translation v, on verra diminuer ω, la vitesse angulaire de rotation. La vitesse de glissement v_{gl} des points du cylindre en contact avec le plan diminuera en module, car $\omega R > v$ et

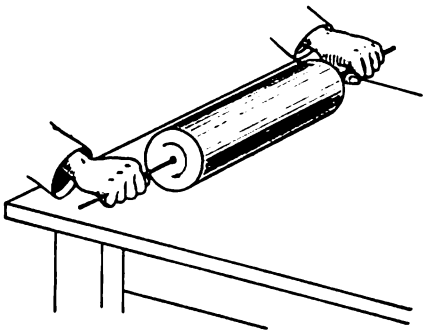


Fig. 203

$$v_{gl} = \omega R - v,$$

où R est le rayon du cylindre. Le frottement de glissement disparaîtra pour $v_{gl} = 0$ et un mouvement uniforme s'établira comme dans le cas étudié précédemment.

Le mouvement du cylindre peut être calculé si l'on pose de façon approchée le frottement de glissement $f_0 = \mu N$ suivant la loi de Coulomb (voir § 42) où N est le poids du cylindre. Au moment initial, aussitôt que le cylindre est posé sur le plan, la force accélératrice est f_0 qui reste constante ensuite; on pourra alors déterminer l'accélération linéaire du cylindre a de l'équation

$$a = \frac{f_0}{m}, \tag{72.1}$$

où m est la masse du cylindre. En même temps le cylindre acquerra une accélération angulaire négative

$$\beta = \frac{f_0 R}{I}, \tag{72.2}$$

où I est le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe de symétrie. Par conséquent, la vitesse de l'axe du cylindre augmentera suivant la loi linéaire

$$v = at = \frac{f_0}{m} t, \tag{72.3}$$

tandis que la vitesse angulaire diminuera suivant la loi linéaire

$$\omega = \omega_0 - \beta t = \omega_0 - \frac{f_0 R}{I} t; \tag{72.4}$$

ω_0 étant ici la vitesse angulaire du cylindre à l'instant origine pour $t = 0$, une fois posé sur le plan.

Il est évident qu'un moment t_0 arrivera quand la vitesse linéaire v deviendra égale à ωR ; et à cet instant le glissement cessera et, partant, disparaîtra la force de glissement. Donc après l'instant t_0 le cylindre poursuivra son roulement uniforme sans glissement à la vitesse

$$v_0 = \frac{\omega_0 R}{1 + \frac{mR^2}{I}}. \tag{72.5}$$

Cette formule s'obtient facilement en excluant des expressions (72.3) et (72.4) le temps t et en posant $\omega R = v_0$. Le temps t_0 peut être obtenu des formules (72.3) et (72.5) :

$$t_0 = \frac{mv_0}{f_0} = \frac{m\omega_0 R}{f_0\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)}. \tag{72.6}$$

Les abaques des vitesses linéaire et angulaire sont données à la figure 204. C'est seulement dans le laps de temps de 0 à t_0 que la force f_0 engendrée par le frottement agit et il y a glissement. Ensuite un roulement uniforme sans glissement s'établit.

Notons qu'en l'occurrence une partie de la réserve d'énergie cinétique du cylindre s'est transformée en chaleur. On recommande de vérifier par des calculs que la partie de la réserve initiale d'énergie se résolvant en chaleur est égale à

$$\frac{mR^2 I}{(I + mR^2)^2}.$$

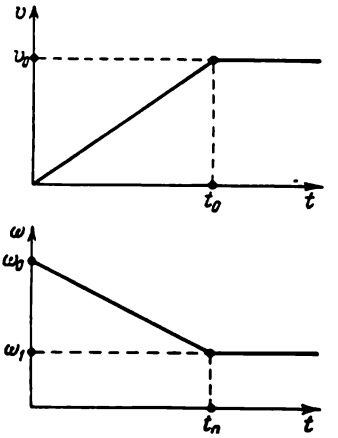


Fig. 204

Soulignons qu'à l'instant origine il y a obligatoirement glissement ; autrement la force de choc, après lequel se déclenche le mouvement uniforme, doit être infinie (ou plutôt suffisamment grande). Ce cas peut arriver, par exemple, si la surface du cylindre est munie de dents. Alors, après le choc initial (mou!), s'établit un mouvement uniforme sans glissement.

Après le choc, le point du cylindre en contact avec le plan s'est arrêté sous l'action de l'impulsion $P = \int f\,dt$ de la force f appliquée au cylindre au point de contact. Cette impulsion de la force f communique au cylindre une quantité de mouvement $mv = P$ en freinant, de plus, la rotation du cylindre de la grandeur $\Delta\omega$ qui se détermine de la condition $I\Delta\omega = RP$. Après le choc débutera un roulement pur et $v = (\omega - \Delta\omega)\,R$. Eliminant P et $\Delta\omega$, il vient

$$v = \frac{\omega_0 R}{1 + \frac{mR^2}{I}}.$$

Si la vitesse de glissement v_{gl} est dirigée vers l'arrière ($\omega R > v$), le frottement de glissement est dirigé vers l'avant ; si v_{gl} est dirigée vers l'avant ($\omega R < v$), le frottement de glissement est dirigé vers l'arrière, la force engendrée par le frottement de glissement freine le mouvement du cylindre. Lançons le cylindre le long du plan sans rotation à la vitesse initiale v_0 en le poussant de manière qu'au con-

tact avec le plan il ne tourne pas ; le frottement de glissement tendra alors à diminuer la vitesse de translation v et à augmenter la vitesse angulaire de rotation ω jusqu'à ce que ωR devienne égal à v, après quoi s'établira un mouvement uniforme sans glissement.

Au cours du roulement sans glissement peuvent apparaître des frottements dus à l'adhérence ; dans le cas considéré ils ne sont pas engendrés parce que les forces horizontales extérieures sont nulles. Aussitôt déclenché le roulement sans glissement le cylindre devient soumis à des forces extérieures et, partant apparaissent des forces dues à l'adhérence. Donc le frottement dû à l'adhérence, comme le frottement statique, est fonction de la grandeur des forces extérieures agissant sur le corps.

§ 73. ADHÉRENCE DANS LE ROULEMENT

Dans le mouvement de l'automobile et de la locomotive un rôle important est dévolu à la force engendrée, lors du roulement des roues sans glissement, par l'adhérence. Au cours du roulement sans glissement, les surfaces en contact de la roue et de la voie sont immobiles l'une par rapport à l'autre et, du fait du frottement dû à l'adhérence, une force peut être engendrée qui, comme dans le cas du

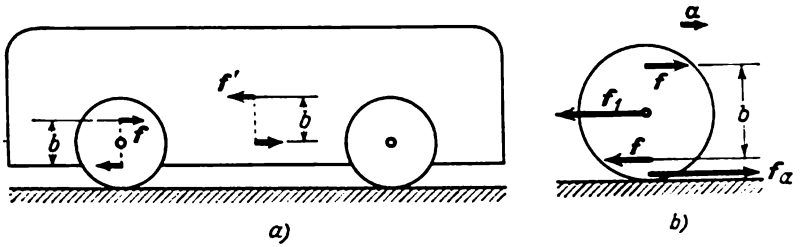


Fig. 205

frottement statique, ne dépasse pas une certaine grandeur f_0. La grandeur de f_0 est proportionnelle à N, pression de la roue sur la voie ou le rail. Pour une roue d'automobile, la dépendance de l'adhérence de la pression est plus complexe, car avec la pression varie la déformation du pneu de la roue.

Soit le schéma d'une automobile (ou d'un tramway) tel qu'il est représenté à la figure 205, *a*. A la roue menante est appliqué, de la part du corps de la machine, le moment de rotation du moteur $M = f \cdot b$ (fig. 205, *b*). De son côté, un moment opposé $M' = f' \cdot b$ est appliqué au corps de la machine et d'après la troisième loi de la dynamique $f = f'$. La roue se meut sans glissement et, par suite, les forces appliquées à la roue définissent son accélération a au

moyen des égalités suivantes :

$$M = f_a R = I\beta, \quad f_a - f_1 = ma, \quad a = \beta R, \tag{73.1}$$

où f_1 est la force agissant sur l'essieu de la roue et émanant du corps de la machine (voir fig. 205, *b*) ; m, la masse de la roue ; f_a, la force d'adhérence appliquée à la roue ; I, le moment d'inertie ; R, le rayon de la roue. De ces équations se dégage la liaison entre la force f_1 et M, à savoir :

$$f_1 = \frac{M}{R} - \left(m + \frac{I}{R^2}\right) a. \tag{73.2}$$

Une force égale et opposée à f_1 est appliquée au corps de l'automobile (ou du tramway). Donc f_1 est la grandeur de la force entraînant le corps. Elle ne diffère de l'adhérence f_a que de la grandeur ma. Pour un mouvement uniforme $a = 0$ et de (73.1) il vient

$$f_1 = f_a = \frac{M}{R}. \tag{73.2}$$

Par conséquent, la force motrice f_1 est égale à l'adhérence f_a et sa grandeur dépend du moment M développé par le moteur. Les relations (73.1), (73.2) et (73.3) ont été obtenues à la condition que la grandeur $f_a < f_0$, autrement dit que la roue ne glisse pas, dans le cas contraire la relation $\omega R = v$ (ou $\beta R = a$) n'est pas vérifiée. La force appliquée à la roue menante de l'extérieur ne peut dépasser la grandeur f_0. Si le moment de la force du moteur M croît, un *glissement* apparaît. Dans ce cas les deux premières égalités de (73.1) conservent leur valeur mais la dernière, $a = \beta R$ n'est plus satisfaite ; en cas de glissement $a < \beta R$. Par exemple, pour $a = 0$ et $\beta > 0$ une partie du moment de rotation M est dépensée à l'accroissement de la vitesse angulaire de la roue et non pas à l'augmentation de la force motrice.

Au cours du démarrage d'une automobile (sur de la neige ou de la boue), de même qu'au cours du demarrage d'un tramway ou d'une locomotive, un brusque accroissement du moment de rotation du moteur M provoque souvent le *patinage* des roues. Les roues patinent, en tournant à grande vitesse, tandis que la force motrice reste faible et la machine soit fait du surplace, soit démarre lentement. La brusque chute de la force motrice est due à ce que le frottement de glissement diminue avec l'augmentation de ce dernier. Il faut donc augmenter très progressivement le moment M (« donner du gaz » doucement) au cours d'un démarrage. Dans tous les raisonnements on a admis que le moment de rotation du moteur M est dirigé de façon à communiquer à la machine une accélération vers l'avant. Si au cours de la marche le moment de la machine change de signe, toutes les équations établies précédemment garderont leur valeur et seul variera le signe de l'accélération et de la force motrice f_1. Il est évident que la force motrice sera alors dirigée vers l'arrière et freinera la marche de la machine. On peut donc (et en cas de voie glissante, il le faut !) freiner la marche de la machine au moyen de la diminution du nombre de tours du moteur (de « donner moins de gaz »).

§ 74. FREINAGE ET PHÉNOMÈNE DE DÉPORTEMENT

Le freinage d'une voiture par le dispositif de freinage est réalisé de la façon suivante : en serrant les sabots s du frein contre la roue tournante (fig. 206), on engendre une force de frottement f' qui communique à la roue un moment M_f de signe contraire lié par une équation, analogue à (73.2), à la force de freinage f_f si la roue ne glisse pas. Comme dans le cas de démarrage il ne faut pas augmenter brusquement le moment de rotation du moteur pour éviter le glissement des roues et l'affaiblissement de la force motrice au cas de freinage de la voiture automobile il faut également éviter d'augmenter brusquement le moment de freinage M_f.

Etant donné que dans un glissement le frottement sur la voie est plus faible que dans l'adhésion et que, de plus, avec l'accroissement de la vitesse de glissement le frottement diminue, la force de freinage diminue donc de même. En

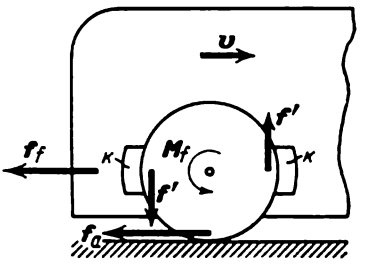


Fig. 206

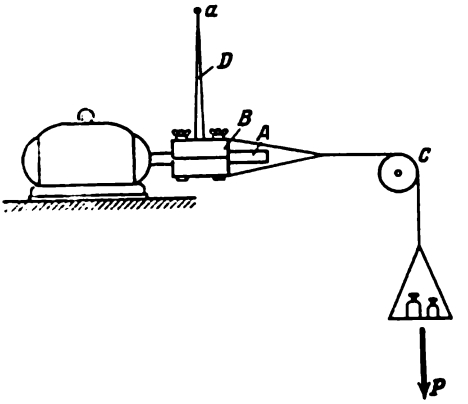


Fig. 207

freinant énergiquement, il ne faut donc pas provoquer un glissement des roues et tâcher de maintenir le moment de freinage à la limite du glissement ; dans ce cas la distance d'arrêt de la machine sera minimale. Le freinage à la main (ou au pied) exige beaucoup de pratique pour l'appréciation du moment de freinage adéquat, c'est pourquoi un freinage brusque s'accompagne presque toujours d'un glissement.

Dans les transports routiers, le glissement dû au freinage peut avoir des conséquences désastreuses par suite des *déportements* et des pertes de direction. C'est pourquoi sur des camions lourds il est utile de prévoir des mécanismes automatiques maintenant la grandeur adhéquate du moment de freinage. La voiture automobile « chasse » également au freinage brusque sur une voie humide ou glissante pour des raisons de dépendance particulière du frottement de glissement de la direction de la vitesse du mobile.

Si le corps glisse sur un plan horizontal dans une certaine direction v, l'application d'une petite force f perpendiculairement à v entraîne un déportement sensible du corps dans cette direction. Il apparaît que le corps glissant dans une certaine direction possède un très faible frottement dans le déplacement suivant la direction perpendiculaire. La raison en est que dans ce cas il n'y a pas d'adhésion entre les surfaces des corps, car ils se déplacent l'un par rapport à l'autre. L'effet produit est illustré de façon parlante dans l'expérience proposée par S. Khaïkine (fig. 207).

Sur un arbre horizontal lisse A, auquel est imprimée une rotation, est monté un manchon B ; au manchon est attachée une cordelette passant par la poulie C,

et à cette cordelette est suspendue une charge quelconque. Le poids de la charge tend la cordelette et s'efforce de faire glisser le manchon de l'arbre. Le manchon est en deux pièces serrées par des vis. En réglant le serrage du manchon par les vis, on détermine le poids de la charge P qui fait glisser le manchon de l'arbre immobile. Un levier D, fixé au manchon, est attaché au point a par une cordelette tendue perpendiculairement au dessin et empêchant le manchon de tourner avec l'arbre. Ensuite, on imprime à l'arbre une rotation; maintenant, pour une charge très inférieure (à peu près 0,1 P et moins!) le manchon glisse sur l'arbre. L'effet de diminution du frottement est particulièrement sensible si l'on tente de faire glisser à la main le manchon sur l'arbre, d'abord immobile, puis entraîné dans la rotation. On ressent une diminution brusque du frottement; il semble que l'arbre est devenu glissant après un bon graissage facilitant le déplacement du manchon.

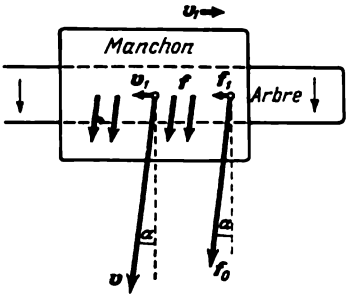


Fig. 208

L'explication de ce phénomène est aisée, si l'on considère que le frottement est toujours dirigé à l'encontre de la vitesse de glissement. Dans le mouvement du manchon le long de l'arbre avec une certaine vitesse v_1 la vitesse résultante de glissement des particules de l'arbre par rapport au manchon sera dirigée sous un petit angle α par rapport au plan perpendiculaire à l'axe de l'arbre (fig. 208) et, partant, les frottements f_0 prendront également la direction formant l'angle α avec ce plan. Dans la direction perpendiculaire, le long de l'axe de l'arbre, n'agit que la petite composante f_1 de la force f_0, bref:

$$f_1 = f_0 \operatorname{tg} \alpha \approx f_0 \alpha \approx f_0 \frac{v_1}{v}. \qquad (74.1)$$

Et comme habituellement $v_1 \ll v$, $f_1 \ll f_0$.

Il est maintenant possible d'expliquer pourquoi l'automobile « chasse » au cas de freinage. Dans un freinage brusque, les roues sont serrées par les sabots des freins et la voiture est entraînée dans le glissement vers l'avant par inertie. Des petites irrégularités de la voie (bosses) ou un frottement différentiel des roues, etc. peuvent engendrer des forces latérales ou un moment par rapport à l'axe vertical; ces dernières, à leur tour, se traduiront par une rotation de la voiture autour de l'axe vertical ou son déplacement latéral, car les frottements qui auraient pu empêcher ce mouvement latéral des roues de la voiture dans la direction perpendiculaire à son cheminement sont inexistants (ou sont très faibles). Cette explication est évidemment sommaire, mais elle souligne correctement les principales caractéristiques et les principales causes de ce dangereux phénomène.

§ 75. FROTTEMENT DE ROULEMENT

Dans les paragraphes précédents on n'a pas parlé du frottement de roulement et on s'est limité à *l'adhérence de roulement* (analogue au frottement statique) ou à la *force engendrée par le glissement du cylindre sur le plan* (analogue au frottement de glissement entre des surfaces planes). La différence de principe entre ces deux frottements est que la force due à l'adhérence n'effectue pas de travail (il n'y a pas de transformation de l'énergie mécanique en chaleur),

tandis que le frottement de glissement effectue toujours un travail lié à la transformation de l'énergie mécanique en chaleur.

Mais un roulement du cylindre sans glissement s'accompagne toujours de frottement de roulement, force liée à des « pertes » d'énergie, c'est-à-dire à une transformation de l'énergie mécanique en l'énergie thermique. Un cylindre qui roule sans glissement sur un plan horizontal lisse s'arrête progressivement; en plus de la résistance de l'air, il apparaît également dans ce cas un frottement de roulement dépendant des propriétés du matériau du cylindre et du plan. Au cours du roulement, le cylindre et le plan se déforment (fig. 209, *a*) sous l'action de la force pressant le cylindre contre le

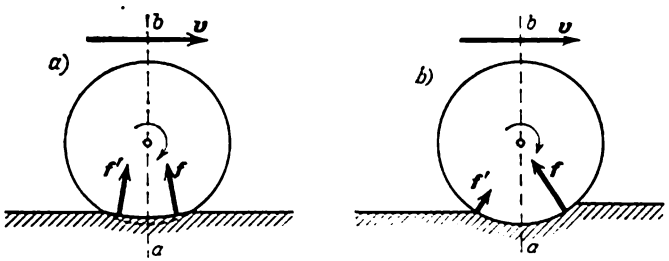


Fig. 209

plan. Si ces déformations sont élastiques, les forces d'interaction du cylindre et du plan seront absolument symétriques par rapport au plan vertical *ab* passant par le centre du cylindre ; à chaque force f correspond une force f' égale sur la partie symétrique du plan de contact. (On néglige les frottements de glissement du cylindre sur la surface du plan [1].)

La résultante de toutes les forces de déformation élastique du plan de roulement sera verticale, et le moment de ces forces par rapport à l'axe du cylindre sera également nul. Les forces des déformations élastiques du cylindre et du plan engendrées par le roulement n'auront donc aucun effet sur la vitesse du roulement, et le mouvement s'effectuera comme s'il n'y avait pas de déformations. Aucune force de frottement de roulement n'apparaît dans ce cas.

Donc pour l'explication du frottement de roulement, il faut considérer les déformations du cylindre et du plan de roulement comme non élastiques, ce qui en fait se produit chaque fois. Lequel des corps est déformé, le cylindre ou le plan ou les deux ensemble, n'influe pas sur le résultat final. Aussi, pour simplifier les raisonnements, admettra-t-on que le cylindre ne se déforme pas et que seul le plan de roulement possède une certaine déformation résiduelle. Il devient évident que les forces agissant sur le cylindre

[1] Les surfaces en contact glisseront, en général, légèrement l'une par rapport à l'autre, ce glissement différant suivant le point de contact.

de la part du plan de roulement ne seront plus symétriques par rapport au plan *ab*, la force *f*, par exemple, sera supérieure à la force *f'* dans la région symétrique située derrière le plan *ab* (fig. 209, *b*). Donc la résultante de ces forces a obligatoirement une composante horizontale dirigée vers l'arrière, et le moment de ces forces par rapport à l'axe du cylindre est également non nul, étant dirigé dans le sens *opposé* de la rotation.

Le calcul du frottement de roulement est très compliqué et l'on ne possède pas jusqu'à ce jour de théorie satisfaisante principalement

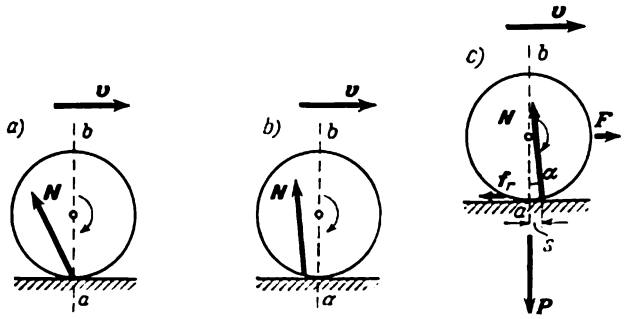


Fig. 210

parce que les lois qui lient les forces et les déformations inélastiques variant dans le temps sont encore insuffisamment connues.

Mais si l'on tient compte de ce que le cylindre roulant sur le plan horizontal *sans glissement* s'arrête progressivement, on peut en déduire une conclusion déterminée sur la nature de la direction de la force qui agit sur le cylindre de la part du plan horizontal en admettant que la zone de contact est très petite par rapport au rayon du cylindre.

Supposons que la résistance de l'air soit absente, le cylindre ne ralentissant son mouvement que sous l'action du frottement de roulement; en outre il possède dans ce cas une accélération linéaire négative a et une accélération angulaire négative β qui sont liées par la condition de l'absence de glissement, à savoir $a = \beta R$. Notons avant tout que la résultante de toutes les forces appliquées au cylindre est inclinée vers l'arrière, car le cylindre a une accélération linéaire négative. Etablissons maintenant où doit passer la résultante par rapport au centre du cylindre.

Le point d'application de la résultante ne peut se trouver ni dans le plan vertical *ab* passant par le centre ni derrière lui, comme c'est montré à la figure 210, *a* et *b*, car dans ce cas cette force communiquerait au cylindre une accélération angulaire positive. Il reste donc une dernière possibilité: le point d'application de la force *N*

doit se trouver devant le plan (fig. 210, *c*) la ligne d'action de la force N passant au-dessus du centre du cylindre, car autrement elle engendrerait une accélération angulaire positive. Ainsi donc la force exercée par le plan sur le cylindre freiné sous l'action du frottement de roulement est dirigée et est appliquée comme c'est montré sur la figure 210, *c*.

La composante horizontale de la force N est le frottement de roulement f_r. Etant donné que la distance s, écartement du point d'application de la force N, est pratiquement très petite devant le rayon du cylindre R ou que l'angle d'inclinaison α est très petit, la valeur absolue de la grandeur N est presque égale à la pression serrant le cylindre contre le plan, dans le cas considéré, au poids du cylindre P.

La liaison entre le frottement de roulement et les autres grandeurs se détermine par la voie expérimentale, en principe, de la façon suivante. A l'axe d'un cylindre roulant sur un plan horizontal est appliquée une force horizontale constante F dans la direction du mouvement, égale à la force de frottement de roulement f_r (voir fig. 210, *c*) (la résistance de l'air peut être négligée). Comme la rotation du cylindre est uniforme et son accélération angulaire est nulle, la force N doit passer par l'axe du cylindre. Les deux autres forces, la force de pesanteur P et la force extérieure F passent comme c'est imposé par l'axe du cylindre. Donc

$$P = N \cos \alpha, \quad F = N \sin \alpha = f_r. \tag{75.1}$$

L'angle α étant pratiquement très petit, on peut donc écrire (75.1) ainsi :

$$P \approx N, \quad f_r \approx N\alpha \approx P \frac{s}{R}. \tag{75.2}$$

Habituellement dans les tableaux sont données les valeurs de s et on indique non pas le frottement de roulement

$$f_r \approx P \frac{s}{R}, \tag{75.3}$$

mais le moment du frottement de roulement

$$f_r R \approx Ps, \tag{75.4}$$

ou : le moment du frottement de roulement est égal à la pression normale P multipliée par s. La grandeur s est appelée *coefficient du moment de frottement de roulement.*

Les expériences ont montré que pour l'acier, les divers métaux et le bois dur la grandeur s ne dépend pas, dans certaines limites, de la vitesse du roulement et du rayon du cylindre, quoique d'après des considérations générales il soit évident qu'une telle dépendance

devrait en principe exister. La grandeur s ne dépend que du matériau du cylindre et du plan.

La grandeur s peut se déterminer sur la base des expériences sur le roulement du cylindre sur un plan incliné. Supposons que l'inclinaison α du plan soit choisie de la sorte que le cylindre puisse rouler sur le plan de façon uniforme et sans glissement (fig. 211). Dans ce cas la force d'action du plan sur le cylindre est obligatoirement verticale et passe par l'axe du cylindre, car le roulement de ce dernier s'effectue de façon uniforme. Donc le frottement de roulement est

$$f_r = P \sin \alpha \approx P\alpha \approx \frac{s}{R} P. \qquad (75.5)$$

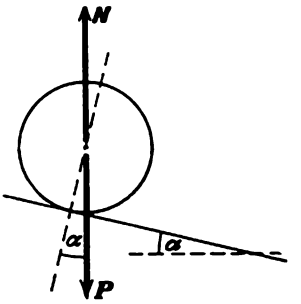


Fig. 211

En exécutant ces expériences, il faut s'assurer que le frottement dû à la viscosité de l'air est très faible devant le frottement de roulement.

Dans le roulement de la roue d'un chariot sur un sol ordinaire, le frottement doit évidemment dépendre de la vitesse, toutefois les données d'expériences en ce qui concerne la nature et la grandeur de cette dépendance ne sont pas encore suffisantes. Le problème de la détermination du frottement de roulement de la roue d'une voiture d'automobile est de beaucoup plus compliqué, mais, en première approximation, le moment du frottement de roulement de la roue d'automobile est

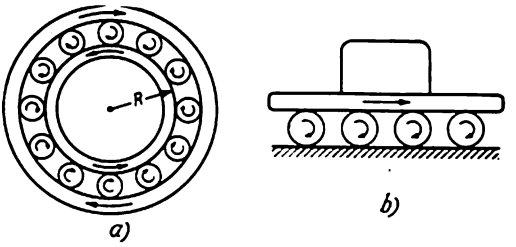


Fig. 212

également considéré comme constant et dans des tableaux s'y rapportant on trouve les valeurs de s en fonction des paramètres caractérisant les propriétés de la route et du pneu de la roue.

Pour un cylindre, le frottement de roulement est de beaucoup inférieur au frottement de glissement, et c'est pourquoi dans les machines modernes les paliers de glissement sont remplacés par les paliers à billes ou à rouleaux. Il est facile de voir qu'en cas de surface de contact plane (fig. 212, *b*) on est en présence d'un roulement pur des rouleaux-cylindres, tandis qu'avec des paliers à billes ou à rouleaux ordinaires (fig. 212, *a*) il ne peut être question de

roulement pur des rouleaux ; toutefois le glissement est d'autant plus faible que le rapport du rayon des billes (rouleaux) au rayon du cylindre R est petit. Il n'est cependant pas indiqué d'utiliser des billes (rouleaux) au rayon trop petit afin d'éviter l'enfoncement de ces derniers dans la surface contiguë.

Si le matériau du cylindre (bille) et du plan de roulement est suffisamment dur et la pression est faible, le frottement de roulement est alors infime. Aussi en étudiant le roulement de la bille dans une gorge inclinée ou du cylindre sur un plan incliné, on peut déterminer les lois du mouvement uniformément accéléré qui est analogue à la chute du corps dans le vide. Cette circonstance est essentielle pour les expériences de Galilée qui s'en servit pour étudier la loi de la chute des corps en observant une bille descendant une rigole inclinée.

Supposons que γ l'angle d'inclinaison du plan par rapport à l'horizon soit plus grand que α (voir. (75.5)). La force accélératrice est alors égale à $mg \sin \gamma$. Le frottement de roulement est $mg \sin \alpha$. Si l'on peut négliger le frottement contre l'air, alors, d'après les formules (58.10) et (59.12), l'accélération de la bille sera constante et égale à

$$a = \frac{5}{7} g (\sin \gamma - \sin \alpha). \tag{75.6}$$

Choisissant la valeur appropriée de γ, on peut rendre l'accélération suffisamment petite et observer le mouvement accéléré à une petite vitesse pour laquelle, comme on l'a vu précédemment (§ 40), on peut négliger complètement la résistance opposée par l'air[1].

[1] Il est vrai qu'il s'y agissait de la translation, mais pour de petites vitesses la résistance de l'air à une bille mobile en rotation sera du même ordre de grandeur.

CHAPITRE IX

ATTRACTION DES CORPS

§ 76. LOI D'ATTRACTION UNIVERSELLE

Tous les corps physiques sont soumis à l'attraction mutuelle. La loi fondamentale définissant la force d'attraction a été formulée par Newton et porte le nom de *loi d'attraction de Newton.*

La loi d'attraction s'énonce ainsi : *entre deux corps de masses* m_1 et m_2 *se trouvant à la distance* R *l'un de l'autre agissent des forces d'attraction mutuelle* F_{12} *et* F_{21} *dirigées d'un corps à l'autre* (fig. 213), *la grandeur de la force d'attraction étant proportionnelle au produit*

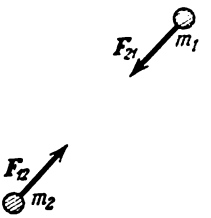


Fig. 213

des masses des deux corps et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Bref, les forces de gravitation sont

$$F_{12} = F_{21} = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2}, \tag{76.1}$$

où γ est une certaine grandeur constante, la *constante d'attraction* ou *de gravitation.*

Sous cette forme la loi d'attraction n'est vraie que si les dimensions des corps sont petites par rapport à la distance qui les sépare, c'est-à-dire quand les corps peuvent être confondus avec des points matériels.

La détermination de la force d'attraction mutuelle pour deux corps qui ne peuvent être assimilés à des points est réalisée de la manière suivante. On divise le corps en particules assimilables à des points, on choisit dans l'autre corps une particule et on détermine la résultante des forces d'attraction avec toutes les particules du premier corps. Ensuite on refait la même opération avec toutes les autres particules du second corps et on fait la somme ; cette somme constitue la force d'action du premier corps sur le second. En se

servant de la troisième loi, on détermine la force qui agit sur le premier corps.

Les calculs réalisés pour des sphères en matériau homogène montrent que la résultante de la force d'attraction est appliquée au centre de chacune des sphères et est égale à

$$\gamma \frac{m_1 m_2}{R^2}, \tag{76.2}$$

où m_1 et m_2 sont les masses des sphères, R la distance entre les centres des sphères et γ la même grandeur qui figurait dans l'expression

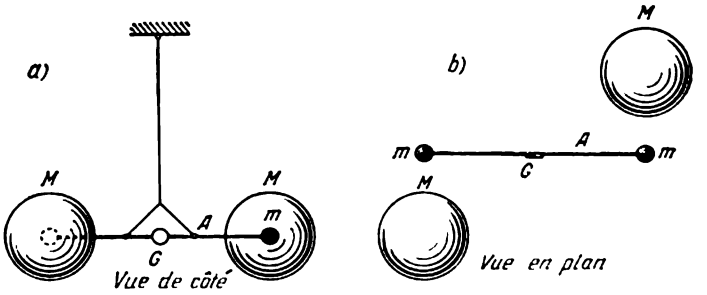


Fig. 214

(76.1). Donc la loi d'attraction de Newton en sa forme (76.1) s'applique aussi bien à des points matériels qu'à des sphères de matériau homogène.

La force d'attraction entre des corps n'est pas ressentie en laboratoire, car elle est trop faible par rapport à leur poids, et sa mesure directe présente de grandes difficultés. Toutefois de telles mesures furent réalisées par des scientifiques.

La première mesure de la force d'attraction a été réalisée par Cavendish en 1798 au moyen de la balance (pendule) de torsion. Le même principe fut également utilisé dans les mesures postérieures de la force d'attraction.

On a montré à la figure 214 le schéma de l'instrument utilisé par Cavendish. Aux extrémités d'un levier relativement léger A se trouvaient deux masselottes identiques, chacune de masse m. Ce levier était suspendu par un fil fin et non tordu suffisamment long. Au milieu du levier était fixé un miroir G; le pivotement du rayon de lumière réfléchi par le miroir marque l'enroulement du fil par lequel était suspendu le levier A. On rapprochait des masselottes m de côtés opposés à une distance déterminée deux grandes sphères en plomb M (de masse d'environ 158 kg chacune), comme c'est montré en plan sur la figure 214, *b*). Sous l'action de forces d'attraction, le levier A de la balance de torsion se mettait à tourner jusqu'à

ce que le moment de la force d'attraction entre les sphères soit équilibré par le moment de torsion du fil, qui était déterminé par le déplacement du spot réfléchi par le miroir. En rapprochant les masses à des distances différentes, Cavendish détermina la force d'attraction en fonction de la distance et confirma la justesse de la loi de Newton.

Après Cavendish, ses expériences ont été à maintes reprises répétées sous différentes variantes. Sur la base de ces expériences on adopte à l'heure actuelle dans le système SI pour la constante de gravitation la valeur suivante:

$$\gamma = 6{,}65 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}; \tag{76.3}$$

et dans le système CGS

$$\gamma = 6{,}65 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm^3/(g \cdot s^2)}.$$

La grandeur γ est une grandeur à dimension. On aurait pu établir un système d'unités de façon à rendre γ sans dimension, mais il aurait alors fallu modifier la dimension des autres grandeurs; toutefois ce système n'est pas utilisé en pratique.

Connaissant la constante de gravitation, on peut déterminer la masse de la Terre m_T d'après l'accélération du corps en chute libre au voisinage de la surface g. En effet, d'après la loi de Newton la force d'attraction du corps de masse m est

$$P = \gamma \frac{m \cdot m_T}{r_0^2},$$

où r_0 est le rayon de la Terre; d'autre part

$$P = mg.$$

De ces égalités on tire

$$m_T = \frac{g r_0^2}{\gamma}. \tag{76.4}$$

En y portant la valeur du rayon de la Terre $r_0 \approx 6{,}4 \cdot 10^8$ cm, il vient

$$m_T = \frac{981 \cdot 6{,}4^2 \cdot 10^{16}}{6{,}65 \cdot 10^{-8}} \approx 6 \cdot 10^{27}\mathrm{g} = 6 \cdot 10^{21}\ \text{tonnes}. \tag{76.5}$$

Newton lui-même a vérifié sa loi, en analysant le mouvement de la Lune autour de la Terre. En supposant que la Lune tourne uniformément sur un cercle sous l'action de la seule attraction terrestre et connaissant la durée de révolution de la Lune autour de la Terre (mois lunaire) $T = 27{,}3$ jours et la distance de la Terre à la Lune $r = 3{,}844 \cdot 10^{10}$ cm, on peut déterminer l'accélération centripète de la Lune w. Calculons-la:

$$w = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 3{,}844 \cdot 10^{10}}{2{,}358^2 \cdot 10^{12}}\ \mathrm{cm/s^2},$$

car $T = 27{,}3$ jours $= 2{,}358 \cdot 10^6$s. Effectuons les calculs arithmétiques et cherchons l'accélération de la Lune:

$$w \approx 0{,}27\ \mathrm{cm/s^2}. \tag{76.6}$$

La force d'attraction de la Terre communique à la Lune cette accélération centripète, et d'après la seconde loi de la dynamique, on a donc

$$m_L w = \gamma \frac{m_L \cdot m_T}{r^2}, \tag{76.7}$$

où m_L est la masse de la Lune. D'où

$$w = \gamma \frac{m_T}{r^2}. \tag{76.8}$$

D'un autre côté on peut écrire l'accélération g au voisinage de la Terre de la façon suivante:

$$g = \gamma \frac{m_T}{r_0^2},$$

où r_0 est le rayon de la Terre. Portant m_T tiré de cette expression dans la formule (76.8) il vient

$$w = g \frac{r_0^2}{r^2}, \tag{76.9}$$

ou l'accélération de la Lune est

$$w = 981 \left(\frac{6,4}{3,844}\right)^2 \cdot \frac{10^{16}}{10^{20}} \approx 0,273 \text{ cm/s}^2. \tag{76.10}$$

L'accélération calculée de cette façon coïncide avec celle trouvée plus haut (voir (76.6)) à partir des conditions cinématiques.

Cette comparaison a convaincu Newton de la justesse de la loi de gravitation qu'il a formulée. Les observations astronomiques et les calculs confirment également la justesse de la loi de gravitation. Remarquons que pour vérifier la loi de gravitation d'après le mouvement de la Lune, Newton n'a pas eu besoin de connaître la constante de gravitation γ.

La découverte de la loi de gravitation a permis d'élargir fortement le domaine d'application des lois de la mécanique établies sur la base des expériences avec des corps terrestres et d'étendre leur action à tous les corps physiques de l'Univers.

§ 77. MASSE « INERTE » ET MASSE « GRAVITATIONNELLE »

En formulant la loi de gravitation (76.1), on sous-entendait implicitement que la masse du corps dont il s'agissait dans la loi était la masse qui servait de mesure de l'inertie. Toutefois en l'absence d'études complémentaires, cette hypothèse n'est pas fondée.

Il est plus juste de considérer que le corps possède la propriété d'attraction, en accord avec les données des expériences. La mesure de cette propriété est donnée par la masse « gravitationnelle » du corps qui, en général, est absolument différente de la masse « inerte », mais des études expérimentales montrent que ces grandeurs sont mutuellement *proportionnelles* et en choisissant de façon appropriée les unités, on peut toujours les rendre égales ce qui se fait d'habitude en physique.

La proportionnalité de la masse « inerte » et de la masse « gravitationnelle » peut être démontrée à l'aide de l'expérience prouvant que l'accélération de la chute libre est la *même* pour *tous* les corps

de masses différentes (au lieu considéré). Le corps a la propriété d'inertie qu'on mesure au moyen de la grandeur de la masse « inerte » m_i et la propriété d'attraction mesurée par la grandeur de la masse « gravitationnelle » m_g. La force d'attraction peut alors être exprimée ainsi :

$$P = km_g, \tag{77.1}$$

où k est une certaine constante dimensionnelle, autrement dit la force d'attraction vers la Terre est proportionnelle à la masse gravitationnelle de ce corps. D'autre part la chute libre du corps n'est autre chose que le mouvement du corps sous l'action de la gravitation. Aussi d'après la seconde loi de la dynamique peut-on écrire

$$P = m_i g, \tag{77.2}$$

où g est l'accélération de la force de pesanteur ou, en égalant (77.1) et (77.2), il vient

$$g = k\frac{m_g}{m_i}. \tag{77.3}$$

Puisque l'accélération g est la même pour tous les corps et ne dépend pas du matériau du corps et de ses dimensions, la masse « inerte » m_i est donc proportionnelle à la masse « gravitationnelle » m_g. Si l'on prend pour unité de masse « inerte » le kilogramme (kg) on peut choisir une unité de masse « gravitationnelle » pour laquelle k serait égale à 9,81 m/s^2. Avec un tel choix de l'unité, la masse « gravitationnelle » sera exactement égale à la grandeur de la masse « inerte » du même corps.

En vérifiant la proportionnalité des masses « inerte » et « gravitationnelle », Newton avait monté des expériences avec des pendules faits avec des matériaux divers. Il vérifiait la période d'oscillations des pendules de même longueur, mais en matériaux différents. Il est connu de la théorie (voir plus loin § 124) que la période d'oscillations d'un pendule mathématique ne dépend que de sa longueur l, de la constante k figurant dans la formule (77.1) et du rapport $\frac{m_i}{m_g}$ de la façon suivante :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l\,m_i}{k\,m_g}}. \tag{77.4}$$

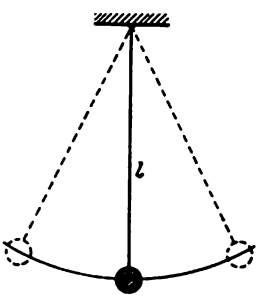


Fig. 215

Notons qu'on appelle pendule mathématique un pendule dont les dimensions linéaires du corps suspendu au fil sont très petites devant la longueur du fil, la masse de ce dernier était insignifiante comparée à celle du corps suspendu (fig. 215). Pour tout pendule mathématique, l'expérience fournit une période d'oscillations proportionnelle à la seule racine carrée de sa longueur $\sqrt{l}$. Donc la grandeur $\frac{m_i}{m_g}$ reste constante, ou $\frac{m_i}{m_g} = \text{const}$. Avec le choix des unités indiqué

plus haut, la grandeur $k = g$ et le rapport $\frac{m_i}{m_g} = 1$, on peut donc écrire la formule (77.4) pour le pendule mathématique ainsi :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{77.5}$$

Les expériences de Newton ont été reprises avec une plus grande précision par Bessel. Au début du siècle courant, elles furent vérifiées encore une fois à l'aide de méthodes plus précises et des instruments plus perfectionnés par l'académicien Krylov.

Il est évident que sur la base des mesures de la période d'oscillations du pendule de longueur donnée on peut obtenir la grandeur de la gravitation au lieu considéré. La grande précision des mesures de la période d'oscillations du pendule garantit une précision sensible de la mesure de la force d'attraction au lieu considéré.

En notant la différence entre les périodes d'oscillations d'un même pendule en divers endroits de la surface terrestre, on peut suivre les variations de la force de gravitation d'un endroit à l'autre. Il se trouve qu'en raison de l'hétérogénéité de la surface de l'écorce terrestre la force de gravitation varie de place en place même à la même latitude. D'après les variations de la gravitation sur une aire donnée les géologues déduisent des changements dans la densité de l'écorce terrestre et sur cette base concluent à l'existence des minéraux utiles. C'est justement en quoi consiste la prospection gravimétrique des minéraux utiles.

Le rôle de la *loi de proportionnalité* des masses gravitationnelle et inerte n'a été reconnu en physique qu'en théorie de la relativité, où elle porte le nom de *loi de l'équivalence des masses gravitationnelle et inerte du corps donné* et on en a tiré des conséquences importantes en ce qui concerne le fait que dans toute portion suffisamment petite de l'espace on peut toujours trouver un référentiel accéléré dans lequel le champ des forces de pesanteur n'existe pas.

§ 78. ÉNERGIE POTENTIELLE DE LA GRAVITATION

Vu que les forces de gravitation entre les corps (ou entre les particules composant les corps) dépendent de leur position relative, tout ensemble de corps, disposés d'une certaine façon l'un par rapport à l'autre, possède une réserve d'énergie potentielle de gravitation. Avec la modification de la disposition relative des corps les forces de gravitation accompliront un certain travail et partant, l'énergie potentielle du système de corps variera également.

Rappelons que la variation de l'énergie potentielle de gravitation est égale au signe contraire près au travail des forces de gravitation accompli au cours de la modification de la configuration du système de corps. Notons que dans le cas général le système est muni d'une

réserve d'énergie potentielle si le travail des forces d'interaction est indépendant du mode suivant lequel le système passe d'une configuration à une autre.

Pour deux particules matérielles de masses m_1 et m_2 (ou pour deux sphères de même masse) l'énergie potentielle peut être calculée d'après la formule (36.8) en y portant

$$f(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{78.1}$$

où r est la distance entre les particules et γ la constante de gravitation. Dans ce cas la différence entre les énergies potentielles en deux points r_1 et r_2 est

$$U_2 - U_1 = \gamma \int_1^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r}\Big|_1^2 =$$

$$= \gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_2}. \tag{78.2}$$

En fait on ne peut toujours calculer que la différence d'énergie potentielle pour deux états. Pour plus de commodité, on admet dans le calcul que l'énergie potentielle à la distance infinie ($r \to \infty$) est nulle, ou $U(\infty) = 0$. Alors (78.2) peut être écrit ainsi :

$$U_1 = U(r_1) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_1}. \tag{78.3}$$

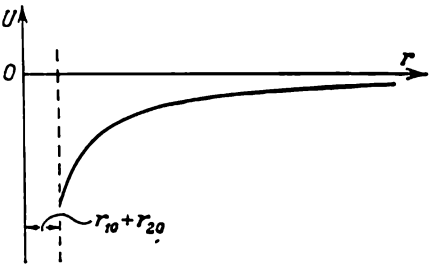


Fig. 216

Avec un tel choix de la valeur nulle l'énergie potentielle de deux sphères (ou de deux points matériels) sera toujours négative (fig. 216) et elle croîtra avec l'augmentation de la distance. Car entre les corps agissent des forces d'attraction, par conséquent, pour éloigner un corps de l'autre il faut dépenser du travail ; l'énergie potentielle croît donc avec l'éloignement. L'énergie potentielle est maximale pour un éloignement infini et elle est minimale, si la distance entre les corps devient très petite.

Si les rayons des sphères sont respectivement r_{10} et r_{20}, l'énergie potentielle minimale de leur interaction a la grandeur

$$U_{\min} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{10} + r_{20}}. \tag{78.4}$$

Le calcul de l'énergie potentielle de gravitation des corps hétérogènes ou d'un système de points matériels est plus compliqué,

mais en principe la voie à suivre est la même. Avec l'accroissement de la distance entre les corps d'énergie potentielle de gravitation augmente.

§ 79. LOIS FONDAMENTALES DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE

Les lois du mouvement des corps célestes et en particulier le mouvement des planètes autour du Soleil sont la conséquence directe des lois fondamentales de la mécanique, appelées lois de Newton : trois lois de la dynamique et la loi d'attraction universelle.

Déjà avant Newton, sur la base des observations de Tycho Brahé, Kepler découvrit les lois du mouvement des planètes autour du Soleil. Ces lois portent le nom de Kepler et s'énoncent ainsi :

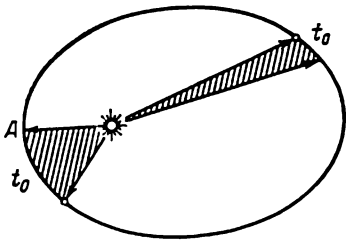


Fig. 217

1°. *Chaque planète décrit autour du Soleil, dans le sens direct, une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.*

2°. *Les aires balayées par le rayon vecteur joignant la planète au Soleil sont proportionnelles aux temps employés à les décrire* (fig. 217).

3°. *Les carrés des temps de révolution des planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.*

La première loi de Kepler découle de la solution du problème de la détermination des orbites des planètes et de la loi de leur mouvement sur l'orbite. A cet effet, on calcule les trajectoires du point matériel soumis à l'action d'une force centrale[1] dont la grandeur est en raison inverse du carré de la distance du centre. Les résultats de la solution de ce problème montrent que les trajectoires des corps célestes sont situées dans un plan et constituent une ellipse, une parabole, ou une hyperbole.

Dans le cas particulier, quand l'orbite de la planète est un cercle, on démontre de façon élémentaire la possibilité d'un tel mouvement sous l'action d'une force centrale. En effet, la planète peut se mouvoir sur un cercle quand la force d'attraction du Soleil est égale à la force centripète. Pour qu'une planète en partant du lieu donné distant de R du Soleil puisse engendrer un cercle elle doit posséder une vitesse déterminée dirigée perpendiculairement au rayon vecteur et égale[2] à

$$v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}, \tag{79.1}$$

[1] Toujours dirigée vers un point, dit centre.

[2] Cette formule est déduite de l'égalité $mv_0^2/R = \gamma Mm/R^2$, où m est la masse de la planète.

où M est la masse du Soleil et γ la constante de gravitation. Ainsi donc la vitesse du mouvement sur l'orbite et le rayon de l'orbite sont mutuellement liés, la vitesse ne dépendant pas de la masse de la planète.

Des calculs plus compliqués montrent et des observations le confirment que la forme et la nature de l'orbite sont fonction de la vitesse initiale. Par exemple, si la vitesse du mouvement v_2 au point A (fig. 218) est inférieure à v_0 de la formule (79.1), la planète décrira une ellipse dont le Soleil occupera le foyer le plus éloigné (orbite AA_2 sur la figure 218). Si par contre la vitesse v_1 est supérieure à la vitesse « circulaire » v_0, la planète décrira également une ellipse, mais le Soleil sera situé au foyer le plus rapproché de l'orbite (orbite AA_1 sur la figure 218). Mais le mouvement s'effectue sur une ellipse que si la vitesse au point A est inférieure à la vitesse égale à

$$v_p = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}, \qquad (79.2)$$

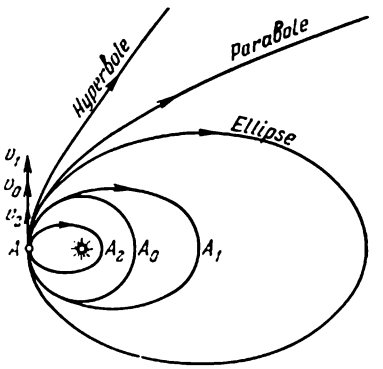


Fig. 218

à laquelle la planète décrit une parabole. Si la vitesse du mouvement au point A est supérieure à la vitesse « parabolique » (voir formule (79.2)), le corps céleste, qui, n'est déjà plus une planète, décrira une hyperbole et ne reviendra jamais au même point.

Dans le mouvement sur l'orbite la somme des énergies cinétique et potentielle reste constante. Par exemple, dans le mouvement sur l'ellipse, l'énergie potentielle croît avec l'augmentation de la distance du Soleil, tandis que l'énergie cinétique diminue respectivement, de sorte que la vitesse est plus petite aux points éloignés du Soleil qu'aux points qui en sont rapprochés. Si la vitesse initiale au point A dépasse la vitesse « circulaire » (79.1) l'ellipse de l'orbite croît en s'allongeant. Le point A_1 de l'orbite, opposé au point A, s'éloignera de plus en plus du Soleil. Si l'on connaît la distance du point A_1 du Soleil, on peut, sur la base de la loi de conservation de l'énergie, déterminer la vitesse de ce point en fonction de la vitesse initiale au point A. En effet, l'énergie au point A est

$$E = \frac{mv_1^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R_1} \qquad (79.3)$$

et elle est égale à l'énergie en tout point de la trajectoire

$$E = \frac{mv_c^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R_c}, \qquad (79.4)$$

où v_c et R_c sont la vitesse en un point quelconque et sa distance du Soleil respectivement. Confrontant les formules (79.3) et (79.4), on trouve la relation entre la vitesse et la distance si l'on connaît la grandeur de l'énergie E au point « ori-

gine » A. Pour des orbites elliptiques $E < 0$ et, partant, l'énergie potentielle (en valeur absolue) est supérieure à l'énergie cinétique.

Pour une orbite parabolique la vitesse à l'infini est nulle et elle correspond donc à l'énergie totale également nulle, ou $E = 0$; de là d'après (79.2) on obtient la valeur de la vitesse « parabolique » au point A, bref:

$$\frac{mv_p^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R} = 0. \tag{79.5}$$

Transformant, on obtient pour v_p la formule écrite plus haut (79.2).

Pour des orbites hyperboliques débutant en A, l'énergie $E > 0$, c'est-à-dire que l'énergie cinétique est plus grande que la valeur absolue de l'énergie potentielle.

Ainsi donc les formes des orbites passant par un point choisi A sont univoquement liées à la grandeur de l'énergie possédée par le corps qui les décrit.

La seconde loi de Kepler est le corollaire de la loi de conservation du moment cinétique. En effet, sur la planète en rotation autour du Soleil agit la force de gravitation $\gamma \frac{Mm}{r^2}$ toujours

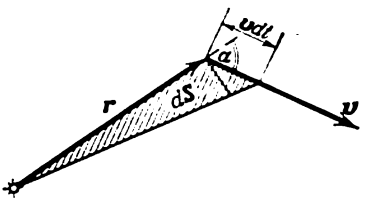


Fig. 219

dirigée vers le Soleil et, partant, le moment cinétique par rapport au centre du Soleil sera constant, c'est-à-dire

$$[r \cdot mv] = N = \text{const},$$

ou

$$[rv] = \text{const}, \tag{79.6}$$

où comme c'est montré sur la figure 219, r est le rayon vecteur, v le vecteur vitesse de la planète. L'aire balayée par le rayon vecteur durant le temps dt est

$$dS = \frac{1}{2} rv \sin \alpha \, dt,$$

où α est l'angle entre r et v; considérant l'expression (79.6), on peut écrire ainsi:

$$2 \frac{dS}{dt} = rv \sin \alpha = \text{const}, \quad \text{ou} \quad \frac{dS}{dt} = \text{const}. \tag{79.7}$$

Il suit de cette loi qu'au cours de la révolution sur l'orbite, la planète acquiert une vitesse maximale aux instants où elle est le plus rapprochée du Soleil (le point A sur la figure 217).

La troisième loi de Kepler se démontre facilement si l'on admet que les orbites des planètes sont des cercles. En effet, l'excentricité des orbites des ellipses est très faible, ainsi, par exemple, pour l'orbite terrestre il est $\approx 0{,}017$, pour l'orbite de Mercure $\approx 0{,}205$. Notons que dans les calculs précis qui tiennent compte de l'excentricité des orbites on obtient le même résultat.

Soit m_1 la masse d'une planète décrivant une orbite circulaire de rayon r_1, la période de révolution sur l'orbite étant T_1, pour une seconde planète les données respectives sont m_2, r_2, T_2. Le carré de la vitesse linéaire de la première planète en mouvement sur l'orbite circulaire sera alors :

$$v_1^2 = \frac{\gamma M}{r_1},$$

où M est la masse du Soleil. La vitesse du mouvement de la planète sur l'orbite est

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}.$$

Portant cette expression dans la formule précédente, il vient

$$\frac{4\pi^2 r_1^2}{T_1^2} = \frac{\gamma M}{r_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}. \tag{79.8}$$

Une expression identique peut être écrite pour la seconde planète :

$$\frac{r_2^3}{T_2^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}. \tag{79.9}$$

Comparant (79.8) et (79.9), il vient

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3},$$

ce qui traduit le contenu de la troisième loi de Kepler.

Ainsi donc la mécanique de Newton a permis d'expliquer complètement les lois du mouvement des corps célestes. Jusqu'à nos jours on voit se poursuivre les remarquables études des astronomes sur les trajectoires des mouvements des corps célestes confirmées par les mesures expérimentales des mouvements des vaisseaux spatiaux et des satellites.

§ 80. MOUVEMENT DES SATELLITES TERRESTRES ET DES ENGINS SPATIAUX

Après le lancement du premier satellite artificiel soviétique de la Terre en octobre 1957 et le vol historique le 12 avril 1961 de Y. A. Gagarine autour de la Terre, la technique des vols spatiaux a commencé à se développer rapidement. A l'heure actuelle de nombreux satellites artificiels tournent autour de la Terre, et un certain

nombre d'engins spatiaux lancés par l'homme sont devenus des satellites du Soleil.

Les lois régissant le vol des satellites sont analogues aux lois de révolution des planètes autour du Soleil. Si l'on assimile l'engin spatial à un projectile ordinaire ou à une pierre lancée horizontalement d'une certaine hauteur h à la vitesse v, toutes les trajectoires décrites, l'influence de l'atmosphère étant négligée (fig. 220), sont évidemment analogues aux mouvements éventuels des planètes.

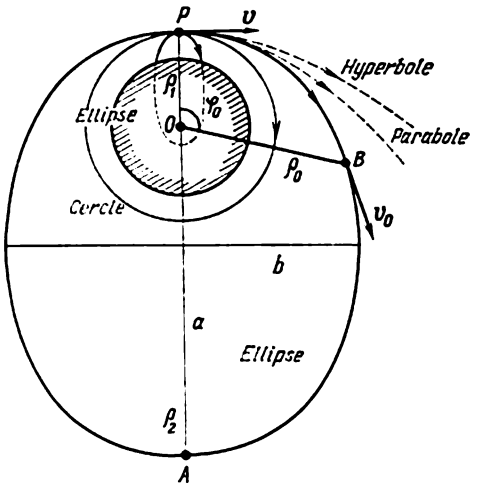


Fig. 220

A une petite vitesse initiale v inférieure à

$$v_{cr} = r_0 \sqrt{\frac{g_0}{r_0 + h}},$$

les trajectoires du projectile sont des segments d'ellipses dont les foyers coïncident avec le centre de la Terre. Pour une vitesse initiale très petite, ces segments peuvent être assimilés avec une grande précision à des segments de paraboles.

A la vitesse v_{cr} égale $\approx$ 7,93 km/s la trajectoire du projectile sera un cercle et il deviendra un satellite de la Terre. On peut calculer facilement la vitesse du mouvement du projectile sur une orbite circulaire en posant que l'accélération centripète du projectile $\frac{v_{cr}^2}{r_0 + h}$ est égale à l'accélération de chute libre g. En effet, l'accélération de la chute libre à la hauteur h est

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{(r_0 + h)^2}, \tag{80.1}$$

où g_0 est l'accélération à la surface de la Terre à la distance r_0 de son centre ; alors

$$\frac{v_{cr}^2}{r_0 + h} = g = \frac{g_0 r_0^2}{(r_0 + h)^2},$$

ou

$$v_{cr} = r_0 \sqrt{\frac{g_0}{r_0 + h}}. \tag{80.2}$$

Si $h \ll r_0$,

$$v_{cr} \approx \sqrt{r_0 g_0} \approx 7{,}93 \text{ km/s} \tag{80.3}$$

est alors la vitesse du mouvement du satellite sur une orbite circulaire de rayon égal au rayon de la Terre ; on a pris l'habitude d'appeler cette vitesse *première vitesse cosmique.*

Quand la vitesse initiale est supérieure à v_{cr}, mais inférieure à

$$v_p = r_0 \sqrt{\frac{2g_0}{r_0+h}},$$

la trajectoire du projectile est une ellipse, la Terre se trouvant au foyer le plus proche du point de lancement. Pour $v = v_p$ la trajectoire du projectile est une parabole, et le projectile qui la parcourt ne reviendra plus sur Terre. La vitesse « parabolique » par rapport à la Terre se détermine également d'après la formule (79.5), seulement au lieu de γM il y faut introduire γM_T, où M_T est la masse de la Terre. Tenant compte de la formule (80.1), on peut écrire que la grandeur de la force de gravitation est

$$\frac{\gamma M_T}{(r_0+h)^2} = \frac{g_0 r_0^2}{(r_0+h)^2}, \quad \gamma M_T = g_0 r_0^2. \tag{80.4}$$

Portant cette expression dans (79.5), on obtient la vitesse parabolique pour la Terre :

$$v_p = r_0 \sqrt{\frac{2g_0}{r_0+h}}. \tag{80.5}$$

Au cas de $h \ll r_0$ ou quand le projectile est lancé suivant la tangente à la surface terrestre,

$$v_p \approx \sqrt{2g_0 r_0} \approx 11{,}2 \text{ km/s}. \tag{80.6}$$

Cette grandeur est dite *seconde vitesse cosmique.*

Ainsi donc, si le projectile est lancé horizontalement d'une hauteur h à la vitesse supérieure à $v_p = r_0 \sqrt{\frac{2g_0}{r_0+h}}$, il parcourra une trajectoire *hyperbolique* et disparaîtra à jamais de la région d'attraction de la Terre, ou deviendra un satellite indépendant du Soleil, une sorte de petite planète artificielle.

Tous ces calculs sont menés indépendamment de l'influence du Soleil et des planètes sur le mouvement du projectile spatial. Autrement dit, on admet que la Terre est immobile et que le satellite est en mouvement dans son référentiel, tandis que le système Terre-satellite continue invariablement son mouvement autour du Soleil.

Comme la masse du satellite est infiniment petite en comparaison de la masse de la Terre, le centre d'inertie du système Terre-satellite coïncide pratiquement avec le centre de la Terre. En outre, quand la distance entre le satellite et le centre de la Terre est très petite devant la distance de la Terre au Soleil, on peut ne pas tenir compte de l'influence de la variation de l'attraction du Soleil sur l'orbite du satellite (voir p. 175). Mais si l'éloignement du satellite

de la Terre est grand, les calculs doivent être menés avec une prise en compte des forces d'attraction du Soleil, de la Lune et des autres planètes du système solaire. D'autre part, le mouvement des satellites de la Terre sur des orbites circulaires dépend également de l'hétérogénéité du champ de gravitation terrestre due aux écartements de la surface terrestre de la sphère ainsi qu'à la variation de la densité de la Terre (surtout dans ses couches supérieures).

Comme le montrent des calculs, la *troisième vitesse cosmique*, c'est-à-dire la vitesse à communiquer au projectile sur Terre pour qu'il disparaisse du système solaire, est

$$v_{\cos} \approx 16{,}7 \text{ km/s}. \tag{80.7}$$

De façon approchée elle peut être calculée ainsi. Notons avant tout que $v_p = v_{cr}\sqrt{2}$, ce qui découle de la confrontation de (80.2) et (80.5), la vitesse parabolique étant de $\sqrt{2}$ fois plus grande que la vitesse circulaire. Il en serait de même pour la Terre ou, plus précisément, pour un corps décrivant l'orbite terrestre qu'on considère comme circulaire. Si l'on arrivait à placer un projectile sur l'orbite coïncidant avec l'orbite terrestre, il la parcourra avec la vitesse de la Terre par rapport au Soleil v_0 égale à peu près à 30 km/s (29,76 km/s). Il lui faut donc communiquer en plus la vitesse

$$v_0(\sqrt{2}-1), \tag{80.8}$$

pour qu'il quitte le système solaire. Autrement dit, il faut communiquer à ce projectile l'énergie cinétique

$$\frac{mv_0^2}{2}(\sqrt{2}-1)^2 \tag{80.9}$$

dans le système des coordonnées en mouvement sur l'orbite de la même façon que la Terre (m est la masse du projectile). Mais pour éloigner le projectile du champ d'attraction de la Terre, il lui faut communiquer la vitesse

$$v_p = \sqrt{2g_0r_0} \approx 11{,}2 \text{ km/s}$$

ou l'énergie cinétique

$$\frac{mv_p^2}{2}, \tag{80.10}$$

qui sera dépensée à vaincre la résistance de l'attraction terrestre. Par conséquent, en communiquant au projectile la vitesse $v_{\cos}$ par rapport à la Terre ou l'énergie cinétique

$$\frac{mv_{\cos}^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}(\sqrt{2}-1)^2 + \frac{mv_p^2}{2}, \tag{80.11}$$

on l'obligera à quitter le système solaire. De (80.11) il suit :

$$v_{\cos}^2 = v_0^2(\sqrt{2}-1)^2 + v_p^2. \tag{80.12}$$

En y portant les valeurs numériques, il vient : $v_{\cos} \approx 16{,}75$ km/s.

Il s'ensuit de cet examen que les lois du mouvement des planètes et, en général, des corps célestes sont identiques aux lois d'une pierre chutant ou lancée et elles décrivent la chute libre, c'est-à-dire le mouvement soumis à la seule action de la force de gravitation.

Les paramètres géométriques de l'orbite du satellite peuvent être calculés une fois connues la hauteur $\rho_0 = R_T + h$ (distance du centre de la Terre) et la

vitesse v_0 au point de lancement (fig. 220). Pour cela, il est commode de représenter les lois de conservation (79.4) et (79.6) en coordonnées polaires:

$$m\rho^2\dot{\varphi} = N, \tag{80.13}$$

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{m(\rho\dot{\varphi})^2}{2} - \frac{mgR_T^2}{\rho} = E, \tag{80.14}$$

ρ et φ sont ici le rayon et l'angle polaires, E et N l'énergie totale et le moment cinétique du satellite par rapport au centre de la Terre O, $mgR_T^2 = \gamma\, mM_T$.

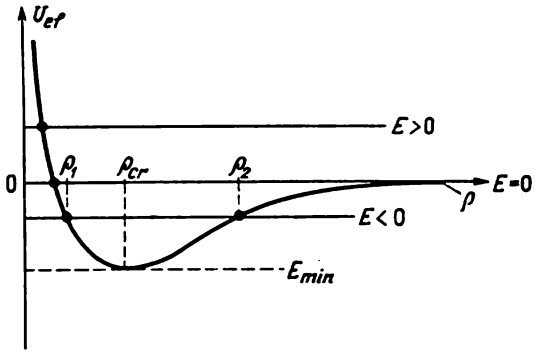


Fig. 220a

La première équation autorise d'éliminer $\dot{\varphi}$ et d'écrire le principe de la conservation de l'énergie en fonction de la seule coordonnée:

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{N^2}{2m\rho^2} - \frac{mgR_T^2}{\rho} = E. \tag{80.15}$$

La partie de l'énergie totale de l'équation (80.15) qui dépend de la coordonnée ρ est appelée *énergie potentielle effective*:

$$U_{eff} = \frac{N^2}{2m\rho^2} - \frac{mgR_T^2}{\rho}.$$

En posant la composante radiale de la vitesse $\dot{\rho} = 0$, on obtient la condition déterminant les limites du mouvement du satellite suivant la coordonnée ρ:

$$U_{eff} = E. \tag{80.16}$$

La condition (80.16) a été illustrée sur le diagramme énergétique (fig. 220, *a*) pour des valeurs différentes de l'énergie totale.

Pour $E \geqslant 0$, la courbe U_{eff} et la droite $E =$ const se coupent en un point. Cela correspond à des orbites hyperboliques et paraboliques se réduisant à une seule (minimale) valeur du rayon polaire.

Pour $E_{min} < E < 0$, on a deux points d'intersection correspondant au rapprochement minimal ρ_1 (périgée) et à l'éloignement maximal ρ_2 (apogée) du satellite du centre de la Terre dans son mouvement sur une orbite elliptique.

Pour $E = E_{min}$, le mouvement du satellite s'effectue sur une orbite circulaire de rayon $R = \rho_{cr}$.

Au cas d'orbites elliptiques $E < 0$, et la condition (80.16), qui définit les limites du mouvement, peut être transcrite sous forme d'une équation quadratique

$$\rho^2 - \frac{mgR_T^2}{|E|}\rho + \frac{N^2}{2m|E|} = 0.$$

Les racines ρ_1 et ρ_2 de cette équation, en conformité avec le théorème de Viète, donnent

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{mgR_T^2}{|E|} = 2a, \quad \rho_1\rho_2 = \frac{N^2}{2m|E|} = b^2,$$

où a et b sont le demi grand axe et le demi petit axe de l'orbite elliptique. Les paramètres de l'orbite s'expriment en coordonnées polaires au moyen de a et b suivant les formules connues: $p = b^2/a$, $\varepsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2}$.

Ainsi donc les paramètres géométriques de l'orbite (a, b ou p, ε) s'avèrent liés aux constantes mécaniques du mouvement (N et E) par des égalités élémentaires.

Afin d'orienter dans chaque cas particulier la position de l'orbite par rapport au centre de la Terre O et du point de lancement B, il faut déterminer la direction du grand axe de l'ellipse. Pour cela il faut résoudre l'équation de l'ellipse transcrite en coordonnées polaires par rapport au cosinus de l'angle polaire (l'axe polaire étant considéré confondu avec la direction du grand axe de l'orbite):

$$\cos\varphi = \frac{p - \rho}{\varepsilon\rho}.$$

Si p et ε sont donnés, en portant dans cette égalité $\rho = \rho_0$, on détermine l'angle polaire φ_0 du point de lancement B et, partant, la direction de l'axe de l'orbite (fig. 220).

En vertu de (79.6) et (79.7) l'élément d'aire dS balayé par le rayon-vecteur durant le temps dt est égal

$$dS = \frac{N}{2m}\,dt.$$

En intégrant cette égalité sur l'aire de l'orbite, on obtient le temps de révolution du satellite:

$$T = \frac{2m}{N}S = 2\pi\frac{m}{N}ab.$$

Les démonstrations et les formules élémentaires présentées permettent de résoudre les problèmes simples du mouvement des satellites sur des orbites balistiques quelconques.

DEUXIÈME PARTIE

MÉCANIQUE DES CORPS DÉFORMABLES

CHAPITRE X

MÉCANIQUE DES CORPS SOLIDES DÉFORMABLES

§ 81. NOTION DE CORPS ÉLASTIQUE. FORCES ET DÉFORMATIONS À LA TRACTION

Avec la variation des forces agissant sur le corps, la forme du corps se modifie et on dit que le corps solide *se déforme*. En étudiant les lois de la mécanique des corps solides, on avait admis que les corps ne se déformaient pas ou que les déformations étaient si petites qu'elles n'exercent aucune influence sur le mouvement du corps. Mais dans nombre de problèmes de mécanique il est nécessaire de connaître les lois reliant l'action des forces sur le corps aux déformations qu'elles engendrent ; ce sont ces lois qu'on étudiera maintenant dans ce chapitre.

Notons avant tout qu'il y a toujours déformation du corps quand ce dernier est soumis à des forces indépendamment du fait que le corps soit au repos (statique) ou, soit à l'état de mouvement non uniforme (dynamique) (voir § 92). Par exemple, à chaque bout d'une règle sont appliquées deux forces de traction, égales et opposées ; avec l'accroissement de ces forces, la règle s'allonge, la distance entre les différentes particules de la règle grandit, la règle se déforme. Avec l'accroissement des forces appliquées aux bouts de la règle, la distance entre toutes les particules isolées grandit.

Maintenant supposons que la même règle ne soit sollicitée par la force qu'à un bout. Sous l'action de cette force, la règle sera entraînée dans un mouvement accéléré et pour la même raison elle sera sujette à des déformations. Toutefois la nature des déformations sera différente du cas précédent. Les déformations y étaient les mêmes dans tous les tronçons de la règle homogène, tandis qu'ici, les différents tronçons de la règle homogène se déformeront de façon variable : les parties proches de l'extrémité sollicitée par la force seront plus allongées que celles qui en sont éloignées.

De façon schématique, on peut se représenter la déformation de la règle comme une déformation du modèle de la figure 221, com-

posé de masses séparées (« particules du corps ») réunies par des ressorts. Quand on applique une force extérieure à la masse extrême toute la chaîne s'anime d'un mouvement accéléré ; les forces agissant sur les ressorts successifs diminuent d'un ressort à l'autre. La force qui allonge un ressort communique une accélération à toutes les masses entraînées derrière lui, les déformations des ressorts sont

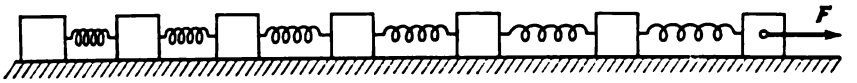


Fig. 221

donc différentes. Pour la même raison les allongements des différents tronçons de la règle homogène seront variés. Les forces engendrées entre les différentes parties du corps déformé sont dites *forces intérieures* ou *efforts* pour les différencier des forces extérieures.

Ces exemples montrent qu'au cours de l'analyse des déformations on n'est pas en droit de faire glisser la force le long de la ligne d'action, comme on le faisait avec un corps parfaitement rigide.

Les déformations seront complètement différentes suivant que la force est appliquée à la première masse (voir fig. 221) ou, par exemple, à la troisième.

Les déformations varient avec la modification des forces appliquées ou des charges ; les forces constantes entraînent, en général, des déformations invariables ou constantes.

Les lois liant les forces aux déformations sont dans le cas général très complexes et cela non seulement parce que les unes comme les autres se répartissent dans les différentes parties du corps de façon compliquée, mais également parce que la liaison entre les forces et les déformations n'est pas univoque et dépend de la grandeur et de la nature des variations des forces appliquées ainsi que d'autres causes.

Ce n'est que dans un corps *élastique* et pour une *certaine* marge de variations des grandeurs des forces (extérieures et intérieures et des déformations que les forces déterminent de façon *univoque* les déformations et, réciproquement [1].

Pour éclaircir les lois liant la force à la déformation, étudions la plus simple des déformations, la traction (ou la compression) d'une barre (cylindre) homogène suivant son axe.

---

[1] Il serait, peut-être, plus correct de parler non pas d'un corps élastique, mais d'une *zone élastique* du corps, où par le terme « zone » on entend l'ensemble des conditions pour lesquelles le corps considéré se comporte comme un corps élastique. Mais comme cette terminologie n'est pas généralement admise, on ne s'en servira pas.

Analysons l'effet des expériences de traction sur une longue barre ou un fil d'acier (fig. 222). Si le matériau de la barre est homogène, tous les morceaux identiques de la barre, qu'on peut toujours obtenir en tout lieu de la barre s'allongeront de la même façon, quelle que soit la charge. La barre subira une déformation de traction uniforme qu'on peut caractériser par un *allongement relatif* ε :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_1}{l_1}, \qquad (81.1)$$

où Δl_1 est l'allongement d'un segment quelconque de la barre dont la longueur initiale était l_1. Pour tout segment, y compris pour tout le fil, la grandeur ε est la même et, est fonction de la force de traction F. L'action de la force F engendrera dans la barre des forces intérieures, des efforts s'exerçant mutuellement sur les différentes parties de la barre. Découpons en pensée un morceau quelconque de la barre (fig. 223) et étudions les conditions de son équilibre. Des conditions d'équilibre il découle que les forces appliquées aux bouts de ces morceaux et émanant des parties voisines de la barre sont mutuellement égales et opposées. Comme c'est le cas pour tout segment de la barre, en toute section transversale de la barre sont engendrés des efforts égaux à F.

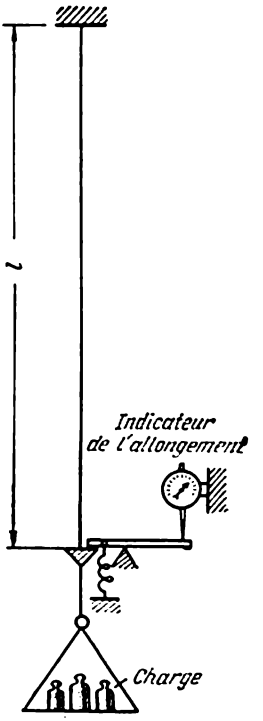


Fig. 222

L'effort F peut être représenté comme une force s'appliquant à la surface de la section transversale, c'est-à-dire comme une force de « surface ». Si le matériau est *homogène*, on peut considérer que l'effort est *uniformément* distribué tout au long de la surface de la

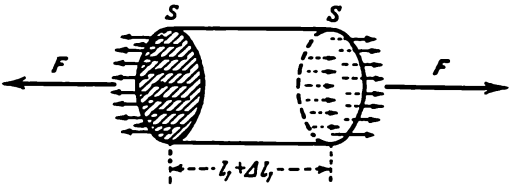


Fig. 223

section transversale. La grandeur de l'effort s'exerçant sur l'unité de surface de la section transversale est appelée *tension* (contrainte) et est notée par σ. La tension σ engendrée dans une barre en traction

est égale à

$$\sigma = \frac{F}{S}, \tag{81.2}$$

où S est l'aire de la section transversale de la barre. Comme le montre l'expérience, la déformation relative ε se définit à l'aide de la tension σ.

Augmentons progressivement la force de traction F, ou la tension σ, et notons l'allongement de la barre, ou la déformation relative ε. Sur la base de ces expériences construisons le diagramme de dépendance entre la tension σ et la déformation ε, montré à la figure 224.

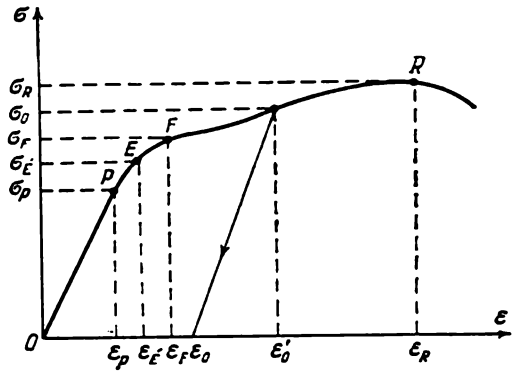


Fig. 224

Pour les efforts relativement faibles il y a *proportionnalité* entre la déformation ε et la tension σ. Cela dure jusqu'au point P. Ensuite, les déformations s'accentuent, la courbe se replie vers l'axe des déformations ε et, à partir du point F, la courbe, tout au long d'un certain secteur, suit même à peu près parallèlement l'axe de déformation, la tension n'augmentant presque pas, tandis que la déformation continue à croître. Le domaine des déformations (ou des tensions) correspondant au secteur de la courbe débutant à partir du point F est appelé *domaine de fluidité* ou *domaine des déformations plastiques*. Puis avec l'augmentation des déformations ε, la courbe des tensions croît faiblement, atteint au point R le maximum, puis diminue et s'arrête. Le bout de la courbe correspond à la rupture de la barre; il est évident que la rupture se produit après que la force de traction ait atteint la grandeur $F = \sigma_R F$ correspondant à la tension maximale σ_R.

Une fois obtenu le diagramme $\sigma(\varepsilon)$, prenons un second échantillon du même matériau et exécutons les expériences dans l'ordre suivant: on augmente progressivement la charge de l'échantillon jusqu'à une certaine tension σ. Ensuite on diminue la charge en notant continûment les valeurs correspondantes des tensions et des déformations. Ces expériences montrent une dépendance *univoque* entre

la force et la déformation. Si la courbe σ (ε) obtenue en chargeant l'échantillon coïncide avec la courbe de la décharge de l'échantillon, la déformation détermine univoquement la tension et, réciproquement. Ces expériences seront répétées plusieurs fois en augmentant chaque fois la valeur de la tension maximale après quoi on commence à décharger. On s'aperçoit bientôt, qu'après une certaine valeur maximale σ_E (voir fig. 224) les courbes de charge ne correspondront plus aux courbes de décharge ; pour la décharge, on obtiendra des valeurs de déformations supérieures et, une fois l'échantillon déchargé, les déformations ne seront plus nulles, il restera dans la barre des *déformations* dites *résiduelles* (*permanentes*).

Le domaine de petites valeurs des déformations et des tensions correspondant au secteur $O - \sigma_E$ sur la courbe tension — déformation est le domaine des *déformations élastiques* du matériau donné, l'acier. C'est seulement pour des déformations inférieures à ε_E que la barre en acier se conduit comme un corps élastique. Entre les valeurs σ_P et σ_F se situe le point correspondant au *seuil d'élasticité* en traction de l'échantillon étudié ou, plus précisément, du matériau soumis à l'épreuve, le point E (σ_E, ε_E) sur la figure 224.

Le corps n'est élastique que pour des déformations n'ayant pas dépassé le seuil d'élasticité du matériau considéré. C'est seulement dans la zone des déformations élastiques ou, tout simplement dans la zone élastique, que la liaison entre la tension et la déformation est univoque.

Remarquons que dans le mode décrit de détermination de la grandeur du seuil d'élasticité, les valeurs de σ_E et ε_E dépendent essentiellement de la précision des mesures des forces et des déformations dans l'expérience. Pour une moindre précision et des expériences grossières on obtiendra, pour un même matériau, des valeurs de σ_E et ε_E supérieures. C'est pourquoi dans les laboratoires d'essai des matériaux il est convenu de prendre la limite d'élasticité à la tension qui, une fois levée, donne une déformation résiduelle ne constituant qu'une petite fraction déterminée de la déformation enregistrée, par exemple, 0,1 %.

Le secteur de démarrage de la courbe σ (ε) (voir fig. 224) est une ligne droite ; dans ce secteur la dépendance, à peu près jusqu'au point P, entre la tension et la déformation est traduite par une simple loi de proportionnalité directe :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon ; \qquad (81.3)$$

cette dépendance porte le nom de *loi de Hooke*. Le coefficient de proportionnalité constant E, dont la dimension est N/m² ou N/mm², est appelé *module de Young* et constitue une des caractéristiques essentielles du matériau considéré (dans nombres de manuels et ouvrages de référence le module de Young est donné en unités kgf/mm²). Le domaine où joue la loi de Hooke s'appelle *domaine de proportionnalité*, tandis que les grandeurs σ_P et ε_P, jusqu'auxquelles la déformation suit la loi de Hooke, sont dites *seuils de proportionnalité*.

Pour l'acier, le seuil de proportionnalité est très rapproché du seuil d'élasticité, mais, en général, ils peuvent ne pas coïncider.

Le secteur de la courbe déformation — tension se situant au-delà du seuil d'élasticité est habituellement appelé *domaine des déformations plastiques*, où le corps éprouvé est dans ces conditions un corps inélastique (mou).

Si la grandeur de la déformation atteint une certaine valeur ε_0' située dans le domaine des déformations plastiques, à laquelle la charge est levée, on constate que cette déformation s'abaisse quelque peu comme on l'a montré de façon approchée sur la figure 224. Pour un corps complètement déchargé, la déformation résiduelle (permanente) ε_0 est à peu près de la même grandeur que ε_0'. Les déformations résiduelles sont presque égales aux déformations initiales du domaine plastique. On distingue habituellement dans ce domaine deux points caractéristiques : le seuil de fluidité (point F, ou σ_F) et le seuil de résistance (point R, ou σ_R). Une fois atteint le seuil de fluidité, le matériau commence à couler ; cela signifie que la tension restant inchangée, les déformations continuent à croître. Le seuil de résistance σ_R marque la tension maximale pour laquelle l'échantillon échappe encore à la rupture ; en dépassant ce seuil on provoque la rupture de l'échantillon essayé.

Les déformations en traction ou en compression d'une barre sont élémentaires. Un cube découpé en pensée dans cette barre devient dans cette déformation un parallélépipède. Cette transformatione modifie également la section transversale du cube, comme la barre toute entière : la section transversale diminue en traction et augmente en compression, cela découlant des mesures effectuées au cours des expériences.

La diminution du diamètre en traction se constate facilement en étirant un tube en caoutchouc sur lequel on a monté préalablement un anneau métallique serré. Si on étire le tube maintenu verticalement, l'anneau, pour un certain étirement, descend vers le bas (fig. 225). La même expérience peut être reprise avec une barre métallique sur une installation pour rupture des barres (voir plus bas fig. 228).

L'expérience montre que la diminution de la section transversale est proportionnelle à l'allongement de déformation ε. Si l'on désigne le raccourcissement relatif de l'arête limitant la face transversale[1] du cube (fig. 226) par ε_t, alors

$$\varepsilon_t = \mu\varepsilon, \tag{81.4}$$

où μ est le *module de compression transversale* ou le *coefficient de Poisson*. Le module de compression transversale est une caractéristique déterminée des propriétés élastiques du matériau, comme le module de Young.

[1] La face sollicitée par une tension en traction normale.

Des raisonnements élémentaires permettent de conclure que le module de compression transversale d'un matériau isotrope et homogène μ ne peut dépasser 1/2.

Supposons qu'un cube d'arête a découpé dans une barre ait avant la traction le volume a^3 (voir fig. 226). Si les arêtes du cube

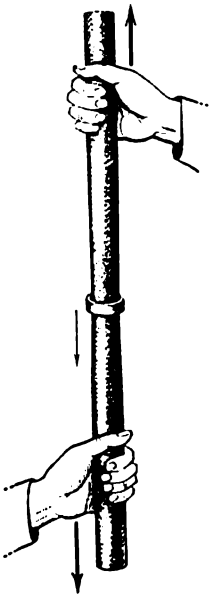


Fig. 225

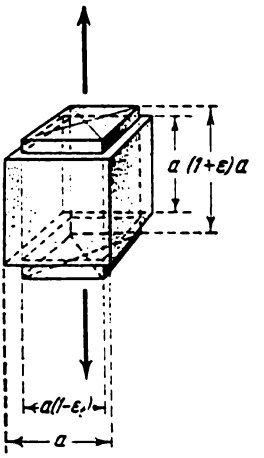


Fig. 226

sont parallèles à l'axe de la barre, après la déformation le volume sera

$$a^3 (1 + \varepsilon) (1 - \varepsilon_t)^2 = a^3 (1 + \varepsilon) (1 - \mu\varepsilon)^2 =$$
$$= a^3 (1 + \varepsilon - 2\mu\varepsilon + \mu^2\varepsilon^2 - 2\mu\varepsilon^2 + \mu^2\varepsilon^3). \quad (81.5)$$

Le volume ne pouvant diminuer en traction, il vient

$$\varepsilon (1 - 2\mu) + \text{des grandeurs très petites} \geqslant 0; \quad (81.6)$$

de là, considérant que $\varepsilon > 0$ et en négligeant les grandeurs petites, il vient

$$\mu \leqslant 1/2. \quad (81.7)$$

§ 82. NATURE DES PHÉNOMÈNES DANS UN CORPS DÉFORMÉ. PROPRIÉTÉS DES MATÉRIAUX

Les processus physiques se déroulant dans des corps déformés et traduisant le lien entre les forces et les déformations sont très compliqués et nombre de problèmes en ce domaine sont jusqu'aujourd'hui insuffisamment éclairés.

Les phénomènes décrits plus haut au § 81 sont propres aux métaux. Comme le montrent les études radioscopiques, à l'état ordinaire, les métaux sont constitués d'une réunion de petits cristaux distribués chaotiquement relativement l'un à l'autre. Il est connu que dans les cristaux les atomes se disposent dans un ordre déterminé en formant un réseau cristallin. Par exemple, le réseau cristallin de l'aluminium est constitué d'un ensemble de mailles serrées les unes aux autres. Chaque maille du réseau forme un cube au sommet duquel se disposent les atomes, le centre de chaque face du cube portant encore un atome. Cette structure du réseau cristallin porte le nom de réseau cubique à faces centrées.

Il est évident que si l'échantillon du matériau était constitué d'un seul cristal (monocristal) ses propriétés élastiques seraient, en

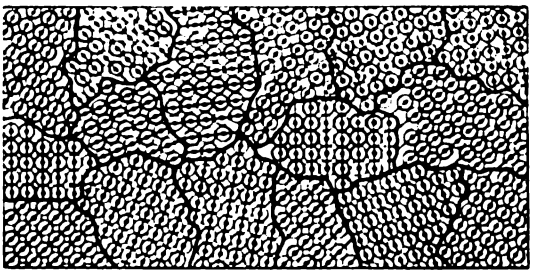


Fig. 227

général, différentes pour les diverses directions. De tels corps sont dits *anisotropes*. Or, en réalité les petits cristaux du métal se répartissent de façon désordonnée et s'orientent différemment l'un par rapport à l'autre, à peu près de la manière représentée à la figure 227. Il s'ensuit que les propriétés élastiques du métal sont les mêmes suivant toutes les directions et le métal constitue un *corps isotrope*. Dans une déformation plastique du monocristal on observe un *glissement* le long de certains plans bien déterminés. Les éléments du cristal se déplacent le plus facilement l'un par rapport à l'autre le long de ces *plans de glissement* et occupent cette position après la levée de la charge. Le même phénomène se produit au cours des déformations plastiques avec les petits cristaux constituant le corps.

L'image des déformations dans le métal est grossièrement la suivante. Dans la zone des déformations élastiques les petits cristaux modifient leur forme sans se rompre. Et, la charge une fois levée, ils reviennent à l'état primitif. Dans la zone des déformations plastiques, outre des modifications de forme des cristaux, il se produit en leur sein des glissements, ainsi que des déplacements mutuels et des ruptures. Ces modifications ne disparaissent plus une fois la charge levée et le corps reste déformé ; on y voit apparaître des déformations permanentes.

Les déformations plastiques jouent un rôle essentiel en technologie: l'estampage, la flexion, le forgeage deviennent possibles grâce aux déformations plastiques. Il est évident que si le métal ne possédait que des déformations élastiques, on n'aurait pu rien fabriquer par les procédés mentionnés.

Notons que l'échantillon, poussé aux déformations de la zone plastique et déchargé, acquiert, en général, des propriétés élastiques modifiées. Si on le charge de nouveau, on s'aperçoit que la limite de proportionnalité s'est accrue. C'est ainsi que le fil en acier subit au cours de la fabrication un usinage (tréfilage) qui élève dans une grande mesure sa résistance par rapport à la résistance de l'acier de même marque.

Les propriétés mécaniques des métaux ainsi que d'autres matériaux se déterminent des essais en traction des barres de dimensions et de formes fixées et ayant subi un traitement approprié. La traction est effectuée sur des installations spéciales d'essai des matériaux (fig. 228), fonctionnant habituellement suivant le principe de la presse hydraulique. La force de traction est évaluée d'après la pression du piston dans le cylindre, tandis que le déplacement du piston, mesuré avec un instrument précis, permet de fixer la déformation de la barre.

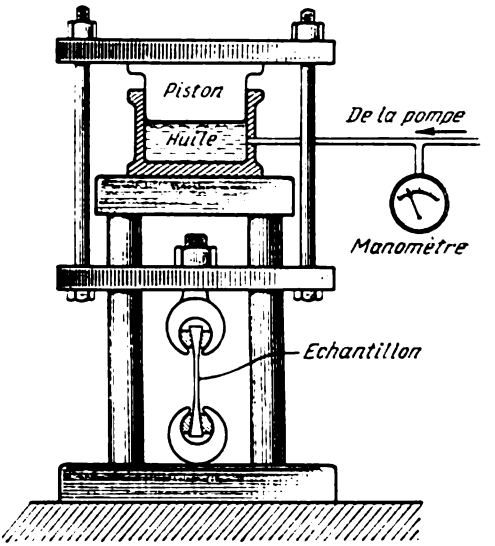


Fig. 228

En principe, le même procédé permet de déterminer la dépendance entre les déformations et les tensions en compression des barres, seulement dans ce but on choisit des barres plus courtes et plus épaisses afin d'éviter la flexion (flambage) de la barre au cours de la compression. Pour les métaux en compression le module de Young a la même valeur qu'en traction; on a donné sur la figure 229, *a* la courbe caractéristique de la déformation — tension pour l'acier ordinaire. En compression la limite de proportionnalité est d'une autre grandeur qu'en traction et la nature de la courbe dans la zone des déformations plastiques est un peu différente.

Pour les autres matériaux la courbe déformation — tension a, en général, une allure complètement différente. Ainsi, par exemple, pour la fonte elle a l'allure montrée à la figure 229, *b*. Pour la fonte la zone des déformations plastiques en traction disparaît

presque complètement. Le seuil d'élasticité atteint, on passe avec la fonte à la zone de fluidité très peu apparente et puis, aussitôt, commence la rupture de l'échantillon. Les matériaux possédant un diagramme σ (ε), analogue au diagramme de la fonte, sont appelés matériaux *fragiles*, pour les différencier des matériaux visqueux (tenaces) tel l'acier et qui possèdent une grande zone de déformations plastiques. Cette différence entre les propriétés des matières visqueuses et fragiles est très importante pour l'utilisation pratique

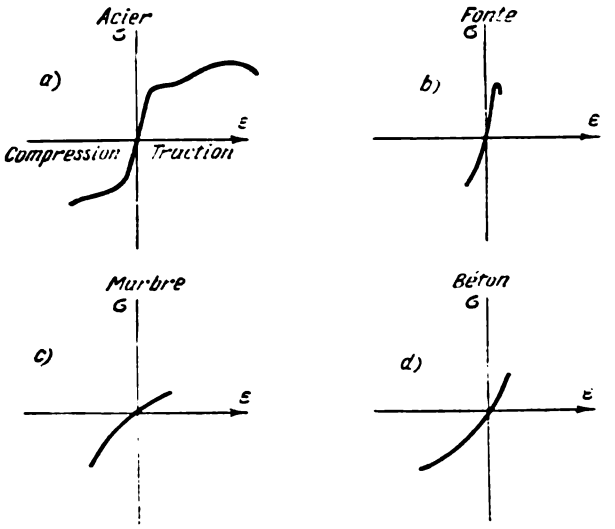


Fig. 229

de telle ou telle matière. Si au cours du fonctionnement d'une machine la tension dépasse en certains endroits le seuil d'élasticité, cela n'entraînera pas le bris de la machine confectionnée en matière tenace, tandis qu'au contraire, une machine en matière fragile se cassera.

Notons que pour la fonte soumise à la compression la zone de proportionnalité est presque insensible et la dépendance de la déformation de la tension, même à de petites valeurs de ε, n'est plus linéaire. A titre de comparaison on a donné pour quelques matières sur la figure 229, *c* et *d* des courbes de dépendance de la tension de la déformation. Des matières aussi fragiles que le marbre, le béton « travaillent », comme l'on s'exprime en technique, beaucoup mieux à la compression qu'à la traction, c'est-à-dire qu'elles présentent des seuils de résistance plus élevés en compression qu'en traction.

C'est seulement en connaissant les propriétés élastiques des matériaux qu'on est en état de construire des machines, des édifices, etc. suffisamment solides et d'encombrement minimal.

§ 83. FORCES INTÉRIEURES ET TENSIONS

Les efforts et les tensions dans tout corps solide sollicité par des forces extérieures peuvent acquérir une représentation nette, si l'on en sépare par la pensée une quelconque de ses parties. Sur cette partie « séparée » agiront de la part des autres parties des forces, ou à la surface de la partie séparée se manifesteront des tensions. Les tensions doivent toujours remplir certaines conditions découlant du fait que les forces appliquées au volume ainsi dégagé doivent s'annuler au cas de repos ou être égales au produit de la masse de

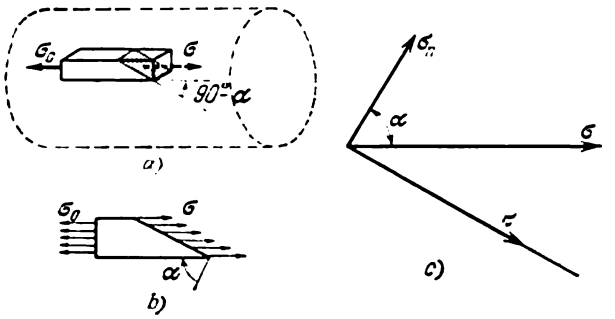


Fig. 230

ce volume par l'accélération, au cas de mouvement; de plus, des conditions analogues doivent être satisfaites relativement aux moments de ces forces. Ainsi donc si l'on considère les projections des forces et des moments sur trois axes des coordonnées, on obtient *six* équations auxquelles doivent satisfaire les forces agissant sur le volume considéré: trois, pour les projections des forces et trois, pour les moments par rapport aux trois axes. Ces conditions ne dépendent aucunement de la déformation et ont le même aspect aussi bien pour la zone des déformations élastiques que plastiques.

Etudions la tension dans le cas le plus simple de traction d'une barre homogène. Supposons qu'on y ait découpé un morceau en forme de prisme de manière que sa base soit perpendiculaire à l'axe de la barre (fig. 230, *a*). Dans ce cas sur les quatre faces du prisme les tensions seront nulles et, seule sa base sera sollicitée par des tensions σ_0 égales et dirigées en sens opposés ainsi que normales à cette base. Elles sont

$$\sigma_0 = \frac{F}{S}, \tag{83.1}$$

où F est l'effort subi par la section transversale et S, l'aire de la section transversale de la barre. Si la barre est homogène, les tensions σ_0 seront égales tout au long de la section transversale de la barre et identiques pour toute section transversale de la barre au repos.

Dans le cas général la tension est dirigée au sein du corps solide sous un certain angle par rapport au secteur de la surface auquel elle est appliquée. Dans le cas considéré, on peut supposer dégagé un volume d'un autre genre; par exemple, celui obtenu après avoir coupé le prisme par un plan dont la normale forme un angle α avec l'axe de la barre (fig. 230, *b*). Dans ce cas la tension dans la section oblique du prisme ne sera plus σ_0; en outre σ sera dirigé suivant l'axe de la barre et sous $90° - \alpha$ à l'élément de surface de la section oblique. La grandeur de α est évaluée sur la base des conditions d'équilibre du volume dégagé. Il est évident que les forces appliquées au volume dégagé sont égales et opposées; d'où

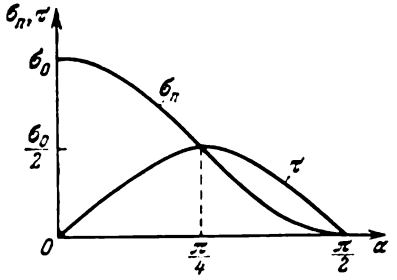


Fig. 231

$$\sigma_0 S = \sigma \frac{S}{\cos\alpha},$$

ou

$$\sigma = \sigma_0 \cos\alpha, \tag{83.2}$$

où S est l'aire de la section normale du prisme.

La tension σ a une composante normale à la surface de la section σ_n et une composante tangentielle τ (fig. 230, *c*). La composante normale est

$$\sigma_n = \sigma \cos\alpha = \sigma_0 \cos^2\alpha, \tag{83.3}$$

tandis que la composante tangentielle est

$$\tau = \sigma \sin\alpha = \sigma_0 \cos\alpha \sin\alpha. \tag{83.4}$$

Elles sont fonction de l'angle α entre la normale à l'élément de surface de la section et l'axe de la barre. En choisissant sous des angles α différents des éléments de surface de la section, on obtiendra, en accord avec les formules (83.2), (83.3) et (83.4), des valeurs différentes de la tension. La composante tangentielle acquerra la plus grande valeur, égale à $\sigma_0/2$, dans le cas où l'angle entre l'élément de surface de la section et l'axe de la barre est de 45°; la composante normale dans ce cas est évidemment égale à la tangentielle (fig. 231).

Ainsi cette analyse de l'état de tension du corps solide dans le cas le plus simple d'une traction permet de se représenter à quel point est compliquée l'image des tensions dans un corps solide dans le cas général.

§ 84. TENSIONS ET DÉFORMATIONS AU CISAILLEMENT

Une déformation de cisaillement pure a lieu, par exemple, pour une torsion de barre ronde homogène quand un pied de la barre s'enroule autour de l'axe de la barre de l'angle φ par rapport à l'autre pied. La déformation produite peut être suivie de façon imagée en tordant un rouleau en caoutchouc (ou un tube) sur la

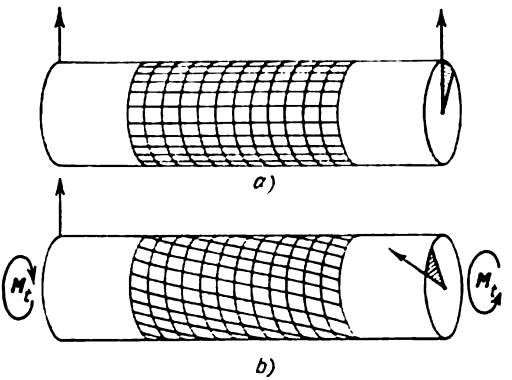


Fig. 232

surface duquel on a préalablement tracé un treillis de lignes orthogonales (fig. 232, *a*). Dans cette torsion les lignes suivant la circonférence du cylindre ne modifient pas leur forme, tandis que les lignes parallèles à l'axe acquièrent une forme hélicoïdale (fig. 232, *b*).

Le rouleau peut être divisé mentalement en des disques suffisamment minces pour pouvoir assimiler dans la torsion le segment de ligne hélicoïdal à une portion de droite. Découpons dans le disque un anneau et dans l'anneau un petit cube (voir plus bas fig. 235, *b*). Comme le disque est très mince, dans la déformation du rouleau la face supérieure du cube se déplacera relativement à la face inférieure (les faces latérales sont inclinées), l'angle entre les faces latérales et la face du bas étant différent du droit. La déformation du cube est une *déformation de cisaillement pure* qui ne modifie que les angles du parallélépipède découpé de façon appropriée dans le corps déformé.

La déformation de cisaillement ne résulte que des tensions tangentielles sur les faces du parallélépipède. Supposons qu'on a un

corps en forme de cube, d'arête 1 cm, aux quatre faces duquel sont appliquées des forces tangentielles réparties de façon uniforme, comme c'est montré sur la figure 233, *a*. Il est évident que pour satisfaire aux conditions d'équilibre du cube il faut poser l'égalité de toutes les tensions tangentielles :

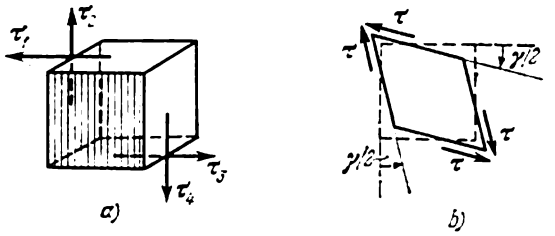


Fig. 233

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau.$$

Sous l'action des efforts tangentiels, les angles droits entre les faces correspondantes du cube diminuent d'un petit angle γ (fig. 233, *b*). La grandeur de la déformation du cube définie par l'angle γ est liée par un rapport causal aux tensions tangentielles τ sur les arêtes correspondantes du cube.

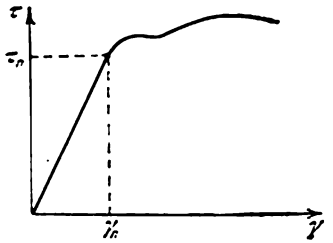


Fig. 234

Les expériences montrent que le lien entre γ et τ pour le matériau donné est à peu près analogue à la dépendance de ε de σ pour le même matériau (fig. 234). Dans la zone d'élasticité il y a également un secteur linéaire pour lequel

$$\tau = G\gamma. \tag{84.1}$$

Le coefficient G ayant la dimension de N/m² est appelé *module de cisaillement* (ou d'élasticité transversale).

Etablissons maintenant les déformations et les forces engendrées dans la torsion d'une barre de section circulaire ; on a déjà effleuré ces déformations plus haut. Soit une barre de diamètre D et de longueur l_0 en matériau dont le module de cisaillement est G ; elle est tordue par le moment M_t de l'angle φ_0 (cela signifie que ses pieds ont tourné de φ_0 l'un par rapport à l'autre).

Notons avant tout que pour toute section de la barre perpendiculaire à l'axe le moment des forces intérieures par rapport à l'axe de la barre est M_t, le moment des forces tordant la barre. En effet, imaginons en pensée une portion quelconque B séparée du reste de la barre tordue (fig. 235, *a*) ; comme la portion B est au repos, les moments de toutes les forces qui la sollicitent sont nuls. A l'un des bouts, sur cette portion agit le moment des forces extérieures M_t, tandis qu'à l'autre, agit le moment des forces intérieures M_i' *tangentes* à la section ; la grandeur de M_i' est égale à M_t et lui est opposée en signe.

Déterminons ensuite comment sont réparties les tensions tangentielles au sein de la section de la barre et quel est le mode de leur liaison avec la déformation. Découpons dans la barre un disque de hauteur suffisamment petite dl à la distance l du pied fixe et posons que la face inférieure de ce disque a tourné de l'angle φ et la face supérieure de $\varphi + d\varphi$. Découpons dans ce disque un anneau de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + dr$ (fig. 235, *b*). Alors, tous les cubes découpés dans l'anneau auront la même déformation de cisaillement du même angle $d\alpha$. Comme la face supérieure du disque a pivoté sans se déformer

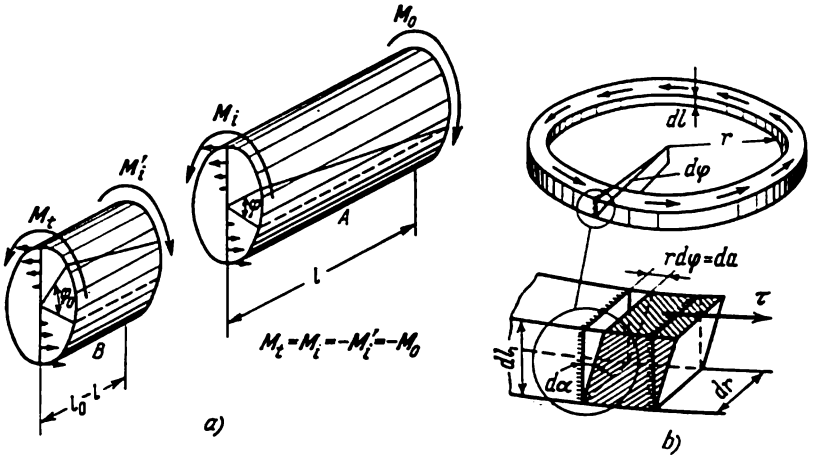


Fig. 235

d'un petit angle $d\varphi$ par rapport à la face inférieure, l'angle de cisaillement $d\alpha$ sera évidemment proportionnel au rayon de l'anneau r. Le déplacement de la surface supérieure de l'anneau par rapport à la surface inférieure sera

$$da = dl\, d\alpha = r\, d\varphi. \tag{84.2}$$

Donc l'angle de cisaillement

$$d\alpha = r\,\frac{d\varphi}{dl}, \tag{84.3}$$

ou l'angle de cisaillement de l'anneau est égal au rayon de l'anneau multiplié par la dérivée de l'angle de torsion $\frac{d\varphi}{dl}$. Déterminons maintenant l'effort tangentiel à la surface de l'anneau ayant pour aire $2\pi\, r\, dr$; la tension τ d'après les formules (84.1) et (84.3) est

$$\tau = G\, d\alpha = Gr\,\frac{d\varphi}{dl}, \tag{84.4}$$

donc la force à la surface de l'anneau est

$$\tau \cdot 2\pi r\, dr = 2\pi r^2 G\,\frac{d\varphi}{dl}\, dr. \tag{84.5}$$

Le moment de cette force par rapport à l'axe de la barre est

$$dM = 2\pi r^3 G\,\frac{d\varphi}{dl}\, dr. \tag{84.6}$$

Maintenant additionnons les moments des forces sur toute la surface du disque, ou intégrons (84.6) en r:

$$M = 2\pi G \frac{d\varphi}{dl} \int_0^{D/2} r^3\, dr = \frac{\pi D^4}{2^5} G \frac{d\varphi}{dl}. \tag{84.7}$$

Ce moment doit être égal à M_t tordant la barre, car les moments appliqués à deux disques voisins quelconques sont mutuellement égaux.

L'équation (84.7) montre qu'au cas où la barre est homogène la dérivée de l'angle de torsion $\frac{d\varphi}{dl}$ le long de la barre est constante. L'angle de torsion des sections d'about, se trouvant à la distance l_0 l'une de l'autre, est

$$\varphi_0 = l_0 \frac{d\varphi}{dl}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\varphi_0}{l_0}. \tag{84.8}$$

Portant l'expression (84.8) dans la formule (84.7) on obtient la dépendance de l'angle de torsion de la barre φ_0 du moment de torsion M_t sous la forme suivante:

$$M_t = M_0 = \frac{\pi D^4}{2^5} G \frac{\varphi_0}{l_0}. \tag{84.9}$$

La grandeur $\frac{\pi D^4 G}{32 l_0}$ est appelée *coefficient de rigidité de la barre en torsion.*

Dans la transmission par des arbres du couple de torsion il faut choisir un diamètre D suffisamment grand de l'arbre, afin d'éviter des torsions indésirables de l'arbre.

§ 85. TENSIONS DANS UN CORPS ÉLASTIQUE. CAS GÉNÉRAL

Les exemples examinés dans les paragraphes précédents montrent que sur les différents éléments de surface passant par un point déterminé du corps chargé agissent des tensions variées mais liées mutuellement par des rapports de causalité. Dans le cas le plus général, quelque soit la charge, l'ensemble de toutes les tensions possibles se définit au voisinage du point (sur tous les éléments de surface au voisinage du point) par six grandeurs (nombres) constituant les composantes d'un tenseur symétrique de second ordre. Il est commode d'utiliser les tenseurs pour la description des tensions aussi bien que d'autres grandeurs physiques.

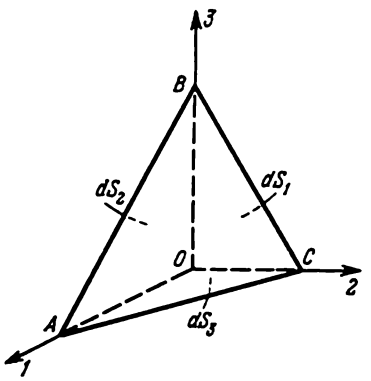


Fig. 236

Pour se représenter le lien entre les tensions existant sur les divers éléments de surface situés au voisinage du point considéré, on étudie l'équilibre d'un tétraèdre infiniment petit découpé dans le corps près de ce point. Supposons que l'origine du système des coordonnées rectangulaire est située au point considéré (fig. 236); notons par les chiffres *1*, *2*, *3* les axes et par des indices numériques

correspondants, les projections des vecteurs sur ces axes. L'élément de surface, la normale auquel est désignée par le vecteur unitaire $\mathbf{v}$, est situé près du point O en formant avec les plans des coordonnées le tétraèdre $ABCO$.

Les faces de ce tétraèdre sont soumises aux sollicitations émanant des autres parties du corps. Ecrivons les conditions d'équilibre du volume du tétraèdre dégagé sous l'action de ces forces.

Fig. 237

Notons au préalable que l'aire de la face ABC, égale à dS, est liée à dS_1, l'aire de la face normale à l'axe *1*, par l'égalité suivante: $dS_1 = \nu_1\, dS$, où ν_1 est le cosinus de l'angle formé par $\mathbf{v}$ et l'axe *1*. De façon analogue, $dS_2 = \nu_2\, dS$ et $dS_3 = \nu_3 dS$; dS_1, dS_2 et dS_3 sont ici les aires des faces du tétraèdre respectivement normales aux axes *1*, *2* et *3*.

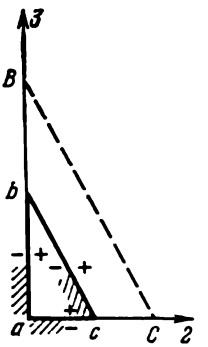


Fig. 238

Notons la force s'exerçant sur l'élément dS par $\sigma_\nu\, dS$, où σ_ν est la tension sur cet élément de surface (vecteur). Sur chaque élément de surface on peut distinguer deux efforts opposés: l'un est la somme des forces émanant des particules se trouvant d'un côté de l'élément de surface et appliquées aux particules situées de l'autre côté (par exemple, $\sigma\, dS$ de la figure 237, *a*) et le deuxième ($-\sigma dS$) est la réaction. Par condition, on distingue la face « positive » et la face « négative » de l'élément de surface.

On considérera dans nos équations les forces σdS comme agissant de la face positive vers la face négative. Notons que les efforts et les tensions peuvent être aussi bien de traction (fig. 237, *a*) que de compression (fig. 237, *b*); il va de soi qu'il s'agit de la composante normale de la sollicitation à l'élément de surface. Habituellement les tensions de traction normales sont considérées comme positives. La face positive des éléments de surface sur les plans de coordonnées est celle vers laquelle est dirigé le troisième axe, le vecteur unitaire de cet axe étant dirigé des moins vers les plus. La face positive de l'élément de surface dS est du côté externe du tétraèdre (voir fig. 238 où est montrée la section du tétraèdre par le plan abc normal à l'axe *1*).

L'équilibre de toutes les forces appliquées à la surface du tétraèdre sera réalisé à la condition

$$\sigma_\nu dS - \sigma_1 dS_1 - \sigma_2 dS_2 - \sigma_3 dS_3 = 0 \qquad (85.1)$$

(on tient compte du signe des tensions). Pour faire image, montrons sur la figure 239 les forces mises en œuvre dans le cas « plan », quand toutes les forces sont parallèles au plan (*1*, *2*); dans ce cas, au lieu du tétraèdre on a affaire à un prisme (dont on a tracé la section), et tous les vecteurs sont situés dans le plan. Il va de soi que l'équation (85.1) prend alors la forme

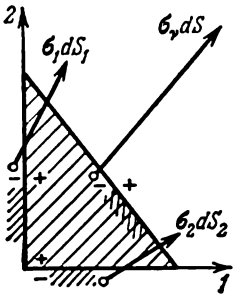


Fig. 239

$$\sigma_\nu dS - \sigma_1 dS_1 - \sigma_2 dS_2 = 0.$$

Il est possible de négliger les forces appliquées aux particules de l'intérieur du tétraèdre (forces dues à la masse), qui sont proportionnelles à la densité de la matière (forces de pesanteur, forces d'inertie), car le volume du tétraèdre est une grandeur infiniment petite de troisième ordre, tandis que la surface est une grandeur de second ordre.

Si l'on divise l'égalité (85.1) par dS, elle prendra la forme suivante :

$$\sigma_\nu = \nu_1\sigma_1 + \nu_2\sigma_2 + \nu_3\sigma_3, \qquad (85.2)$$

où ν_1, ν_2, ν_3 sont les cosinus directeurs de la normale à l'élément de surface dS. Cette expression est de forme analogue à l'expression

$$a_\nu = \nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \nu_3 a_3 = \nu a,$$

constituant la définition du vecteur ; a_1, a_2, a_3 étant les projections du vecteur, ses scalaires. Connaissant trois projections sur les axes des coordonnées, on définit la projection du vecteur sur toute direction ν.

La formule (85.2) peut servir de définition d'un tenseur de second ordre : trois vecteurs σ_1, σ_2, σ_3 définissent le vecteur σ_ν qui est la tension sur tout élément de surface à la normale ν. La tension au voisinage du point sur tout élément de surface à normale ν est connue si sont donnés trois vecteurs de tensions sur trois éléments de surface normaux aux axes des coordonnées. Trois vecteurs, c'est un ensemble de neuf nombres représentant les projections de ces vecteurs sur les axes des coordonnées. Ecrivons les vecteurs σ_1, σ_2, σ_3 en fonction des composantes :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}e_1 + \sigma_{21}e_2 + \sigma_{31}e_3, \\ \sigma_2 &= \sigma_{12}e_1 + \sigma_{22}e_2 + \sigma_{32}e_3, \\ \sigma_3 &= \sigma_{13}e_1 + \sigma_{23}e_2 + \sigma_{33}e_3. \end{aligned} \qquad (85.3)$$

Notez l'ordre des indices : le premier est le numéro de l'axe, le second, de l'élément de surface, e_1, e_2, e_3 étant respectivement les vecteurs unitaires des axes des coordonnées *1*, *2*, *3*. Les composantes aux mêmes indices : σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} sont les tensions *normales* à l'élément de surface, celles aux indices différents : σ_{12}, σ_{31}, . . . sont des tensions *tangentielles*.

Portons les valeurs des vecteurs σ_1, σ_2, σ_3 tirées de (85.3) dans l'égalité (85.2) et, en les multipliant scalairement successivement par e_1, e_2, e_3, on obtient les projections du vecteur σ_ν sur les axes *1*, *2*, *3* compte tenu évidemment de l'orthogonalité des axes (ou $e_i e_k = 1$, si $i = k$ et $e_i e_k = 0$, si $i \neq k$). Une fois les calculs faits, il vient

$$\begin{aligned} \sigma_{1\nu} &= \sigma_{11}\nu_1 + \sigma_{12}\nu_2 + \sigma_{13}\nu_3, \\ \sigma_{2\nu} &= \sigma_{21}\nu_1 + \sigma_{22}\nu_2 + \sigma_{23}\nu_3, \\ \sigma_{3\nu} &= \sigma_{31}\nu_1 + \sigma_{32}\nu_2 + \sigma_{33}\nu_3. \end{aligned} \tag{85.4}$$

Ce système d'égalités peut être écrit en introduisant le tenseur $\mathcal{T}$ ainsi :

$$\sigma_\nu = \mathcal{T}\nu, \tag{85.5}$$

c'est-à-dire que le vecteur de tension sur l'élément de surface à normale ν est égal au produit du tenseur $\mathcal{T}$ par le vecteur de la normale ν. Le tenseur $\mathcal{T}$ est représenté par la matrice

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \tag{85.6}$$

ses composantes étant les projections des vecteurs σ_1, σ_2, σ_3 sur les axes des coordonnées. Les formules (85.2), (85.4), (85.6) expriment la même chose.

Notez l'ordre d'écriture des composantes σ_{ik} dans (85.4) et (85.5). On peut montrer que dans la transformation (rotation) du système des coordonnées les composantes du tenseur σ_{ik} se transforment comme les produits des coordonnées correspondantes du point, à la manière de $x_i x_k$. Cela signifie que l'ensemble des nombres σ_{ik} est un tenseur.

Les conditions (85.1) sont nécessaires quoique insuffisantes pour l'équilibre du tétraèdre *ABCO*. Il faut encore que les moments de toutes les forces agissant sur la surface du tétraèdre soient nuls par rapport à un axe quelconque [1]. Pour simplifier les raisonnements, considérons égaux à zéro les *moments* des forces par rapport à l'axe

[1] Comme la somme de toutes les forces agissant sur le tétraèdre est nulle, elle peut être remplacée par un couple. Or le moment du couple par rapport à tout point est constant. Donc, le moment par rapport à tout axe parallèle est aussi invariable.

parallèle à l'axe des coordonnées *3* et passant par le centre de gravité de l'élément de surface dS. Vu la petitesse de l'élément de surface dS, on peut considérer comme uniforme la tension sur toute l'aire de l'élément et, partant, la résultante de toutes les forces agissant sur chaque élément de surface dS est appliquée au centre de gravité de l'élément. Sur la figure 240 est représenté le tétraèdre vu de haut suivant l'axe *3*. Il est facile de voir que l'axe choisi (point c sur la figure 240) passe par le centre de gravité de l'élément de surface dS_3 et, partant, les forces $\sigma_3 dS$ et $\sigma_3 dS_3$ passent par l'axe et ne créent pas de moments. Il ne reste qu'à étudier les moments des forces $\sigma_1 dS_1$ et $\sigma_2 dS_2$. Il est évident que

$$\sigma_{21}\, dS_1 h_1 - \sigma_{12}\, dS_2\, h_2 = 0,$$

où h_1 et h_2 sont les distances de l'axe c des éléments de surface dS_1 *et* dS_2 respectivement. Si les arêtes du tétraèdre a_1, a_2, a_3 sont dirigées suivant chacun des axes, $dS_1 = 1/2 a_2 a_3$, $dS_2 = 1/2 a_1 a_3$. Cela pris en considération, ainsi que le fait que $a_2 = 3h_2$ et $a_1 = 3h_1$, il vient

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}. \tag{85.7}$$

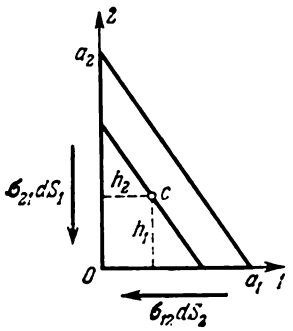


Fig. 240

Les composantes des tensions tangentielles sur les éléments de surface dS_1 et dS_2, normales à l'axe *3*, sont dirigées vers l'arête suivant cet axe (ou dans le sens contraire) et sont mutuellement *égales*.

De façon analogue on peut montrer que

$$\sigma_{31} = \sigma_{13}, \quad \sigma_{32} = \sigma_{23}. \tag{85.8}$$

Ainsi donc pour déterminer la tension au voisinage du point il faut posséder non pas neuf, mais *six* nombres ; le tenseur de tension $\mathcal{T}$ est *symétrique* et ses composantes aux indices différents sont égales deux à deux (voir (85.7), (85.8)) ; quelquefois on appelle cette condition du *couple d'indices* des tensions tangentielles.

Le fait que les tensions tangentielles se présentent en couples est une circonstance importante, car le système des coordonnées au point donné peut être choisi arbitrairement. Donc les composantes des tensions tangentielles sur deux petits éléments de surface se coupant sous un angle droit, les composantes le long de la ligne normale à l'arête d'intersection des éléments, sont toujours égales deux à deux et dirigées de l'arête ou vers l'arête. Dans ce cas les tensions tangentielles sur les faces de tout cube suffisamment petit découpé dans le corps sont régulièrement liées l'une à l'autre. Ainsi, par exemple, les composantes des tensions tangentielles parallèles aux plans (*1*, *2*) seront, sur les faces normales à ce plan, *égales* et

dirigées comme c'est indiqué sur la figure 241. Au cas (*a*) les tensions tangentielles sont considérées comme positives et au cas (*b*), comme négatives, car les composantes sur les faces positives des éléments de surface dans le cas (*a*) sont dirigées suivant les axes des coordonnées et dans le cas (*b*), à leur rencontre. Il en sera de même pour les composantes des tensions tangentielles parallèles au plan (*2*, *3*) et au plan (*3*, *1*).

Il s'ensuit que la somme des efforts tangentiels s'exerçant sur tout petit cube est nulle. Donc les efforts normaux subis par les

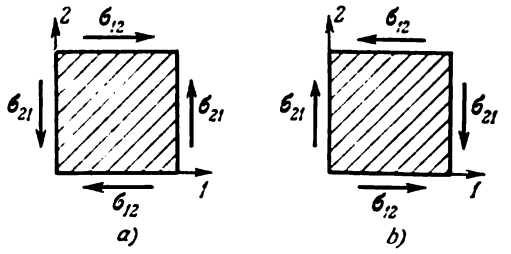


Fig. 241

faces du cube doivent s'équilibrer mutuellement, quels que soient les efforts tangentiels. Par exemple, sur la figure 242 on a montré les tensions normales sur les faces parallèles à l'axe *3*. Les tensions σ_{22} sont *positives* (de traction) et les tensions σ_{11} *négatives* (de compression).

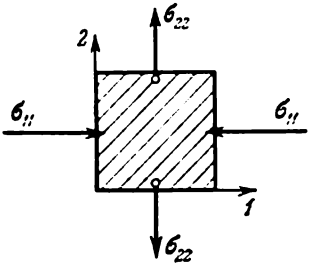


Fig. 242

Il est très important de noter qu'en tout point du corps contraint on peut toujours trouver parmi toutes les directions possibles **v** au moins trois directions mutuellement perpendiculaires pour lesquelles le vecteur tension coïncide avec la normale **v**, ou que les tensions tangentielles sur ces éléments de surfaces sont nulles. Ces directions sont dites *axes de tensions* (ou de contraintes) *principales* et si l'on choisit ces axes pour axes des coordonnées, le tenseur de tension devient défini par trois nombres seulement.

On trouve les axes des contraintes principales de la même façon que les axes principaux du tenseur symétrique du moment d'inertie (§ 64) à la seule différence que pour le tenseur du moment d'inertie les moments par rapport aux axes principaux sont toujours des grandeurs positives, tandis que dans le cas considéré les tensions le long des axes principaux peuvent être aussi bien positives (de traction) que négatives (comprimant le volume dégagé). Par conséquent,

en construisant une surface analogue à l'ellipsoïde d'inertie, on obtient, en général, une surface centrale de second ordre, c'est-à-dire une surface d'ellipsoïde ou d'hyperboloïde.

§ 86. PETITES DÉFORMATIONS DU CORPS

Sous l'action des forces extérieures, les particules d'un corps solide modifient d'une certaine façon leur disposition les unes par rapport aux autres. Le corps change de forme et ces modifications sont appelées *déformations* du corps.

Sous l'action d'une charge déterminée chaque particule se déplace d'un certain vecteur $\boldsymbol{s}$. Si toutes les particules du corps se déplacent d'un vecteur constant $\boldsymbol{s}$, il ne se produira aucune déformation

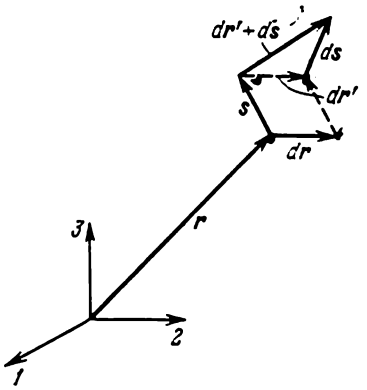


Fig. 243

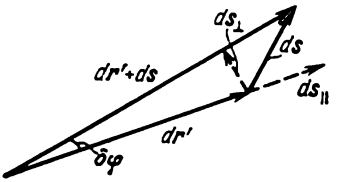


Fig. 244

du corps qui ne se déplacera que du vecteur $\boldsymbol{s}$. Il y aura déformation, si les différentes particules parcourent des vecteurs $\boldsymbol{s}$ différents, autrement dit le vecteur $\boldsymbol{s}$ devient une fonction de la position $\boldsymbol{r}$ de la particule avant la déformation; la particule se trouvant au point $\boldsymbol{r}$ se déplacera de $\boldsymbol{s}$ et au point $\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$, de $\boldsymbol{s}+d\boldsymbol{s}$ (fig. 243). La grandeur $d\boldsymbol{s}$ caractérise la déformation ou, plus précisément, la déformation est caractérisée par le rapport entre $d\boldsymbol{s}$ et $d\boldsymbol{r}$. Quand $d\boldsymbol{s}$ dépend linéairement de $d\boldsymbol{r}$ la liaison entre $d\boldsymbol{s}$ et $d\boldsymbol{r}$ se définit par le *tenseur de déformations* $\mathcal{S}$ dont les composantes sont à trouver.

La relation linéaire entre $d\boldsymbol{s}$ et $d\boldsymbol{r}$ signifie que les particules se trouvant avant la déformation sur le support du vecteur $d\boldsymbol{r}$ se déplaceront et prendront une position sur le support $d\boldsymbol{r}'+d\boldsymbol{s}$, comme c'est montré sur la figure 244, $d\boldsymbol{r}'=d\boldsymbol{r}$. On suppose les déformations suffisamment petites; cela veut dire que $ds \ll dr$ ou que le segment dr s'est allongé (ou s'est rétréci) d'une petite quantité $ds_{\parallel}$ et a pivoté

d'un petit angle $\delta\varphi = \frac{ds_\perp}{dr} \ll 1$. La grandeur $\varepsilon = \frac{ds_\parallel}{dr}$ est appelée *allongement relatif*.

Supposons que la position $\boldsymbol{r}$ de la particule avant la déformation est déterminée par rapport au référentiel cartésien $Ox_1x_2x_3$ dont les axes sont définis respectivement par les vecteurs unitaires $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Alors

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s} &= s_1\boldsymbol{e}_1 + s_2\boldsymbol{e}_2 + s_3\boldsymbol{e}_3, \\ d\boldsymbol{s} &= ds_1\boldsymbol{e}_1 + ds_2\boldsymbol{e}_2 + ds_3\boldsymbol{e}_3, \\ d\boldsymbol{r} &= dx_1\boldsymbol{e}_1 + dx_2\boldsymbol{e}_2 + dx_3\boldsymbol{e}_3; \end{aligned} \tag{86.1}$$

chaque s_1, s_2, s_3 dépendant de x_1, x_2, x_3 (des projections de $\boldsymbol{r}$), on peut donc écrire:

$$\begin{aligned} ds_1 &= \frac{\partial s_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial s_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial s_1}{\partial x_3}dx_3, \\ ds_2 &= \frac{\partial s_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial s_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial s_2}{\partial x_3}dx_3, \\ ds_3 &= \frac{\partial s_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial s_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial s_3}{\partial x_3}dx_3. \end{aligned} \tag{86.2}$$

Ces égalités définissent justement la dépendance linéaire entre $d\boldsymbol{s}$ et $d\boldsymbol{r}$ dans un certain petit domaine au voisinage du point $\boldsymbol{r}$. Les grandeurs des dérivées $\frac{\partial s_1}{\partial x_1}$, . . . restent constantes dans ce domaine [1].

Les égalités (86.2) montrent que $d\boldsymbol{s}$ et $d\boldsymbol{r}$ sont liées par le tenseur

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} & \frac{\partial s_1}{\partial x_2} & \frac{\partial s_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial s_2}{\partial x_1} & \frac{\partial s_2}{\partial x_2} & \frac{\partial s_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial s_3}{\partial x_1} & \frac{\partial s_3}{\partial x_2} & \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \tag{86.3}$$

ou les égalités (86.2) peuvent être écrites ainsi:

$$d\boldsymbol{s} = \mathcal{S}\,d\boldsymbol{r}. \tag{86.4}$$

On tirera des raisonnements ultérieurs que le tenseur $\mathcal{S}$ définit non seulement la déformation d'un certain volume élémentaire autour du point $\boldsymbol{r}$, mais également la *rotation* de ce volume en bloc, sans déformation. Pour éclaircir la question, décomposons $\mathcal{S}$ en une somme de deux tenseurs, l'un symétrique $\mathcal{S}_s$ et l'autre antisymétrique

[1] La dérivée partielle $\frac{\partial s_k}{\partial x_i}$ constitue le rapport de l'accroissement ∂s_k de la k-ième composante du vecteur $\boldsymbol{s}$, dû à la variation de la seule i-ème composante de $\boldsymbol{r}$ à la grandeur ∂x_i.

$\mathscr{S}_a$ de la façon suivante :

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}_s + \mathscr{S}_a, \tag{86.5}$$

où

$$\mathscr{S}_s = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_1} + \frac{\partial s_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial s_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_3}{\partial x_1} + \frac{\partial s_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_3}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \tag{86.6}$$

$$\mathscr{S}_a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} - \frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_1} - \frac{\partial s_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_3}{\partial x_1} - \frac{\partial s_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_3}{\partial x_2} - \frac{\partial s_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $\mathscr{S}_a\, d\boldsymbol{r} = [\delta\boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{r}]$, où le vecteur $\delta\boldsymbol{\varphi}$ est un très petit angle de pivotement aux composantes divisées suivant les axes *1*, *2*, *3* :

$$\delta\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_3}{\partial x_2} - \frac{\partial s_2}{\partial x_3}\right), \quad \delta\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_1}\right),$$

$$\delta\varphi_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_1} - \frac{\partial s_1}{\partial x_2}\right).$$

En effet,

$$\mathscr{S}_a\, d\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\varphi_3 & \delta\varphi_2 \\ \delta\varphi_3 & 0 & -\delta\varphi_1 \\ -\delta\varphi_2 & \delta\varphi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix},$$

$$(\mathscr{S}_a d\boldsymbol{r})_1 = -\delta\varphi_3 dx_2 + \delta\varphi_2 dx_3 = [\delta\boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{r}]_1, \text{ etc.}$$

Il est facile de voir que les vecteurs $[\delta\boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{r}]$ représentent les déplacements des points du corps solide pivotant de l'angle $\delta\boldsymbol{\varphi}$ autour de l'axe coïncidant avec la direction $\delta\boldsymbol{\varphi}$. Donc la déformation dans le petit domaine au voisinage du point $\boldsymbol{r}$ n'est définie que par la partie symétrique du tenseur $\mathscr{S}$, ou par $\mathscr{S}_s$.

Expliquons le sens physique des différentes composantes du tenseur $\mathscr{S}_s$. Les composantes diagonales $\frac{\partial s_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial s_2}{\partial x_2}$, $\frac{ds_3}{dx_3}$ sont des allongements (ou des raccourcissements) des distances entre les particules se disposant avec la déformation sur les lignes parallèles aux axes $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ respectivement. Les composantes restantes représentent les rotations des lignes qui avant la déformation étaient parallèles aux axes des coordonnées. Ces lignes pivotent de certains petits angles. La projection des lignes correspondant aux axes *1*, *2*

sur le plan (*1*, *2*) est montrée sur la figure 245. Le dessin montre que

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_2}+\frac{\partial s_2}{\partial x_1}$$

équivaut à la modification par déformation des angles droits dans

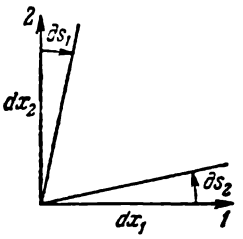


Fig. 245

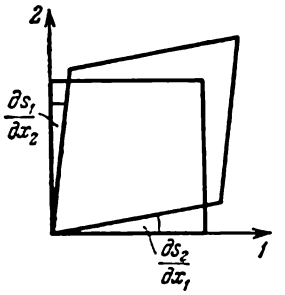


Fig. 246

le plan normal à l'axe *3* qu'on désigne par $\gamma_{12}=\gamma_{21}$. De façon analogue

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_3}+\frac{\partial s_3}{\partial x_1}=\gamma_{13}=\gamma_{31} \tag{86.7}$$

équivaut à la modification des angles droits dans le plan normal à l'axe *2*. De même

$$\frac{\partial s_2}{\partial x_3}+\frac{\partial s_3}{\partial x_2}=\gamma_{23}=\gamma_{32}. \tag{86.8}$$

Tout cela se vérifie dans un domaine suffisamment petit au voisinage du point *r*. Les grandeurs des allongements sont désignées par :

$$\varepsilon_1=\frac{\partial s_1}{\partial x_1},\qquad \varepsilon_2=\frac{\partial s_2}{\partial x_2},\qquad \varepsilon_3=\frac{\partial s_3}{x_3}; \tag{86.9}$$

les valeurs négatives correspondant à des raccourcissements. Le tenseur de déformation peut alors être écrit de la sorte :

$$\mathscr{S}_s=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \tag{86.10}$$

Soit un cube suffisamment petit avant la déformation, après la déformation ses arêtes augmenteront (ou diminueront), quant aux angles droits ils se modifieront de la grandeur γ_{ik}. On a montré à la figure 246 la section du cube par le plan normal à l'axe *3* ; deux

angles droits ont diminué de l'angle γ_{12}, tandis que les deux autres ont augmenté du même angle γ_{12}.

Le tenseur $\mathscr{S}_s$ est symétrique et comme tout tenseur symétrique il possède au moins trois directions *principales* mutuellement orthogonales. Le cube élémentaire dont les faces sont perpendiculaires aux directions principales n'est soumis qu'à la traction (ou à la compression) le long des arêtes, les angles du cube ne variant pas dans la déformation.

Un cas particulier de déformation est également possible quand les arêtes du cube ne varient pas de longueur, seuls se modifiant les angles entre les arêtes ; une telle déformation est appelée *changement de forme* ou cisaillement *pur*.

§ 87. DÉPENDANCE ENTRE LES TENSIONS ET LES DÉFORMATIONS

Dans la zone des déformations élastiques il existe une liaison linéaire entre les tenseurs de déformation et la tension, c'est la loi de Hooke utilisée dans le cas élémentaire de tension uniaxiale. Pour un corps cristallin (anisotrope) dont les propriétés élastiques varient suivant la direction, dans le cas le plus général, il doit exister une dépendance linéaire de chaque composante du tenseur de déformations de toutes les composantes du tenseur des tensions. Le calcul montre que par suite de la symétrie des tenseurs le nombre de coefficients indépendants est de 21. Ces vingt-et-un paramètres déterminent les propriétés élastiques de la substance anisotrope.

Au cas d'un corps isotrope il suffit de deux coefficients pour établir la relation entre les déformations et les tensions. Il est le plus facile de montrer cette liaison en écrivant le tenseur de tensions par rapport aux axes principaux. Il apparaît évident que ces axes coïncideront avec les axes principaux du tenseur de déformations. Un cube suffisamment petit, dont les faces ne sont sollicitées que par des tensions normales, se déformera de la sorte que ses faces ne se déplacent que suivant la normale, les angles dièdres qu'elles engendrent restant tout le temps droits. Alors la tension σ_{11} sur les faces normales à l'axe *1* provoqueront une extension (allongement) ε_1 le long de l'axe *1*. D'après la loi de Hooke $\sigma_{11} = E\varepsilon_1$, où E est le module de Young du matériau.

L'allongement relatif suivant l'axe *1* serait égal à $\varepsilon_1 = \sigma_{11}/E$ si les faces, normales aux axes *2* et *3*, n'étaient pas sollicitées par des tensions. Or ce sont les tensions σ_{22} et σ_{33} qui y agissent provoquant la compression transversale du cube, proportionnelle à l'allongement engendré par ces charges, le coefficient de proportionnalité étant μ, ou coefficient de Poisson (§ 81). Donc l'allongement suivant l'axe *1* sera inférieur à σ_{11}/E de la grandeur du raccourcissement dû aux tensions de traction (positives) sur les deux autres couples de

faces. Le raccourcissement dû à la tension σ_{22} est

$$\mu\varepsilon_2 = \mu\frac{\sigma_{22}}{E}.$$

Le raccourcissement dû à la tension σ_{33} est

$$\mu\varepsilon_3 = \frac{\sigma_{33}}{E}.$$

Considérant les actions des forces indépendantes et additionnant les apports dus aux charges suivant tous les couples de faces, on obtient l'allongement le long de l'axe *1* :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_{11}}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\sigma_{33}}{E}\right) = \frac{1}{E}\{\sigma_{11} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{33})\}. \quad (87.1)$$

Le lien proportionnel entre une composante du tenseur de déformations ε_1 et les composantes du tenseur de tensions ne se détermine que par deux coefficients $1/E$ et μ/E, deux paramètres d'élasticité du matériau E et par μ, connus d'après des expériences banales.

De façon analogue on peut établir que

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\{\sigma_{22} - \mu(\sigma_{33} + \sigma_{11})\}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\{\sigma_{33} - \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\}. \quad (87.2)$$

On a admis dans cette déduction (en vertu de la loi de proportionnalité) que les déformations dues aux différentes charges se sommaient. Si une certaine charge a entraîne la déformation b et la charge c, la déformation d, par suite de la linéarité, l'action cumulée des charges a et c, égale à $a + c$, entraîne la déformation $b + d$.

Si on note

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\sigma, \quad (87.3)$$

les formules obtenues peuvent être écrites de la sorte :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\{(1+\mu)\sigma_{11} - 3\mu\sigma\}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\{(1+\mu)\sigma_{22} - 3\mu\sigma\}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\{(1+\mu)\sigma_{33} - 3\mu\sigma\}. \end{aligned} \quad (87.4)$$

Les égalités sont établies pour le cas où les axes des coordonnées coïncident avec des directions principales ; dans un autre choix d'axes (et des directions des arêtes du cube) le cube sera soumis à une déformation de cisaillement. Or, par suite de la dépendance linéaire des déformations des tensions, on peut aussi utiliser les mêmes formules pour la solution du problème dans le cas général. Décomposons au préalable le tenseur de tensions en une somme de deux tenseurs, le premier ne contenant que les tensions normales et le se-

cond que les tensions tangentielles :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_n + \mathcal{T}_t = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (87.5)$$

Alors les déformations dues aux tensions représentées par le tenseur $\mathcal{T}_n$ peuvent être calculées d'après les formules (87.4), car dans ce cas on ne tient compte que des tensions normales. Mais à ces déformations il faut ajouter des déformations dues aux tensions tangentielles et représentées par le tenseur $\mathcal{T}_t$.

Les expériences montrent que les composantes des tensions tangentielles sur les quatre faces du cube, par exemple, σ_{12} (fig. 247, *a*),

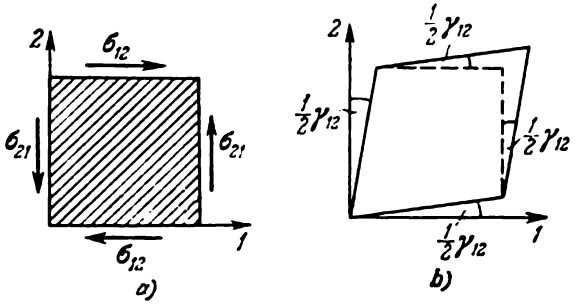


Fig. 247

entraînent des variations des angles droits de l'angle γ_{12} dans le plan normal à l'axe *3* (fig. 247, *b*) avec

$$\sigma_{12} = G\gamma_{12}, \quad (87.6)$$

où G est un coefficient constant dans la zone d'élasticité pour un matériau homogène et isotrope (module de cisaillement). Les tensions tangentielles sur les faces parallèles aux axes *1* et *2* sont aussi égales

$$\sigma_{23} = G\gamma_{23}, \quad \sigma_{31} = G\gamma_{31}. \quad (87.7)$$

La déformation des angles γ dans un plan de coordonnées quelconque ne dépend que des composantes égales des tensions tangentielles sur les quatre faces normales à ce plan et est complètement indépendante des autres composantes des tensions tangentielles. Par conséquent, le lien entre le tenseur $\mathcal{T}_t$ et le *tenseur de cisaillement* correspondant $\mathcal{S}_c''$ est très simple. Le tenseur $\mathcal{S}_c''$ fait partie du tenseur de déformations $\mathcal{S}_c$ qui définit les cisaillements et qui se détermine d'après l'égalité suivante :

$$\mathcal{S}_c = \mathcal{S}_c' + \mathcal{S}_c'',$$

où

$$\mathscr{S}'_c = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{S}''_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & 0 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 0 \end{pmatrix}. \tag{87.8}$$

Considérant (87.6) et (87.7), on voit que le lien cherché prend la forme

$$\mathscr{T}_t = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{11} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{21} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & 0 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 0 \end{pmatrix} = 2G\mathscr{S}''_c. \tag{87.9}$$

Quant au tenseur $\mathscr{T}_n$, il peut être écrit d'après (87.4) ainsi :

$$\mathscr{T}_n = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\mu} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} + \frac{3\mu\sigma}{1+\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{87.10}$$

La grandeur 3σ peut être exprimée en fonction de la grandeur $3\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. En effet, en sommant les trois égalités de (87.4) il vient

$$3\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1+\mu}{E} 3\sigma - \frac{9\mu}{E}\sigma = \frac{3\sigma}{E}(1+\mu-3\mu),$$

d'où

$$\sigma = \frac{E}{1-2\mu}\varepsilon. \tag{87.11}$$

Portant cette expression dans (87.10) il vient

$$\mathscr{T}_n = \frac{E}{1+\mu}\left(\mathscr{S}'_c + \frac{3\mu\varepsilon}{1-2\mu}\mathscr{E}\right), \tag{87.12}$$

où

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est le tenseur unitaire.

L'expression (87.12) fournit le lien entre le tenseur des tensions normales $\mathscr{T}_n$, le *tenseur de traction* $\mathscr{S}'_c$ et la grandeur ε (ou σ). On montrera ensuite que ε (comme σ) est un scalaire, c'est-à-dire ne dépend pas du choix du système des coordonnées, quoique chacune des grandeurs ε_1, ε_2, ... et σ_{11}, σ_{22}, ... soit fonction du système des coordonnées.

Etablissons maintenant la dépendance constante du module de cisaillement G du module de Young E et du coefficient de Pois-

son μ. Pour cela examinons un cas simple de déformation due uniquement à l'action des tensions normales, qui pour les autres axes se ramène à un cisaillement pur. Supposons que la tension $\sigma_{33} = 0$, la déformation n'est alors due qu'à l'action de σ_{11} et de σ_{22}. Soient $\sigma_{11} = \sigma_0$ et $\sigma_{22} = -\sigma_0$, $\sigma_{33} = 0$, les tensions tangentielles étant absentes (fig. 248). Sous l'action de ces tensions suivant l'axe *1* se manifeste une traction et suivant l'axe *2* une compression. En effet, d'après (87.1) et (87.2)

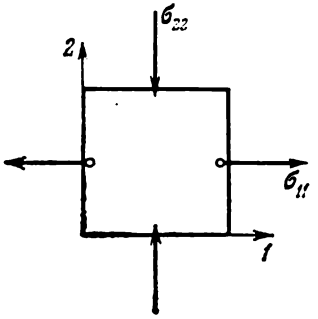


Fig. 248

$$E\varepsilon_1 = \sigma_{11} - \mu\sigma_{22} = (1+\mu)\,\sigma_0,$$

$$E\varepsilon_2 = \sigma_{22} - \mu\sigma_{11} = -(1+\mu)\,\sigma_0 \quad (87.13)$$

ou

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon_0 = \frac{1+\mu}{E}\,\sigma_0.$$

Cette déformation des axes inclinés sous l'angle $\pi/4$ est un cisaillement pur. Démontrons-le.

Découpons dans le carré étudié un nouveau carré, comme c'est montré à la figure 249, *a*. Posons le côté du cube égal à *a*; dans ce cas le prisme s'appuyant sur le triangle hachuré est sollicité par des

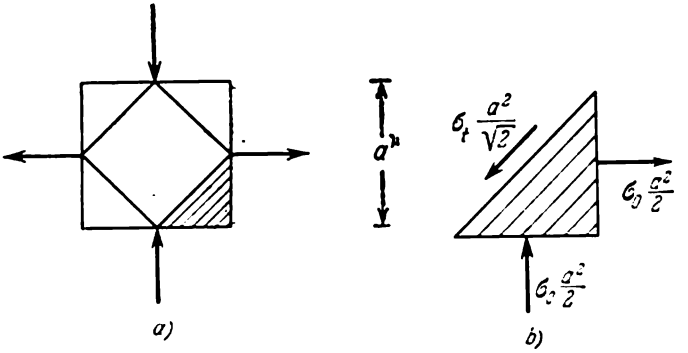


Fig. 249

forces indiquées sur la figure 249, *b*. Il devient évident que toutes les forces ne s'annuleront qu'à la condition que $\sigma_t = \sigma_0$ et de même pour les trois prismes restants. Donc le prisme intérieur n'est soumis qu'à l'action des forces tangentielles et modifie ses angles de la grandeur

$$\gamma = \frac{\sigma_0}{G}.$$

L'allongement d'une des diagonales de la section du prisme intérieur est

$$\varepsilon_0 = \frac{1+\mu}{E}\sigma_0.$$

Les conditions géométriques permettent de trouver le lien entre les paramètres μ, E, G. La section du prisme avant et après la déformation est montrée à la figure 250. Comme la déformation γ est suffisamment petite, considérant que le triangle ABC est isocèle et rectangle, il vient

$$\frac{\gamma a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\varepsilon_0 a, \quad \text{ou} \quad \gamma = 2\varepsilon_0.$$

En y portant les deux égalités précédentes, on obtient la relation cherchée

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{87.14}$$

Cette relation établie une fois, on peut écrire la relation entre les tenseurs de déformations et de tensions sous une forme générale

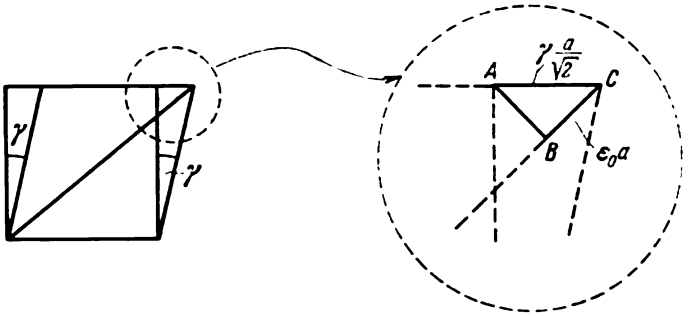


Fig. 250

en tenant compte de (87.9) et (87.12):

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_n + \mathcal{T}_t = \frac{E}{1+\mu}\left(\mathcal{S}'_c + \frac{3\mu\varepsilon}{1-2\mu}\mathcal{E}\right) + \frac{E}{1+\mu}\mathcal{S}''_c,$$

ou en se souvenant de (87.8)

$$\mathcal{T} = \frac{E}{1+\mu}\left(\mathcal{S}_c + \frac{3\mu\varepsilon}{1-2\mu}\mathcal{E}\right). \tag{87.15}$$

Cette expression permet de calculer au moyen des composantes du tenseur de déformations $\mathcal{S}_c$ les composantes du tenseur de tensions $\mathcal{T}$ pour un matériau isotrope pour E et μ connus.

On peut en tirer la dépendance réciproque de $\mathcal{S}_c$ de $\mathcal{T}$. En effet, de (87.15) il vient

$$\frac{1+\mu}{E}\mathcal{T} = \mathcal{S}_c + \frac{3\mu\varepsilon}{1-2\mu}\mathcal{E}.$$

Tenant compte de l'égalité (87.11), on obtient sous une forme définitive la relation entre le tenseur de tensions et le tenseur de déformations :

$$\mathscr{S}_c = \frac{1+\mu}{E}\mathscr{T} - \frac{3\mu\sigma}{E}\mathscr{E}. \tag{87.16}$$

Il ne reste qu'à expliquer que ε et σ sont des scalaires, autrement dit des grandeurs qui ne dépendent pas du système des coordonnées. Pour chaque tenseur on peut trouver les valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3, correspondant aux tensions normales le long des axes principaux du tenseur $\mathscr{T}$ ou $\mathscr{S}_c$. Ce cas a été examiné en détail pour le tenseur du moment d'inertie (§ 64). Les valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 sont indépendantes du système des coordonnées, c'est ainsi que, par exemple, pour le tenseur de tensions elles se déduisent de l'équation

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}-\lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

(voir (64.11)). On peut écrire cette équation ainsi :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Les racines de cette équation étant des scalaires les coefficients a_1, a_2, a_3 le devront être également, c'est-à-dire être indépendants du choix des axes des coordonnées. Il est facile de se convaincre que

$$-a_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\sigma. \tag{87.17}$$

Donc σ est un scalaire. On démontre de la même façon que ε est également un scalaire.

La grandeur σ peut être interprétée comme une tension normale moyenne

$$\sigma = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}, \tag{87.18}$$

analogue à la pression dans le liquide quand σ est négatif. L'action de la tension σ conduit à une extension omnidirectionnelle de grandeur $\varepsilon = \frac{1+\mu}{E}\sigma$ ou à une compression $-\varepsilon$ pour une pression $-\sigma$. Le tenseur $\mathscr{T}_n$ peut être décomposé en deux parties ;

$$\mathscr{T}_n = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \sigma_{11}-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}-\sigma \end{pmatrix}. \tag{87.19}$$

La première (le tenseur $\sigma\mathscr{E}$) constitue la tension moyenne omnidirectionnelle, ou la pression négative σ, et la seconde, l'écart de la tension moyenne. Il est évident que le tenseur $\sigma\mathscr{E}$ ne varie pas avec le changement des coordonnées.

§ 88. ÉNERGIE POTENTIELLE DE DÉFORMATION

Evaluons le travail qu'il faut dépenser pour déformer un élément de volume de matière $dv = dx_1 dx_2 dx_3$. Les tensions normales n'interviennent pas dans la déformation de cisaillement et ne dépendent que de la déformation de traction (de compression), la tension le long d'un axe quelconque dépendant de la déformation le long de tous les trois axes. On peut donc calculer le travail des efforts normaux dans la déformation indépendamment du travail des efforts de la déformation de cisaillement.

Le travail élémentaire des efforts normaux peut s'écrire en se souvenant de (87.12) et en tenant compte que $\frac{E}{1+\mu} = 2G$ ainsi :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}\, dx_2\, dx_3\, d\varepsilon_1\, dx_1 &= 2G\left(\varepsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu}\, 3\varepsilon\right) d\varepsilon_1\, dv,\\
\sigma_{12}\, dx_3\, dx_1\, d\varepsilon_2\, dx_2 &= 2G\left(\varepsilon_2 + \frac{\mu}{1-2\mu}\, 3\varepsilon\right) d\varepsilon_2\, dv, \qquad (88.1)\\
\sigma_{33}\, dx_1\, dx_2\, d\varepsilon_3\, dx_3 &= 2G\left(\varepsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu}\, 3\varepsilon\right) d\varepsilon_3\, dv.
\end{aligned}$$

En sommant ces trois équations, il vient

$$2G\left\{\varepsilon_1\, d\varepsilon_1 + \varepsilon_2\, d\varepsilon_2 + \varepsilon_3\, d\varepsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu}\, 3\varepsilon d\,(3\varepsilon)\right\} dv,$$

car $3\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ et $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = d\,(3\varepsilon)$.

Le travail dépensé à la déformation entière de 0 à ε_1, ε_2, ε_3 sera égal à

$$dA_1 = 2G\left(\int_0^{\varepsilon_1} x\, dx + \int_0^{\varepsilon_2} x\, dx + \int_0^{\varepsilon_3} x\, dx + \frac{\mu}{1-2\mu}\int_0^{3\varepsilon} x\, dx\right) dv =$$

$$= G\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{\mu}{1-2\mu}\,(3\varepsilon)^2\right) dv,$$

x représentant chaque fois ici la fonction intégrée. La « densité » du travail de la déformation par les forces normales exprimée en fonction des déformations est :

$$u_1 = \frac{dA_1}{dv} = G\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{\mu}{1-2\mu}\,(3\varepsilon)^2\right). \qquad (88.2)$$

Il est encore plus simple de calculer le travail des forces tangentielles, car les composantes des efforts tangentiels normaux à un

certain axe dépendent uniquement des déformations de cisaillement dans le plan normal à cet axe, par exemple, $\sigma_{12} = G\gamma_{12}$, etc. On peut écrire le travail élémentaire des composantes des forces tangentielles appliquées aux faces parallèles à l'axe *3* (fig. 251) de la sorte:

$$\sigma_{12}\, dx_1\, dx_3\, d\gamma_{12}\, dx_2 = \sigma_{12}\, d\gamma_{12}\, dv.$$

Les forces appliquées aux trois autres faces de ce groupe n'effectuent pas de travail: sur deux faces $dx_2 dx_3$ les forces sont normales au

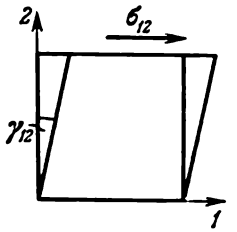


Fig. 251

déplacement, tandis que sur la face inférieure $dx_1 dx_3$, le déplacement est nul. Donc tout le travail effectué par les forces tangentielles sur le volume dégagé est:

$$dA_2 = \left(\int_0^{\gamma_{12}} \sigma_{12}\, d\gamma_{12} + \int_0^{\gamma_{13}} \sigma_{13}\, d\gamma_{13} + \int_0^{\gamma_{23}} \sigma_{23}\, d\gamma_{23}\right) dv =$$

$$= G\left(\int_0^{\gamma_{12}} x\, dx + \int_0^{\gamma_{13}} x\, dx + \int_0^{\gamma_{23}} x\, dx\right) dv = \frac{1}{2} G\,(\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2)\, dv. \tag{88.3}$$

Donc la densité totale du travail de déformation est

$$u = u_1 + \frac{dA^2}{dv} =$$

$$= G\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{1}{2}\gamma_{12}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{13}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{23}^2 + \frac{\mu}{1-2\mu}(3\varepsilon)^2\right). \tag{88.4}$$

Cette densité de travail est justement égale à la densité de l'énergie potentielle de déformation du corps exprimée en fonction de la grandeur des déformations.

La densité de l'énergie potentielle peut être également écrite en fonction de la tension de la sorte:

$$u = \frac{1}{4G}\left(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{32}^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{13}^2 + 2\sigma_{23}^2 - \frac{\mu}{1+\mu}(3\sigma)^2\right). \tag{88.5}$$

On propose au lecteur de déduire cette formule en qualité d'exercice. (C o n s e i l. Il faut, par exemple, remplacer dans le produit $\sigma_{11}d\varepsilon_1$ $d\varepsilon_1$ par $\frac{1}{2G}\left(d\sigma_{11} - \frac{\mu}{1+\mu}d(3\sigma)\right)$ d'après (87.16), etc.)

Il est facile de constater que les tensions et les déformations se déterminent de la sorte:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_1}, \ldots, \sigma_{12} = \frac{\partial u}{\partial \gamma_{12}}, \ldots; \tag{88.6}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \sigma_{11}}, \ldots, \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial \sigma_{12}}, \ldots \tag{88.7}$$

§ 89. FORCES ET DÉFORMATIONS À LA FLEXION DES BARRES (POUTRES)

Un exemple important de déformation de corps solide est la flexion des barres [1] (poutres) sous l'action de forces appliquées normalement à l'axe de la barre (charges transversales). L'image de la

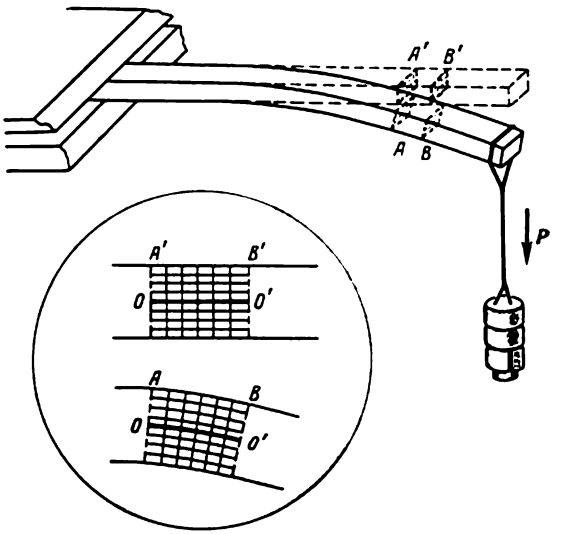


Fig. 252

déformation de la barre soumise à une charge peut être fournie par une tige prismatique en caoutchouc qui a été fléchie et sur la surface latérale de laquelle on a dessiné un treillis. La surface latérale aura l'aspect montré à la figure 252: les couches supérieures de la tige

[1] On appelle barre (ou poutre) un corps cylindrique dont les dimensions dans l'une des directions (longueur) sont de beaucoup supérieures à deux autres.

prismatique s'allongent, tandis que celles du bas, se resserrent, la couche OO' conservant une longueur presque invariable.

Une analyse précise des déformations et des tensions de la barre ou de la poutre élastique est un problème assez ardu. Mais l'étude conduisant à des résultats approchés est relativement simple et repose sur l'hypothèse avancée par Bernoulli et postulant que dans la courbure de la barre de la poutre toutes les sections droites restent *planes*.

Supposons qu'un bout de la poutre est rigidement fixé (fig. 252) et l'autre supporte une charge P. Sous l'action de la force P la

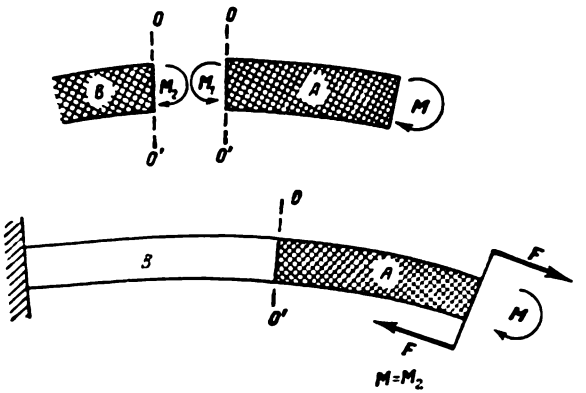


Fig. 253

poutre fléchira, chaque section transversale de la poutre perpendiculaire à l'axe se trouvant dans la position verticale avant la mise en charge, s'inclinera du côté de la force fléchissante, tout en restant plane.

Il s'agit de déterminer : si la poutre résistera à la charge donnée, quelles seront les déformations infligées à la poutre, quelles seront les tensions sollicitant le matériau de la poutre, quelle sera la flexion de l'extrémité de la poutre sous l'action de la charge, etc. Les réponses à toutes ces questions seront obtenues au moyen du calcul technique de la poutre ou de la barre.

Pour simplifier l'analyse, examinons d'abord les déformations de la poutre encastrée à un bout [1] et sollicitée à l'autre non pas par une force, mais par un couple, comme c'est montré à la figure 253.

[1] L'encastrement à une extrémité suppose que dans la déformation la section du bout encastré ne modifie pas sa position dans l'espace. Habituellement, dans les conditions réelles la section encastrée ne reste pas plane et se déforme toujours, or le confrontement des essais au calcul, ainsi qu'une analyse adéquate autorisent l'hypothèse de l'extrémité encastrée plane dans la déformation des poutres.

Ce cas se rencontre dans la pratique de beaucoup moins souvent, mais son analyse théorique est plus simple.

Pour déterminer la grandeur et la nature des efforts intérieurs engendrés dans tout corps au cours de sa déformation, utilisons le procédé qui consiste à en dégager une certaine partie. Quand sous l'action des sollicitations extérieures il se manifeste une déformation de la poutre et un équilibre s'est établi, on se représente en pensée une certaine partie de la poutre, en général arbitraire, et on écrit la condition d'équilibre pour cette partie en tenant compte de l'action des forces extérieures aussi bien que des efforts « intérieurs » s'exerçant sur la surface de séparation de la partie de la poutre examinée. Généralement, les efforts intérieurs ne nous sont pas connus, mais à partir des conditions d'équilibre de la partie dégagée et, une fois les forces extérieures connues, on peut obtenir l'information nécessaire sur la nature et la grandeur de ces efforts.

Par exemple, dans le cas considéré coupons la poutre suivant la section OO' (voir fig. 253) ; des conditions d'équilibre de la partie A il s'ensuit que l'effort tangentiel dans la section OO' est nul. En effet, si à la partie A, le long de la ligne OO', une force était appliquée, la partie A n'aurait pas pu se trouver en équilibre. C'est qu'un couple de forces extérieures F de moment M ne peut être équilibré que par un couple ou par un ensemble de couples de forces possédant en commun un moment opposé. Donc l'effort subi par la section OO' constitue un groupe de couples de forces dont le moment commun $M_1 = -M$.

Puisqu'on peut couper un morceau A de longueur quelconque, dans toute section transversale les efforts intérieurs constituent des groupes de couples de forces dont le moment commun est en grandeur égal au moment du couple de forces extérieures. D'après la troisième loi de la dynamique le moment des efforts s'exerçant sur la partie restante de la poutre B (voir fig. 253)

$$M_2 = -M_1,$$

ou

$$M_2 = M,$$

est égal au moment du couple de forces extérieures appliquées à son extrémité.

Notons que la résultante des efforts dans toute section transversale, par exemple OO', est nulle. Mais cela ne revient pas à dire que les tensions transversales et normales sont nulles. Or le moment des efforts M_1 ne peut être assuré dans la section que par la répartition des efforts normaux (tensions) ; les efforts tangentiels (tensions) se trouvant dans un même plan ne peuvent fournir de moment (les « bras de leviers » étant nuls). En théorie approchée on néglige les tensions tangentielles dans la section, car elles sont infimes. La confrontation des résultats avec l'expérience justifie cette omission

En cette approximation le lien entre les déformations et la charge s'obtient de la façon suivante.

Définissons les déformations de la poutre subissant l'action du moment appliqué à son bout. Découpons dans la poutre un morceau de longueur suffisamment petite dl. Dans la flexion ce morceau se déforme à peu près de la façon montrée à la figure 254. Les deux sections transversales se sont inclinées au cours de la déformation de la poutre de l'angle $d\varphi$. Imaginons en pensée que la poutre est divisée en des couches horizontales suffisamment minces, parallèlement à

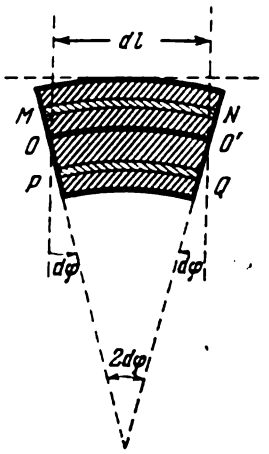


Fig. 254

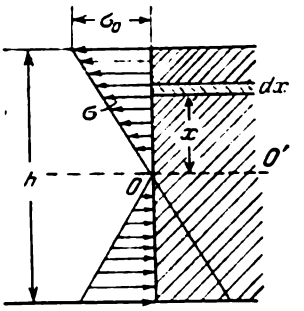


Fig. 255

la ligne médiane de la poutre. Il est évident que la couche contiguë à la ligne moyenne OO' ne varie pas de longueur et on l'appelle, par suite, couche « neutre »; les couches ou « fibres »[1] situées au-dessus de la couche neutre s'allongent, par exemple, la couche MN (voir fig. 254); les couches se disposant au-dessous d'elle sont raccourcies et comprimées comme par exemple la couche PQ. Le raccourcissement et la compression des couches sont proportionnels à la distance jusqu'à la couche neutre, car la section transversale reste plane dans la déformation.

On peut supposer que la tension normale dans chaque couche est proportionnelle à son allongement ou raccourcissement si la grandeur de la déformation ne sont pas du domaine de la zone de proportionnalité. Dans ce cas les tensions aux extrémités du morceau de longueur dl considéré ou dans la section transversale de la poutre se présenteront de la façon montrée à la figure 255. Si x est la distance de la couche considérée à la couche neutre, la tension en cet

[1] On appelle fibre un cylindre suffisamment mince découpé en pensée parallèlement à l'axe dans le corps de la poutre.

endroit est

$$\sigma = \sigma_0 \frac{x}{b}, \tag{89.1}$$

où σ_0 est la tension dans la couche la plus éloignée se trouvant à la distance b de la couche neutre.

Supposons que toutes les sections de la poutre sont identiques et de forme rectangulaire; alors, la couche neutre occupe le centre de la poutre et $b = h/2$, où h est la hauteur de la section transversale de la poutre. Donc, pour une poutre dont la section a pour largeur a, l'effort subi au sein de la couche de largeur dx située à la distance x de la couche neutre est

$$dF = \sigma a\, dx = \frac{\sigma_0}{b} xa\, dx = \frac{2\sigma_0 a}{h} x\, dx. \tag{89.2}$$

Tous les efforts dans la section transversale s'exercent deux à deux, de sorte que la résultante de tous les efforts est nulle, quant au moment de tous les efforts, il doit être égal au moment M du couple de forces appliquées.

On peut maintenant calculer le moment des efforts dans la section transversale; il sera évidemment égal à l'intégrale de (89.2) prise sur toute la section:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} x\, dF = \frac{\sigma_0}{b} \int_{-h/2}^{h/2} ax^2\, dx = \frac{2\sigma_0}{h} I. \tag{89.3}$$

La grandeur

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} ax^2\, dx, \tag{89.4}$$

égale dans le cas considéré à

$$I = \frac{ah^3}{12},$$

porte le nom de *moment « d'inertie » de la section transversale* d'une poutre par rapport à l'axe passant par la couche neutre. En effet, la formule (89.4) rappelle la formule du moment d'inertie du corps plat; l'aire $a\, dx$ est ici multipliée par x^2 (le carré de la distance à l'axe) et ce produit est intégré sur toute la surface de la section. Le moment d'inertie de la surface ne présente qu'une ressemblance formelle avec le moment d'inertie du corps dû à la masse, il ne s'agit ici d'aucune inertie du corps, et la dimension du moment d'inertie de la surface est la (longueur)^4, la grandeur I n'ayant donc qu'une signification géométrique.

Si la section transversale S de la poutre n'est pas rectangulaire et la poutre fléchit dans le plan perpendiculaire à l'axe de moment

M (plan de la charge), l'axe neutre passe par le centre de gravité O de la section et est perpendiculaire au plan de charge (fig. 256). Le moment des efforts dans la section transversale s'exprimera par la formule

$$M = \frac{\sigma_0}{b} \int_S ax^2\,dx = \frac{\sigma_0}{b} I, \tag{89.5}$$

où $I = \int ax^2 dx$ et b est la distance maximale à la couche neutre, plus grande que b_1 et b_2, quant à σ_0, c'est la tension maximale.

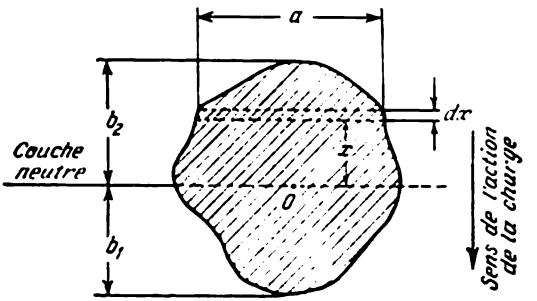


Fig. 256

Cette formule est la conséquence du fait que dans la déformation de la poutre toutes les sections transversales restent planes.

Le moment des efforts M dans la section transversale et la tension maximale dans cette section σ_0 sont mutuellement reliés par une condition fort simple découlant de la formule (89.5) :

$$M = \sigma_0 \frac{I}{b} = \sigma_0 w, \quad \text{où } w = \frac{I}{b}. \tag{89.6}$$

La tension maximale est engendrée dans la couche la plus éloignée de la couche neutre. La grandeur w n'est fonction que de la forme de la section transversale. On peut toujours déterminer au préalable pour la section donnée la grandeur w, appelée moment de *résistance* de la section, qui est égale au rapport du moment d'inertie de la section à la distance de la couche la plus éloignée. Dans le calcul technique des poutres on se limite souvent à la détermination de la grandeur maximale de la tension σ_0 et, d'après la valeur de cette tension, on apprécie la résistance de la poutre en comparant σ_0 avec la tension σ_r à laquelle se produit la rupture.

Dans le cas examiné, quand au bout de la poutre est appliqué un couple de forces (voir fig. 253), le moment des efforts M est partout le même, pour toutes les sections transversales ; pour une charge différente, il n'en est pas de même. Il apparaît que dans nombre de problèmes on peut déterminer le moment des efforts subis pour

chaque section transversale d'après les charges extérieures. En divisant le moment des efforts subis par le moment de résistance w, on peut trouver la tension maximale dans toute section pour une charge donnée. Par conséquent, dans le calcul de résistance de poutre il faut en premier lieu rechercher la section « dangereuse », c'est-à-dire la section dans laquelle la tension est maximale pour une charge donnée.

§ 90. DÉTERMINATION DE LA FLEXION DES POUTRES

La déformation, ou flexion, de la poutre (barre) se caractérise par la forme de la ligne des incurvations (« ligne élastique ») qu'on identifie habituellement avec la ligne passant par les centres de gravité des sections transversales de la barre ou avec la ligne suivant l'axe de la barre. On n'examinera que le cas où

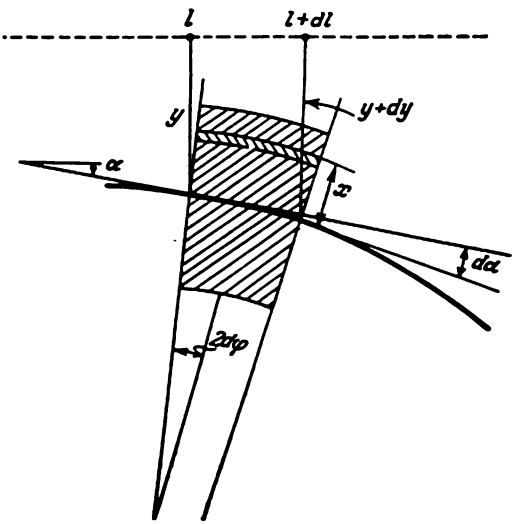


Fig. 257

la ligne élastique est située dans le plan d'action des forces extérieures, c'est-à-dire quand les plans de flexion et d'action des forces coïncident.

Déterminons la ligne des incurvations pour une poutre droite encastrée à un bout et chargée à l'autre par un couple de forces (voir fig. 253). Comme il a été noté au § 89, les angles de pivotement des sections transversales du morceau de la poutre de longueur dl (voir fig. 254) sont égaux à $d\varphi$.

Soit $y = f(l)$ l'équation de la ligne élastique cherchée, où y est l'écart du point de coordonnée l de la droite de l'axe de la barre portant ces points avant la déformation. La grandeur $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dl}$ représente l'angle formé par la tangente à la ligne élastique au point de coordonnée l avec la droite de l'axe (fig. 257). Si l'on considère que les angles de la tangente α sont très petits, on peut écrire

que $\alpha \approx \frac{dy}{dl}$, quant à la variation de la direction de la tangente dans le transfert du point l au point $l + dl$ est:

$$d\alpha \approx \frac{d^2y}{dl^2}\, dl.$$

Comme les sections transversales sont toujours perpendiculaires à la ligne élastique, $d\alpha = 2d\varphi$ (voir fig. 254 et 257) et par suite

$$2d\varphi = d\alpha \approx \frac{d^2y}{dl^2}\, dl, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dl^2} \approx \frac{2d\varphi}{dl}. \tag{90.1}$$

Rappelons-nous que d'après la formule (89.5) le moment des efforts dans la section transversale $M = \frac{\sigma_0}{b} I$. La tension maximale σ_0 (tension dans la couche la plus éloignée) peut être liée en vertu de la loi de Hooke à la déformation de la couche. Les figures 254 et 257 montrent que l'allongement de la couche la plus éloignée de la couche neutre et située à la distance b de cette dernière est:

$$\varepsilon = \frac{d\alpha}{dl}\, b = 2\frac{d\varphi}{dl}\, b, \tag{90.2}$$

quant à la tension en son sein elle est

$$\sigma_0 = E\varepsilon = 2E\frac{d\varphi}{dl}\, b.$$

Considérant (90.1), il vient

$$\sigma_0 \approx Eb\frac{d^2y}{dl^2}. \tag{90.3}$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (89.5) σ_0 par sa valeur tirée de (90.3) et on obtient en définitive l'équation permettant de définir la ligne élastique:

$$M = EI\frac{d^2y}{dl^2}. \tag{90.4}$$

Dans notre cas le moment des efforts subis M est le même pour toutes les sections transversales et est égal au moment de la charge extérieure M_{ex}. En intégrant alors l'équation (90.4), on obtient l'équation de la ligne élastique. Après une première intégration de (90.4) du point d'encastrement $l = 0$ à un certain point $l = \eta$, on obtient la première dérivée de la ligne des incurvations au point η, bref:

$$\left(\frac{dy}{dl}\right)_\eta - \left(\frac{dy}{dl}\right)_0 = \int_0^\eta \frac{d^2y}{dl^2}\, dl = \int_0^\eta \frac{M_{ex}}{EI}\, dl = \frac{M_{ex}}{EI}\,\eta. \tag{90.5}$$

Considérant qu'à l'encastrement $\left(\frac{dy}{dl}\right)_0 = 0$, c'est-à-dire que la direction de la tangente à l'encastrement ne varie pas ou que la section n'y pivote pas, intégrons une seconde fois (90.5) de zéro à tout point de coordonnée l:

$$y(l) - y(0) = \int_0^l \left(\frac{dy}{dl}\right)_\eta d\eta = \int_0^l \frac{M_{ex}}{EI}\,\eta\, d\eta = \frac{M_{ex}}{EI}\,\frac{l^2}{2}. \tag{90.6}$$

La flexion à l'encastrement est nulle, ou $y(0) = 0$. Donc l'équation de la ligne élastique est une parabole :

$$y(l) = \frac{M_{ex}}{2EI} l^2. \tag{90.7}$$

La flexion maximale au bout de la poutre pour $l = L$ est

$$\frac{M_{ex}}{2EI} L^2. \tag{90.8}$$

Voyons maintenant comment varient les déformations de la poutre de longueur L, si elle est encastrée à un bout et est soumise à une charge verticale P à l'autre (voir fig. 252). Procédons comme auparavant : coupons la poutre en un certain endroit se trouvant à la distance l de l'encastrement et déterminons les forces agissant sur une partie isolée de la poutre en section (fig. 258). La nature

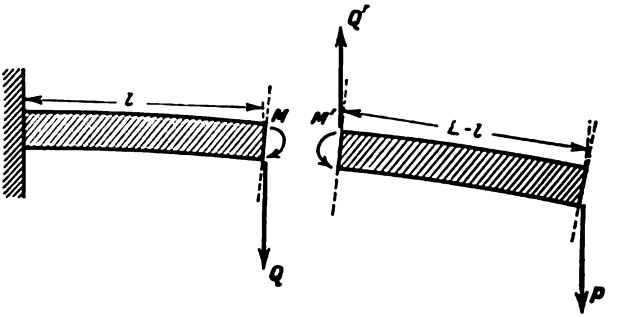


Fig. 258

des efforts subis dans la section transversale changera quelque peu dans ce cas [1], la tension devant présenter une composante tangentielle, car l'équilibre de la partie coupée ne s'établit qu'en présence dans la section de l'effort tangentiel Q' égal numériquement à P et de sens opposé. L'effort Q' est appelé *effort tranchant*. Il est évident que l'effort tranchant possède en toute section la même valeur égale à P. L'effort tranchant Q s'exerçant sur l'autre partie de la poutre est de direction opposée tout en ayant la même grandeur.

Mais le couple de forces P et Q' agissant sur la partie isolée a pour moment

$$P(L - l) = M_1. \tag{90.9}$$

Donc pour l'équilibre de la partie isolée il faut encore un couple de forces dont le moment est égal et opposé au moment M_1. Ces forces ne peuvent être appliquées qu'à la section de la coupure. La poutre doit donc se déformer de la sorte à engendrer des efforts normaux dans la section transversale donnant un moment M', à peu près de la même façon que dans la poutre sollicitée par un couple de forces.

Le moment M' est égal en grandeur au moment M_1 et lui est opposé ; d'où il s'ensuit que M, moment des efforts subis par la partie restante, est égal à M_1. Le moment des efforts normaux n'est plus donc le même dans les différentes sections. En effet, la grandeur du moment M_1 dépend de la coordonnée de la section l et, par suite,

$$M = M_1 = P(L - l). \tag{90.10}$$

[1] Comparé à ce qu'on a vu au § 89.

Les efforts subis dans la section se composent des tensions normales liées à la traction et à la compression des couches et des tensions tangentielles engendrant l'effort tranchant Q. Donc dans le calcul de la déformation de l'élément de la poutre il faut tenir compte également des tensions tangentielles. Cependant la confrontation des calculs à l'expérience montre que l'influence des forces tangentielles est faible et on peut donc effectuer le calcul des déformations de l'élément de la poutre comme si les efforts tangentiels n'existaient pas, de la façon faite plus haut.

Le calcul de la ligne élastique d'une poutre se ramène donc à la solution de la même équation (90.4):

$$M = EI \frac{d^2y}{dl^2}. \tag{90.11}$$

Mais dans ce cas le moment des efforts subis M dépend de la coordonnée, comme il découle de l'expression (90.10). On a donné à la figure 259 le graphique de la répartition des moments le long de la poutre.

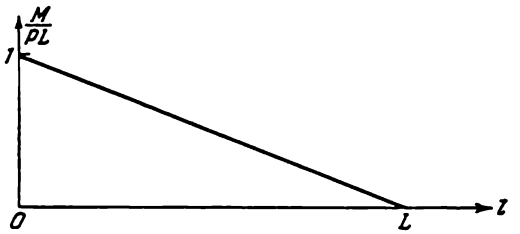


Fig. 259

Si la section transversale est la même tout au long de la poutre, la section « dangereuse », qui est la section des tensions normales maximales, sera située à l'encastrement de la poutre, au bout de coordonnée $l = 0$. La tension maximale sera alors

$$\sigma_{0\,\max} = \frac{M_{\max}}{w} = \frac{PL}{I} b, \tag{90.12}$$

où b est la distance à la couche neutre de la couche la plus éloignée, et I le moment d'inertie de la section d'encastrement. Si à l'encastrement de la poutre les tensions dans la poutre sont suffisamment petites, elles seront encore plus faibles dans toutes les autres sections de la poutre. Si la poutre se rompt pour une charge trop grande, cette rupture se fera au point d'encastrement.

Ainsi donc le problème de calcul de résistance des poutres débute par la détermination des moments fléchissants le long de la poutre pour toutes les sections transversales. Dans nombre de cas le calcul de la répartition des moments fléchissants s'effectue simplement sur la base des charges données et des conditions aux appuis de la poutre.

Par exemple, la poutre repose sur deux appuis libres, comme c'est montré à à la figure 260, a et elle supporte une charge P s'exerçant à la distance a de l'appui droit A. Déterminons les réactions des appuis F_B et F_A ou les forces agissant sur la poutre de la part des appuis. Il nous faut, pour la suite, ne connaître que la réaction F_A. La réaction d'appuis est obtenue à partir des conditions d'équilibre de toute la poutre. Dans l'équilibre, le moment des forces par rapport à tout point, par exemple le point B, est nul. D'où

$$F_A L = Pb, \quad \text{ou } F_A = \frac{Pb}{L}. \tag{90.13}$$

Des conditions d'équilibre de la partie coupée $L - l$, comme dans l'exemple précédent, on déduit que le moment des efforts normaux dans la section transversale de coordonnée $l < b$ est égal au moment fléchissant (moment de toutes les forces appliquées à la partie coupée) :

$$M_1 = P(b-l) - F_A(L-l) = -P\frac{la}{L}. \tag{90.14}$$

Telle sera la répartition du moment fléchissant sur le segment de la poutre allant de l'appui B jusqu'au point d'application de la force. Pour des sections se trouvant au-delà de ce point, quand $l > b$, le moment sera

$$M_1 = -F_A(L-l) = -Pb\left(\frac{L-l}{L}\right). \tag{90.15}$$

Le graphique de la répartition des moments $M_1 = M(l)$ le long de la poutre est donné sur la figure 260, *b*. Le graphique des efforts tranchants est donné à la figure 260, *c*, l'effort tranchant Q' au point d'application de la force extérieure P y réalisant un saut de la grandeur de cette force.

Connaissant la répartition des moments fléchissants $M(l)$, on peut déterminer la section « dangereuse » si est connu le moment de résistance $w = \frac{I}{b}$ pour chaque section de la poutre.

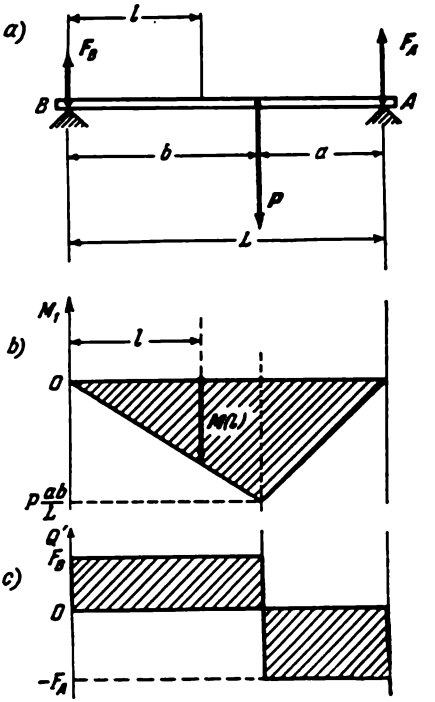


Fig. 260

Pour déterminer la ligne des incurvations, il faut intégrer deux fois le second membre de l'équation

$$\frac{d^2y}{dl^2} = \frac{1}{EI} M(l), \tag{90.16}$$

où $M(l)$ est une fonction connue de l, E le module de Young et I le moment d'inertie de la section qui sont également des grandeurs connues.

Dans les cas examinés précédemment la variation du moment fléchissant le long de la poutre est fonction des charges extérieures et est indépendante des caractéristiques des appuis ainsi que des propriétés de la poutre elle-même.

§ 91. DÉFORMATION DES APPUIS

Pour la solution du problème de la déformation d'une poutre reposant sur deux appuis (§ 90) on a d'abord cherché les forces agissant sur la poutre de la part des appuis (réactions d'appuis). Ensuite, une fois ces forces trouvées, on a abordé le problème de la déformation de la poutre sous l'action des forces extérieures connues parmi lesquelles figuraient aussi les réactions d'appuis. Cette voie de la solution du problème n'est admissible que quand les réactions d'appuis *ne dépendent pas* des déformations de la poutre et de celles des appuis, la

déformation de la poutre même étant *complètement indépendante* de celle des appuis.

Dans d'autres problèmes, plus compliqués, où la grandeur des réactions dépend des déformations de la poutre et des appuis, cette voie ne peut être choisie, car un problème plus complexe se pose : il faut chercher les réactions et déterminer en même temps les déformations de la poutre et des appuis.

Pour cerner les particularités de ces problèmes, examinons deux exemples dans lesquels seront mesurées les réactions d'appuis. Soit une planche en bois (poutre) accrochée à *deux* dynamomètres par des ressorts A et B (fig. 261). Suspendons à cette barre une charge P, et les dynamomètres indiqueront la grandeur des réactions d'appuis. Si on fait varier la rigidité du ressort A, en l'augmentant par exemple de deux fois, les réactions d'appuis de la planche resteront pratiquement invariables. Si l'on diminue la rigidité de la planche (en la faisant pivoter de 90° sur son axe) les réactions d'appuis ne varieront également pas.

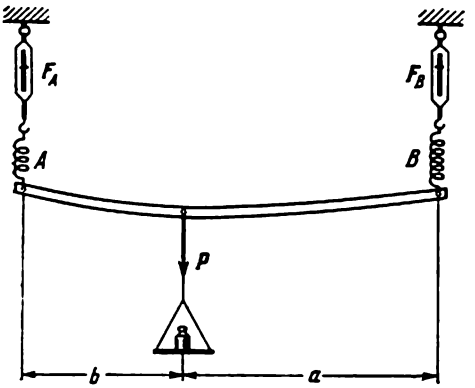


Fig. 261

En effet, dans le cas considéré il s'ensuit des conditions d'équilibre de la poutre que la force du ressort A est

$$F_A = \frac{a}{a+b} P \qquad (91.1)$$

et du ressort B

$$F_B = \frac{b}{a+b} P.$$

Etant donné que dans la déformation des ressorts et de la planche les grandeurs a et b ne varient presque pas, les indications des dynamomètres sont pratiquement indépendantes des déformations des appuis comme de la poutre elle-même. Les équations (91.1) sont la conséquence du repos de la planche et ne dépendent pas de sa déformation et de la déformation des ressorts des appuis A et B. Il en était ainsi lors de l'analyse des déformations de la poutre au § 90, seulement on n'y a pas cherché la grandeur des déformations des appuis.

Tout autre sera la situation si la même planche est accrochée à *trois* ressorts (fig. 262). Dans ce cas les indications des dynamomètres dépendront de la rigidité des ressorts et de la planche. En effet, si le ressort C est très rigide devant les ressorts A et B, le dynamomètre C indiquera une force à peu près égale à la charge P, tandis que les indications des dynamomètres A et B seront de beaucoup inférieures. Et, inversement, en diminuant la rigidité du ressort C, on peut faire croître les réactions aux extrémités de la planche presque jusqu'aux grandeurs données par les formules (91.1). De même, en augmentant la rigidité de la planche, les ressorts restant invariables, on fait croître la force F_C indiquée par le dynamomètre du milieu.

Donc le problème de la déformation d'une poutre reposant sur trois appuis ne peut être résolu sans prendre en compte les déformations de la poutre et des appuis. En effet, on a deux conditions d'équilibre de la poutre : l'égalité à zéro de toutes les forces et l'égalité à zéro des moments de toutes les forces, le nombre de réactions inconnues figurant dans ces conditions étant de trois. C'est pourquoi dans ces problèmes, que les mécaniciens appellent problèmes aux *réactions hyperstatiques*, il est impossible d'obtenir les réactions d'appuis avant la solution du problème des déformations de la poutre, ou plus généralement, avant la solution

du problème des déformations du corps et de ses appuis, bref il faut résoudre un problème beaucoup plus compliqué. Examinons deux exemples intéressants.

1) Poutre encastrée à un bout dans le mur et à l'autre s'appuyant sur un ressort A (fig. 263). Du côté de l'appui, sur la poutre agit vers le haut la force du ressort R_A qui est la réaction

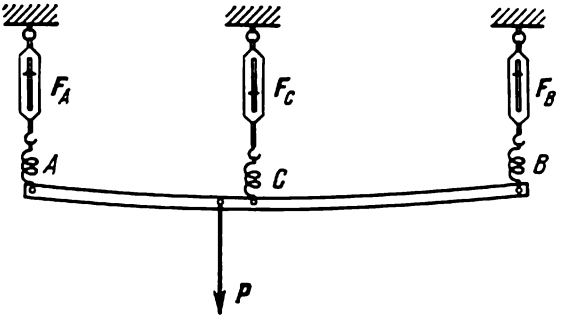


Fig. 262

d'appui. Du côté de l'encastrement, dans la section B qui ne peut pivoter, sur la poutre agit un ensemble compliqué de forces réparties, qu'on peut réduire à une force F_0 et à un moment M_0.

Pour déterminer les moments fléchissants et les efforts tranchants dans chaque section de la poutre, il faut connaître les grandeurs R_A et P. Mais la grandeur R_A ne peut être trouvée sans la connaissance de F_0 et M_0, car deux équations

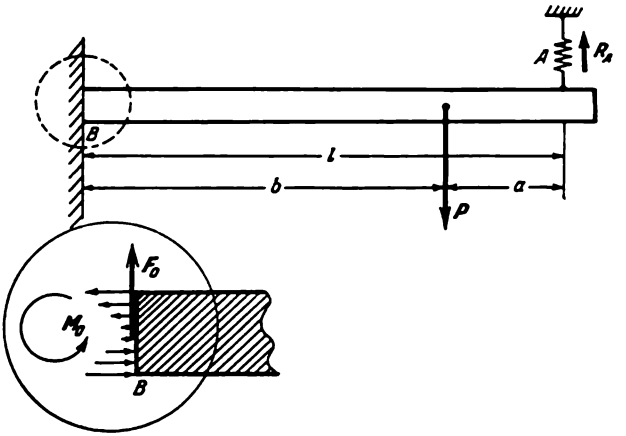


Fig. 263

de la statique ne peuvent donner trois grandeurs F_0, M_0 et R_A. Les grandeurs des forces R_A et F_0 et du moment M_0 dépendent essentiellement de la rigidité du ressort de l'appui A.

La solution du problème qui tient compte des déformations des appuis peut être obtenue de la façon suivante. On suppose au début qu'il n'y a pas de ressort et que la poutre, outre la force P donnée, est sollicitée au point A par une cer-

taine force (arbitraire) R dirigée dans le sens opposé à P. Dans ces conditions on cherche la déformation de la poutre au point A comme une fonction de la grandeur de la force R, $y_A = f(R)$. On peut tout simplement calculer y_A en utilisant l'équation fondamentale de la ligne élastique de la poutre (90.4). Supposons que la poutre a une section constante et que son moment d'inertie est I et son matériau a pour module de Young E, alors

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}, \tag{91.2}$$

où $M(x)$ est le moment fléchissant à la distance x de l'encastrement, qui est évidemment égal à

$$M(x) = P(b - x) - R(l - x) \text{ dans l'intervalle } 0 \leqslant x \leqslant b$$
$$M(x) = -R(l - x) \text{ entre } b \leqslant x \leqslant l.$$

En intégrant successivement deux fois $\frac{1}{EI} M(x)$, on trouve sur l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant b$ les grandeurs $\frac{dy}{dx}$ et y. En en tirant $\frac{dy}{dx}(b)$ et $y(b)$, on trouve par la même voie $y(x)$ dans l'intervalle $b \leqslant x \leqslant l$. En définitive on obtient

$$y(l) = y_A = \frac{Pb^2}{3EI}\left(b + \frac{3}{2}a\right) - \frac{Rl^3}{3EI}, \quad \text{où } a = l - b. \tag{91.3}$$

On a ainsi trouvé la déformation de la poutre soumise à l'action des forces P et R. Ensuite, on trouve la déformation du ressort de l'appui sous l'action de la force R qui est

$$y_A = \frac{1}{k} R, \tag{91.4}$$

où k est le coefficient de rigidité du ressort. Egalant l'une à l'autre la déformation de la poutre y_A et la déformation du ressort de l'appui, on obtient la force R_A avec laquelle le ressort agit sur la poutre.

De l'égalité des expressions (91.3) et (91.4) on tire

$$R_A = P \frac{b^2(b + 3/2\,a)}{\left(1 + \frac{3EI}{kl^3}\right) l^3}.$$

Maintenant, connaissant la force R_A exercée par le ressort au point d'appui A sur la poutre, déterminons par la voie habituelle la déformation de la poutre encastrée dans le mur et soumise à l'action de deux forces, P et R_A ; ainsi, par exemple, pour déterminer la flèche au point l, portons $R = R_A$, trouvée au début dans (91.3).

Notons que pour un ressort parfaitement rigide ($k \to \infty$) la grandeur de la réaction d'appui ne dépend pas des propriétés élastiques et est

$$R_A = \left(\frac{b}{l}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{2}\frac{a}{b}\right) P, \tag{91.5}$$

et cela avec

$$R_A < P\frac{b}{l}.$$

La grandeur $P\frac{b}{l}$ est égale à la réaction de l'appui A de la poutre reposant sur deux appuis aux points A et B (voir fig. 260, a). Puisque $R_A < P\frac{b}{l}$, le moment

dans la section de l'encastrement dans le mur égal à $Pb - R_A l$ sera plus grand que zéro.

Pour $k \to 0$ et un ressort très faible, son action R_A tend également vers zéro. Dans ce cas le moment dans l'encastrement est entièrement équilibré par le moment de la force extérieure Pb, ou $M(0) = Pb$, ce qui se voit immédiatement.

Par des voies à peu près similaires se résolvent également des problèmes plus compliqués. Rappelons la marche à suivre: d'abord on remplace toutes les réactions d'appuis inconnues par des forces quelconques et on cherche la solution

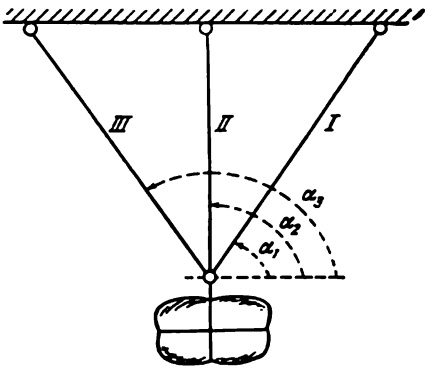


Fig. 264

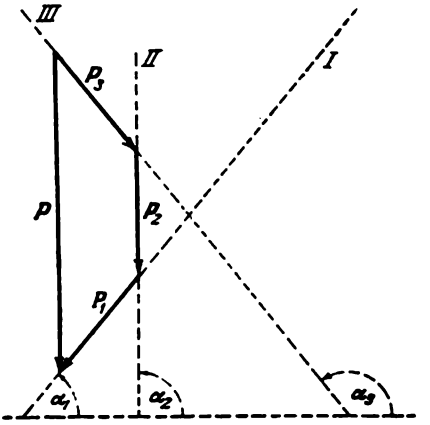


Fig. 265

du problème des déformations avec l'action de ces forces encore inconnues. Ensuite, on détermine la déformation des appuis quand ces forces s'exercent. Egalant les grandeurs des déformations des appuis et de la poutre dans les deux cas, on obtient un système d'équations permettant de calculer les réactions inconnues. Une fois la grandeur des réactions connue, on détermine trivialement la déformation du corps.

2) Charge soutenue par trois câbles. C'est un exemple d'un genre un peu différent et la solution en sera recherchée d'une autre manière, mais l'essence du problème est la même.

Une charge est soutenue par trois fils, câbles ou tiges se trouvant dans un même plan (fig. 264). Si la suspension était réalisée au moyen de deux câbles, la grandeur des efforts dans chaque câble dépendrait non pas des propriétés élastiques des câbles, mais seulement des angles qu'ils forment avec la verticale, car la force de pesanteur de la charge P peut toujours se décomposer univoquement en deux forces dirigées suivant des directions voulues.

Mais au cas d'une suspension par trois câbles cela ne peut être fait, même si l'on connaît les angles que les câbles font avec la verticale. En effet, il est impossible de décomposer univoquement une force en trois composantes suivant trois directions données (fig. 265). On a tracé en pointillé des lignes parallèles aux directions des câbles et formant des angles α_1, α_2, α_3 avec l'horizontale, de sorte que tout polygone fermé composé de trois vecteurs de directions indiquées par les lignes en pointillé et s'appuyant sur le vecteur P fournit de façon formelle la solution du problème.

On ne peut déterminer les forces dans les câbles qu'une fois connues leurs propriétés élastiques. Pour simplifier, supposons que les câbles latéraux sont identiques et le câble du milieu, vertical. Dans ce cas $\alpha_2 = \pi/2$ et $\alpha_1 + \alpha_3 = \pi$. Soit l_1 la longueur du câble du milieu, son module de Young étant E_1 et celui des

câbles latéraux E_2 et leurs sections transversales respectivement S_1 et S_2. La déformation du câble du milieu Δl_1 est liée à celle du câble latéral Δl_2 par l'égalité suivante (fig. 266)

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \sin \alpha_1. \tag{91.6}$$

L'effort au sein du câble du milieu est

$$P_1 = \frac{E_1 S_1}{l_1} \Delta l_1, \tag{91.7}$$

et au sein du câble latéral

$$P_2 = \frac{E_2 S_2}{l_2} \Delta l_2.$$

Considérant (91.6) il vient

$$P_2 = \frac{E_2 S_2}{l_2} \Delta l_1 \sin \alpha_1. \tag{91.8}$$

Comme la somme des forces dans les câbles doit être égale au poids de la charge,

$$P = P_1 + 2P_2 \sin \alpha_1. \tag{91.9}$$

Portant dans l'égalité (91.9) les valeurs des forces tirées des formules (91.7) et (91.8), on obtient

$$P = \left(\frac{E_1 S_1}{l_1} + \frac{2E_2 S_2}{l_2} \sin^2 \alpha_1 \right) \Delta l_1, \tag{91.10}$$

d'où on déduit l'allongement du câble du milieu:

$$\Delta l_1 = \frac{P}{\dfrac{E_1 S_1}{l_1} + \dfrac{2E_2 S_2}{l_2} \sin^2 \alpha_1}. \tag{91.11}$$

Portant cette expression dans les formules (91.7) et (91.8), on trouve la solution cherchée

$$P_1 = \frac{P}{1 + 2\dfrac{E_2 S_2 l_1}{E_1 S_1 l_2} \sin^2 \alpha_1}, \quad P_2 = \frac{P \sin \alpha_1}{2 \sin^2 \alpha_1 + \dfrac{E_1 S_1 l_2}{E_2 S_2 l_1}}. \tag{91.12}$$

Notons que dans ces exemples, comme dans des cas analogues, on suppose que la déformation est très faible devant les dimensions du corps. C'est ainsi, par exemple, que dans le premier cas on a supposé la longueur de la poutre invariable dans la déformation et les angles d'inclinaison de la ligne élastique très faibles, et dans le second cas, les angles entre les câbles invariables dans l'extension sous l'impulsion de la charge. Ces hypothèses ne correspondent pas à la réalité pour des grandes déformations des corps, les calculs devenant alors fort compliqués.

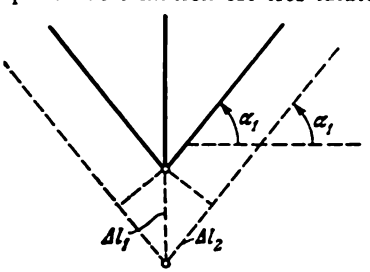


Fig. 266

Bref, deux cas se présentent: le premier est simple, les déformations élastiques du corps ne dépendant pas de la rigidité des appuis et toutes les forces agissant sur le système et le déformant se déterminent univoquement par les forces extérieures données et par la géométrie: le second est plus compliqué, les déformations élastiques dépendant de la rigidité des appuis aussi faibles que soient les déformations de ces derniers. Dans ce cas les déformations des appuis jouent

un rôle de principe et déterminent la grandeur des réactions d'appuis ainsi que les déformations élastiques de tout le système. Dans le second cas le nombre des conditions physiques déterminant les déformations élastiques s'accroît. Il faut donc être très attentif quand on étend des lois connues à un groupe plus large de phénomènes à première vue paraissant analogues. Au premier abord le problème de la charge suspendue à deux fils semble très semblable à celui de la charge suspendue à trois fils. Or, dans le premier cas les forces dans les fils ne dépendent pas du matériau et dans le second cette force est essentiellement liée à la matière et à la section du fil.

§ 92. ACCÉLÉRATIONS (SURCHARGES), IMPESANTEUR ET TENSIONS

Soumis à l'action des forces dues au poids propre du corps, ce dernier devient toujours le siège de tensions. Si le corps repose sur un support (fig. 267), la force gravitationnelle est appliquée à chacun de ses éléments, quant à la réaction du support Q' qui contrebalance la pesanteur résultante P, elle ne s'applique qu'à la surface de contact du corps avec le support. En effet, sur le corps agissent les forces extérieures suivantes : sur chaque particule de masse

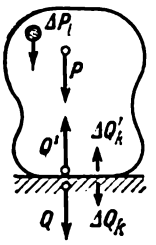


Fig. 267

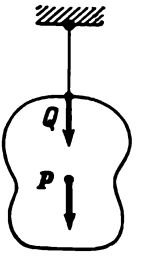


Fig. 268

Δm_i la force de pesanteur ΔP_i et suivant la surface de contact avec le support, les forces $\Delta Q'_k$. Il est évident que

$$P = \sum \Delta P_i \text{ et } Q' = \sum \Delta Q'_k.$$

Sous l'action de ces forces le corps se déforme et il apparaît en son sein des efforts et des tensions intérieurs dont la répartition est complexe ; elle dépend de la structure du corps et de ses propriétés élastiques. Mais il est évident que dans la partie inférieure du corps les tensions sont plus grandes et atteignent des valeurs maximales près du support. La pesanteur

$$Q = \sum \Delta Q_k$$

est appliquée au support ; elle est de nature physique différente que la force de gravitation P qui lui est égale. Si on suspend le corps par le fil qui lui est attaché (fig. 268) $Q = P$, mais la distribution des forces et des tensions dans ce corps sera différente : d'a-

bord les tensions ont un signe différent et, ensuite, les grandeurs des tensions sont supérieures en haut et atteignent les valeurs les plus grandes au point d'attache du fil au corps [1].

On peut illustrer de façon parlante les déformations sous l'action de la pesanteur en prenant pour exemple un long ressort en fil fin (fig. 269). Dans un cas le ressort repose sur une table, comme c'est montré à la figure 269, *a*, dans l'autre, il est suspendu à une extrémité (fig. 269, *b*) et dans le troisième, il repose allongé sur la table (fig. 269, *c*). La forme du ressort ainsi que les tensions en son sein sont chaque fois différentes.

Les tensions normales σ dans un cylindre homogène de longueur l et de section transversale S sont données pour deux cas différents

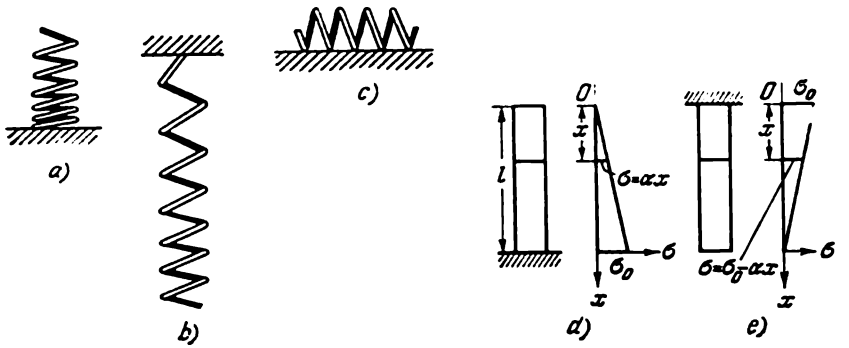


Fig. 269

sur les figures 269, *d* et *e*. Pour un cylindre posé sur un support (fig. 269, *d*), dans la section transversale, située à la distance x de l'extrémité supérieure, les tensions de *compression* normales sont égales à $\sigma = \alpha x$, où $\alpha = \sigma_0/l$; $\sigma_0 = Q/S$ sont les tensions inférieures (près du support), Q étant le poids du cylindre. Pour un cylindre collé par sa base supérieure au plafond (fig. 269, *e*), les tensions de *traction* normales dans la section x sont $\sigma = \sigma_0 - \alpha x$. Dans le premier cas les tensions augmentent en grandeur vers le bas, dans le second, elles diminuent. Le diamètre de la section transversale, dans les deux cas, croît vers le bas; cet accroissement peut être calculé d'après la formule (84.1).

Il se produit ainsi dans la pratique avec tout corps, seulement quelquefois, les déformations sont très faibles; par exemple, elles seront infimes pour un poids de un kilogramme.

En état d'*impesanteur* toutes ces tensions dans toutes les sections seront nulles, c'est-à-dire $\sigma(x) = 0$ pour tout x.

[1] Il est évident que dans ce cas le fil doit être assimilé à un « support », autrement dit la force poids s'exerce sur le fil en le tendant.

Les tensions intérieures acquièrent un rôle particulièrement important et une valeur sensible au cas de variation du poids du corps mis en « accélération ». On appelle accélération le rapport de la grandeur des forces de masse dans un référentiel accéléré à la force de gravitation. Si l'on considère le corps au repos par rapport au référentiel en mouvement de translation accélérée, alors chaque particule du corps de masse Δm devient soumise à deux forces de masse : la force de gravitation $\Delta \boldsymbol{P}$ et la force d'inertie $-\Delta m\, \boldsymbol{a}$ (fig. 270). La pesanteur du corps dans ce système est égale à

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P} - m\boldsymbol{a}; \qquad (92.1)$$

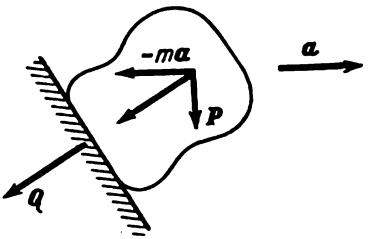


Fig. 270

elle est appliquée au support qui maintient le corps dans le référentiel accéléré. Cette formule doit être considérée comme la définition la plus générale de la pesanteur utilisable pour tout système. On peut de même introduire la pesanteur pour une particule du corps :

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \Delta \boldsymbol{P} - \Delta m\boldsymbol{a}, \qquad (92.2)$$

mais dans ce cas il faut noter que les forces de masse $\Delta \boldsymbol{P}$ et $-\Delta m\boldsymbol{a}$ sont appliquées à la particle, tandis que la force $\Delta \boldsymbol{Q}$ l'est à la surface entourant la particule considérée.

On appelle accélération (surcharge) le rapport[1]

$$n = \frac{[\Delta \boldsymbol{P} - \Delta m\boldsymbol{a}]}{[\Delta \boldsymbol{P}]}. \qquad (92.3)$$

L'accélération montre de combien de fois le module de la pesanteur dans le système donné est supérieur à la force de gravitation.

Remarquons que la force de gravitation ne dépend que de la position mutuelle des corps. En automobile, dans la voiture d'un train, en avion, s'ils sont animés d'un mouvement accéléré, l'homme a le sentiment d'une accélération, surtout à l'instant où l'accélération $\boldsymbol{a}$ varie ou sa grandeur est trop grande (plusieurs fois g). De très grandes accélérations de l'ordre de 10 g provoquent des sensations douloureuses, par suite de l'augmentation de 10 fois du poids de tous les organes humains, et ce n'est qu'un temps très court qu'un être humain sain et entraîné peut supporter de telles accélérations.

Il est évident qu'en état d'impesanteur $\Delta Q = 0$, la force de gravitation étant équilibrée par la force d'inertie, l'accélération

[1] Dans les applications techniques on appelle quelquefois accélération la grandeur $n - 1$.

est également nulle et toute particule n'exerce aucune action sur les particules voisines. Aucune tension due au poids n'apparaît dans le corps. Dans un tel état tout corps physique est libéré des tensions *habituelles* [1]. Tous les corps sur la Terre se trouvent-ils au repos ou en mouvement, à l'exception des corps en chute libre, sont sollicités par des efforts dus au poids et possèdent des tensions intérieures correspondantes. Pour une accélération n ces tensions augmentent de n fois.

Notons les variations de poids engendrées par la rotation du référentiel accéléré. Il est évident que dans tout référentiel le poids n'acquiert un sens que pour des corps au repos dans ce référentiel. Donc les variations de poids au cours des rotations du référentiel ne seront dues qu'à l'action des forces d'inertie centrifuges.

Sur chaque particule outre la force de gravitation $\Delta \boldsymbol{P}$ et la force d'inertie $-\Delta m\boldsymbol{a}$ engendrée par le mouvement de translation accéléré du référentiel, agira une force d'inertie centrifuge $\Delta m\omega^2\boldsymbol{\rho}$, où $\boldsymbol{\rho}$ est le vecteur de la distance de la particule de l'axe de rotation. Cette dernière force est, en général, différente pour les divers points du corps, mais leur résultante est appliquée au centre des masses du corps et est égale à $m\omega^2\boldsymbol{\rho}_0$, où $\boldsymbol{\rho}_0$ est le vecteur distance de l'axe au centre des masses du corps. Alors

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P} - m\boldsymbol{a} + m\omega^2\boldsymbol{\rho}_0.$$

Le poids du corps à la surface de la Terre en rotation sur elle-même ne diffère de $\boldsymbol{P}$ que de la grandeur de la force d'inertie centrifuge $\boldsymbol{a} = 0$.

On souligne la différence entre la notion de pesanteur et celle de force de gravitation, car en état d'*impesanteur* sur le corps *n'agit que la force de gravitation* (si l'on étudie le mouvement dans un référentiel galiléen), tandis que la *pesanteur est nulle* et le corps est libéré des tensions intérieures.

---

[1] Il s'agit ici toujours de tensions engendrées par la pesanteur; on peut observer également des tensions dues à la structure du corps, à l'hétérogénéité, aux traitements thermiques, etc., toutes ces tensions se conservent en état d'impesanteur.

CHAPITRE XI

CORPS LIQUIDES ET GAZEUX EN ÉTAT D'ÉQUILIBRE

§ 93. CORPS SOLIDES, LIQUIDES ET GAZEUX

Tous les corps solides sont composés d'infimes particules, c'est-à-dire de molécules se trouvant constamment en mouvement. Dans des corps solides les molécules effectuent des oscillations autour d'une certaine position d'équilibre. Mais ces déplacements des molécules sont si infimes qu'ils n'exercent aucune influence sur le mouvement des corps ou de leurs parties étudiés en mécanique. La position mutuelle moyenne des molécules dans le corps solide est bien déterminée. Dans l'analyse habituelle des mouvements du corps sa particule infime [1] est composée d'un si grand nombre de molécules que cette particule peut être considérée comme continue et ininterrompue au cours de son mouvement ou de sa déformation.

Chaque corps solide possède une forme qui lui est propre. Pour faire varier cette forme, il faut appliquer au corps ou à ses parties certaines forces. C'est pourquoi un corps solide, à la différence d'un corps liquide ou gazeux, conserve sa forme. Les liquides et les gaz constituent des corps physiques dont la forme est indéterminée et est fonction du récipient qu'ils remplissent.

Il faut remarquer que la différence notée entre les corps solides et liquides est à certains égards arbitraire et ne concerne que la mécanique. Un même corps se comporte comme un corps solide ou un corps liquide, suivant la nature du phénomène dans lequel il participe. Par exemple, en lançant une toupie dont le disque est en asphalte on s'aperçoit que la toupie se conduit comme un corps solide; mais le même disque déposé au soleil sur un appui de fenêtre s'étale comme un liquide. Une distinction plus précise et plus générale entre les corps liquides et solides sera donnée au cours de l'étude de la physique du corps solide. Dans la présente étude on n'a en vue que des objectifs mécaniques et la distinction mentionnée peut complètement se justifier.

Dans le gaz les molécules effectuent des mouvements désordonnés, chaotiques, elles y entrent constamment en collision l'une avec l'autre, telles des billes en matière solide. Les molécules ne

---

[1] On appelle particule du corps donné un certain volume suffisamment petit du corps qui en a été dégagé, les dimensions de ce volume étant très petites devant celles du corps lui-même.

sont pas liées ensemble au cours de leur lancée et les particules, par suite de constantes collisions, tendent à se disperser dans tous les sens, le gaz remplissant ainsi de façon uniforme tout le volume offert. Le gaz est donc un corps physique qui ne possède ni de forme déterminée ni de volume déterminé. Le volume du gaz se définit par le volume du récipient qu'il remplit. Dans l'étude des phénomènes mécaniques le gaz peut également être considéré comme un corps continu et ininterrompu qui tend à s'étendre pour remplir de façon uniforme le volume qui lui est dévolu. Cette représentation ne se justifie qu'au cas où les particules infimes du corps gazeux sont composées d'un très grand nombre de molécules. Ainsi, par exemple, dans des conditions habituelles le nombre de molécules au sein de 1 mm^3 d'air est d'environ de l'ordre de grandeur de 10^{16}.

Dans les liquides, comme dans les gaz, les molécules ne sont pas liées ensemble de façon permanente; dans leurs mouvements désordonnés, chaque molécule se meut par rapport à l'autre de façon quelconque. Mais dans un liquide, à la différence du gaz, la distance moyenne entre les molécules se conserve *presque constante*. Par conséquent, les liquides sont des corps physiques ne présentant pas de forme déterminée, mais conservant un même volume. Le volume du liquide ne varie que pour des modifications sensibles des forces extérieures s'exerçant sur lui.

Un corps liquide est toujours limité par une certaine surface qui le sépare du corps solide ou gazeux; dans ce dernier cas la surface du liquide est dite *libre*.

Les corps gazeux sont généralement limités par des surfaces liquides ou solides, mais ils peuvent également être dépourvus de surface frontière, comme, par exemple, les couches supérieures de l'atmosphère terrestre.

En mécanique, avec un degré de précision suffisante, on admet que les corps solides, liquides et gazeux sont continus et ininterrompus en posant que le corps solide dans des conditions extérieures invariables possède une *forme* et un *volume* qui lui sont propres, le corps liquide ne possède qu'un *volume* déterminé, tandis que le corps gazeux n'a *ni forme ni volume* qui lui soit propre.

§ 94. NOTION DE PRESSION

Un corps liquide ou gazeux placé dans un récipient fermé peut être soumis à une action extérieure constante. Soit un liquide (ou un gaz) remplissant un cylindre muni d'un piston (fig. 271). Si sur le piston agit une force F et le piston et le liquide sont en équilibre, il s'ensuit que le liquide (ou le gaz) agit sur le piston avec une force égale et de sens opposé F'. Des conditions d'équilibre d'un certain volume de liquide en contact direct avec le piston il suit

que des forces émanant des parties environnantes du liquide agissent sur ce volume, autrement dit dans le liquide, de même que dans un corps solide, on voit apparaître des efforts et des tensions intérieurs.

Les efforts et les tensions constants dans le temps (statiques) s'exerçant dans le liquide (ou le gaz), présentent une différence de principe avec les tensions dans le corps solide vu que les tensions dans les liquides et les gaz n'ont pas de composante *tangentielle*. Les tensions et les efforts intérieurs dans le liquide et le gaz sont

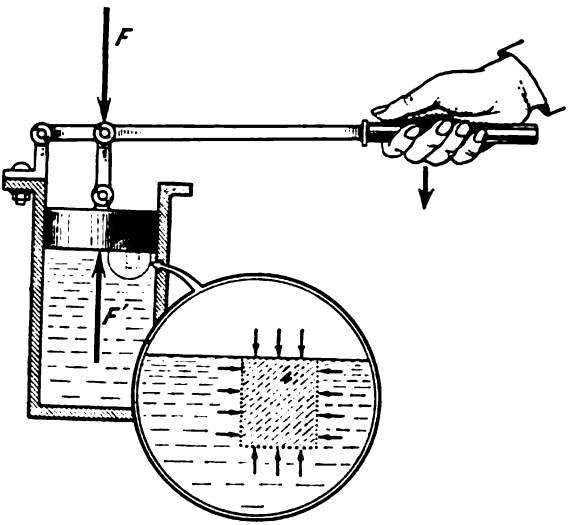


Fig. 271

toujours normaux à la surface de tout volume dégagé. Les liquides et les gaz en état d'équilibre ne peuvent transmettre les efforts tangentiels d'une partie à l'autre. Cela a été mentionné dans le chapitre traitant du frottement, où on a noté que le frottement de repos (statique) pour les liquides et les gaz est nul (§ 38). Cette assertion se démontre au moyen d'une série d'expériences. L'expérience la plus simple est celle du corps flottant dans un liquide (voir fig. 95) ; dans ce cas toute force f s'exerçant dans la direction horizontale provoque le mouvement du corps.

La même propriété est propre aux gaz. Par exemple, un ballon baudruche flottant librement dans l'air de la chambre peut être déplacé de côté par une force aussi petite qu'elle soit. Le gaz (l'air) ne s'oppose pas au déplacement du ballon.

Il s'ensuit des expériences fort simples que dans les corps liquides et gazeux en état d'équilibre il ne peut être engendré que des

tensions normales qui presque toujours (pour les gaz toujours) compriment le volume isolé. Aussi appelle-t-on *pression* les tensions dans les liquides et les gaz. Donc la pression est une force s'exerçant sur l'unité d'aire de la surface du volume isolé et qui est dirigée normalement à cette surface.

La pression a la dimension de la force divisée par l'aire et on prend pour unité de pression dans le système SI le *pascal* (Pa):

$$1\text{Pa} = \frac{1\text{N}}{1m^2}.$$

Dans le système CGS on prend pour unité de pression le *bar*: 1 bar = 1 dyne/cm^2.

Les mécaniciens mesurent habituellement la pression en kgf/cm^2 ou en kgf/m^2. La première de ces unités est appelée *atmosphère technique* (at). D'autre part on mesure souvent la pression en physique par la hauteur de la colonne de mercure d'un manomètre à mercure. Ce mode de mesure comporte son unité propre — *l'atmosphère physique* (ou normale), (atm):

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg} = 1{,}033 \text{ at} = 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Dans les liquides et les gaz en équilibre la pression obéit au principe de Pascal qui s'énonce ainsi: *dans un liquide* (ou *un gaz*) *incompressible en équilibre la pression est la même quelque soit le sens et, en outre, les variations de pression se transmettent intégralement en tous les points du volume occupé par le liquide* (ou *le gaz*) *au repos.*

Le principe de Pascal se déduit des conditions d'équilibre du volume de forme quelconque, si l'on imagine qu'il est isolé au sein du liquide (ou du gaz).

La première partie de ce principe se démontre en faisant appel à des raisonnements identiques à ceux fournis lors de la détermination des tensions dans un corps déformé (§ 85).

On peut également justifier ce principe par l'expérience. Soit un ajutage tel qu'il est montré à la figure 272, *a*. Il est constitué de trois tubes soudés ensemble dont les bouts ouverts se rejoignent en un point. Chaque tube est relié à un appareil mesurant la pression, le manomètre. En plongeant l'ajutage dans un liquide soumis à une pression (fig. 272, *b*) on constate que, quelle que soit la force agissant sur le piston et quelle que soit l'orientation de l'ajutage, les trois manomètres indiquent la même pression. En faisant varier la force agissant sur le piston, on augmente la pression au voisinage du piston d'une certaine grandeur, et la même grandeur augmente la pression dans tout ajutage placé en n'importe quel endroit et de manière quelconque au sein du liquide.

Puisque pour tout volume isolé, suffisamment petit, la force du poids est négligeable, devant les forces s'exerçant à sa surface, la pression sur une petite plaque d'orientation quelconque et passant par le point considéré du liquide (ou du gaz) est la *même*.

La seconde partie du principe de Pascal se dégage des raisonnements suivants.

Montrons qu'en tous les points d'un liquide (ou d'un gaz) en équilibre, appartenant à un même plan horizontal, la pression est la même. Isolons un volume de liquide en forme de prisme s'étendant de A à B, qui sont deux points d'un

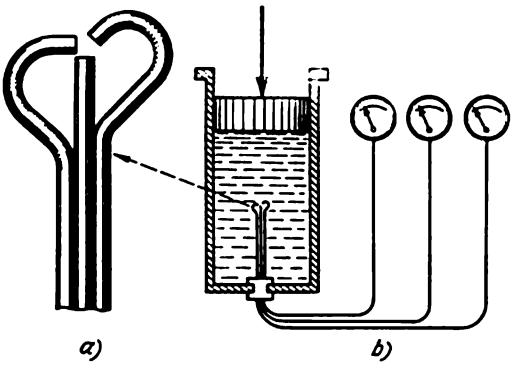


Fig. 272

même plan horizontal où l'on veut comparer la pression (fig. 273). Des conditions d'équilibre du prisme il suit que la pression à l'un de ses bouts doit être égale à la pression enregistrée à l'autre et, par suite, est démontrée l'assertion

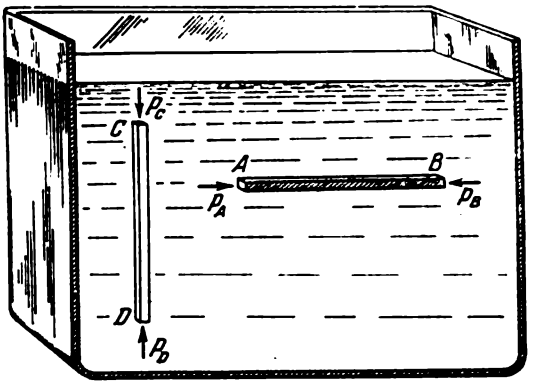


Fig. 273

que la pression en deux points quelconques d'un liquide situés dans un plan horizontal est la même.

Etablissons maintenant la relation entre la pression aux points C et D situés sur une même verticale à l'intérieur du liquide (ou du gaz) (fig. 273). Réunissons ces deux points, comme précédemment, par un prisme dont les bases passent par ces points, et écrivons la condition d'équilibre du liquide contenu dans le prisme:

$$S_0 p_C + P = S_0 p_D, \tag{94.1}$$

où P est la pesanteur du liquide remplissant le prisme et S_0 l'aire de la section transversale du prisme. D'où il s'ensuit

$$p_C + \frac{P}{S_0} = p_D,$$

ou

$$p_D - p_C = p_g = \frac{P}{S_0}. \tag{94.2}$$

Notons que $p_g = \frac{P}{S_0}$ est la pression engendrée par le poids de la colonne de liquide se disposant entre les points C et D. Si l'on peut négliger le poids du liquide (ou du gaz), la pression $p_D = p_C$.

§ 95. RELATION ENTRE LA DENSITÉ DU GAZ ET LA PRESSION

La densité du liquide dépend très peu de la pression. C'est ainsi, par exemple, qu'en modifiant la pression sur l'eau de 1000 atm on ne modifie son volume que de 5 %. On peut donc dans nos expériences, quand la variation de pression ne dépasse pas quelques dizaines d'atmosphère, négliger dans les calculs hydrostatiques les *variations* de volume et considérer que le liquide étudié est *incompressible*.

La *densité* ρ est mesurée en différentes unités dont la formule aux dimensions est $[m/V]$. Dans le système SI la densité est mesurée en kg/m^3, dans le système physique d'unités CGS en g/cm^3 (dans le système des mécaniciens en kgf·s^2/m^4). Souvent dans les expériences et les calculs on utilise au lieu de la densité la notion de *poids spécifique* qui est le poids de la matière contenue dans l'unité de volume. Le poids spécifique est habituellement mesuré en N/m^3, gf/cm^3 ou kgf/m^3. Le poids spécifique de l'eau dans des conditions normales est égal à 9800 N/m^3 dans le système SI, à 1 gf/cm^3 dans le système CGS et environ à 1000 kgf/m^3 dans les unités des mécaniciens.

La densité des gaz dépend essentiellement de la pression qui s'exerce sur lui. *A température constante la densité des gaz (ou son poids spécifique) est proportionnelle à la pression* (loi de Mariotte-Boyle).

Notons la pression initiale du gaz par p_1, le poids spécifique correspondant par γ_1 et une autre pression correspondant au poids spécifique γ par p; on peut alors écrire la loi de Mariotte-Boyle ainsi :

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{p_1}{p}. \tag{95.1}$$

Cette loi a été obtenue par des expériences très simples, connues du cours de physique du premier cycle où, toutefois, on relie la pression au volume occupé par une même masse de gaz. Il est évi-

dent qu'en connaissant le volume et le poids du gaz, on peut déterminer facilement le poids spécifique (ou la densité).

Souvenons-nous également, toujours du cours de physique du premier cycle, qu'en cas de variation de la température la pression et le poids spécifique des gaz dit *parfaits* vérifient l'équation suivante :

$$p = \frac{R}{\mu}\gamma T, \tag{95.2}$$

où T est la température des gaz en degrés absolus de Kelvin, R la constante pour tous les gaz (*constante des gaz*), μ le poids moléculaire du gaz. La température T de l'échelle de Kelvin est reliée à celle de l'échelle Celsius t par la relation $T = t + 273°$.

L'équation (95.2) dite équation de Clapeyron se vérifie pour la plupart des gaz à la température ordinaire.

§ 96. DISTRIBUTION DE PRESSION DANS UN LIQUIDE AU REPOS

En énonçant et en déduisant le principe de Pascal, on a négligé le poids du liquide (ou du gaz). Evaluons maintenant l'influence du poids du liquide sur la distribution de la pression au sein d'un liquide incompressible au repos.

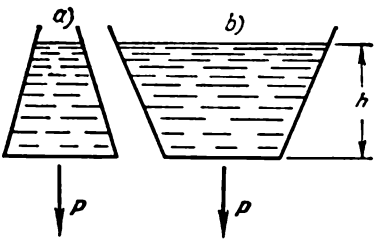


Fig. 274

Il va de soi que la pression suivant un plan horizontal sera toujours la *même*, car autrement il n'y aurait pas d'équilibre. Il s'ensuit que la surface libre d'un liquide en équilibre est toujours horizontale loin des parois du récipient. Notons que ce corollaire est également juste pour un liquide non homogène. Suivant la verticale la pression variera comme cela découle de l'expression (94.2) ; la pression croît avec la profondeur en passant du point C au point D (voir fig. 273), elle augmente aux dépens du poids du liquide contenu dans le prisme aux faces verticales et ayant pour bases les faces passant par C et D.

Si le liquide est incompressible ou, plus précisément, si l'on peut négliger la compressibilité du liquide, son poids spécifique γ ne dépendra pas alors de la pression. Le poids de la colonne du liquide sera donc

$$P = \gamma S_0 l, \tag{96.1}$$

où S_0 est la section transversale du prisme et l sa longueur. Par conséquent, la pression sur la base inférieure du prisme augmentera de

la grandeur

$$p_g = \frac{P}{S_0} = \gamma l, \tag{96.2}$$

c'est-à-dire que la pression varie linéairement avec la variation de la hauteur.

L'accroissement de la pression dans le liquide avec la profondeur définit la force de poussée s'exerçant sur les corps immergés et flottants dans le liquide (voir § 98).

La répartition de la pression dans le liquide permet d'expliquer le « paradoxe hydrostatique » de la force de pression sur le fond du récipient (fig. 274). La force de pression sur le fond du récipient n'est pas égale au poids du liquide contenu dans le récipient ; elle peut être supérieure à ce poids (fig. 274, *a*), ou inférieure (fig. 274, *b*), car la pression sur le fond ne dépend que de la hauteur du niveau et du poids spécifique du liquide, tandis que la force de pression sur le fond est égale au produit de la pression par l'aire du fond S :

$$P = hS\gamma.$$

Pour mesurer la différence de pressions, on utilise souvent des manomètres en vases communicants (fig. 275, *a*). Il va de soi que le liquide ne sera en équilibre que quand, du fait de la différence de niveaux dans les vases, apparaît

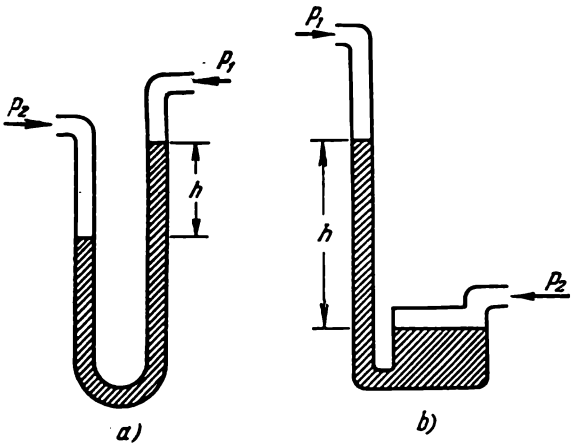


Fig 275

une contre-pression γh équilibrant la différence de pression au-dessus des liquides dans les vases communicants $p_2 - p_1$. Des conditions d'équilibre il s'ensuit :

$$p_2 - p_1 = \gamma h,$$

où h est la différence de niveaux du liquide dans les vases communicants. (Si les tubes des vases sont de même section on peut négliger les forces de tension superficielle du liquide.) Généralement, quand on utilise ce genre de manomètres, la différence de pression est mesurée d'après la hauteur de la colonne du liquide

contenu dans le manomètre. On parle ainsi de la différence de pression en centimètres ou en millimètres d'eau, d'alcool ou de mercure.

En pratique pour faciliter les mesures on utilise des vases communicants de diamètres différents (fig. 275, *b*), car dans ce cas on peut ne pas tenir compte des variations de niveau dans le grand vase et ne mesurer que la hauteur de la colonne dans le tube étroit [1]. Il est facile de vérifier que si le rapport des diamètres de la section des vases est égal à 50, l'erreur sera inférieure à 0,05 %.

§ 97. DISTRIBUTION DE LA PRESSION DANS LE GAZ

La pression dans un gaz au repos croît vers le bas du fait du poids des couches supérieures. Il est évident que la pression est la même dans tout plan horizontal. Pour évaluer la variation de pression dans le sens vertical, il faut tenir compte de la variation de densité (ou de poids spécifique) en fonction de la pression.

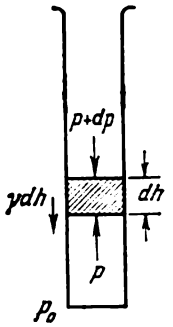


Fig. 276

On peut écrire la condition d'équilibre pour un cylindre de section de 1 cm² (fig. 276) et de très petite hauteur dh sous la forme :

$$p + dp + \gamma\, dh - p = 0,$$

ou

$$dp = -\gamma\, dh, \tag{97.1}$$

où dp est la différence de pression entre les bases supérieure et inférieure du cylindre. Donc la variation de pression pour un changement de hauteur de la grandeur h est

$$p_h - p_0 = \int_0^h dp = -\int_0^h \gamma\, dh,$$

ou

$$p_0 - p_h = \int_0^h \gamma\, dh. \tag{97.2}$$

Si le gaz possède une température constante, le poids spécifique γ et la pression p satisferont à la loi de Mariotte-Boyle (95.1) :

$$p = \gamma \frac{p_0}{\gamma_0}. \tag{97.3}$$

Dans ce cas la variation de pression avec la hauteur peut être calculée ainsi. Portons (97.3) dans la formule (97.1) :

$$dp = -p\frac{\gamma_0}{p_0}\, dh, \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_0}{p_0}\, dh.$$

[1] On ne peut évidemment plus négliger l'influence de la tension superficielle. Mais si l'on ne mesure que la variation de pression, une addition de la différence de pression constante due à la tension superficielle ne modifiera pas le résultat.

Intégrons cette expression de zéro à h :

$$\int_{p_0}^{p_h} \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_0}{p_0} \int_0^h dh, \quad \text{ou} \quad \ln \frac{p_h}{p_0} = \frac{\gamma_0 h}{p_0}.$$

Transformant cette dernière expression, il vient

$$p_h = p_0 e^{-\frac{\gamma_0 h}{p_0}}. \tag{97.4}$$

C'est la *formule dite barométrique* montrant que la pression chute avec la hauteur suivant la loi exponentielle. Utilisant la loi (97.4), déterminons la variation de la pression de l'air en atmosphère calme, en posant que la température de l'air est la même à tous les niveaux.

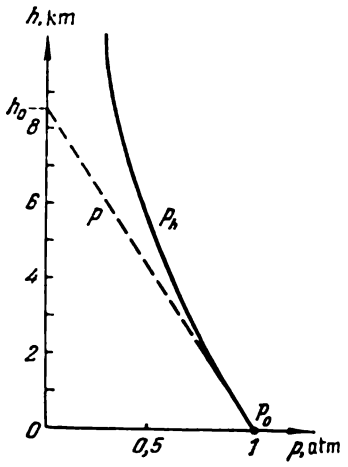


Fig. 277

Pour faire image, traçons d'abord sur le graphique montrant la dépendance de la pression p de la hauteur h (fig. 277) une ligne en pointillé traduisant la loi

$$p = p_0 - \gamma_0 h, \tag{97.5}$$

où γ_0 est le poids spécifique de l'air près de la surface terrestre au niveau de la mer pour $h=0$. Il est évident que la courbe en pointillé représente la variation de la pression avec l'altitude dans le cas où l'atmosphère est supposée composée d'un gaz incompressible de poids spécifique constant γ_0. L'altitude h_0 pour laquelle dans ce cas la pression s'annule est dite altitude de « *l'atmosphère homogène* ». D'après (97.5) l'altitude h_0 est égale à

$$h_0 = \frac{p_0}{\gamma_0}. \tag{97.6}$$

Pour une température de 15 °C et une pression atmosphérique normale au niveau de la mer $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m², le poids spécifique étant égal à $\gamma_0 \approx 12$ N/m³. Donc l'altitude de l'atmosphère homogène est

$$h_0 \approx 8400 \text{ m} = 8{,}4 \text{ km}.$$

Si l'on admettait qu'à des altitudes supérieures la densité de l'air était la même qu'au niveau de la surface terrestre, la Terre serait entourée d'une couche d'air d'environ 8,4 km et cette couche engendrerait à sa base à peu près la même pression que l'atmosphère réelle. Utilisant l'expression de l'altitude de l'atmosphère homogène

(97.6) on peut écrire la formule (97.4) sous la forme :

$$p_h = p_0 e^{-h/h_0}. \qquad (97.7)$$

Cette loi de distribution de la pression avec l'altitude pour une température constante est traduite à la figure 277 par une courbe en trait plein.

Au voisinage de la surface terrestre la variation de pression de l'air avec l'altitude suit à peu près le même cours que dans une atmosphère homogène ; sur la figure 277 les lignes en pointillé et en trait plein coïncident sur un certain secteur au voisinage de $h = 0$. Par conséquent, dans des calculs approchés de la pression à des faibles (par rapport à 8,4 km) altitudes, on peut utiliser la formule (97.5).

Sur la base de la formule (97.5) on peut estimer l'erreur commise dans les expériences avec les gaz en supposant la pression constante dans tout le volume occupé, au cas où ce gaz est l'air. En effet, dans les expériences de laboratoire avec un volume d'air dont la hauteur maximale ne dépasse pas 10 m, l'erreur commise est inférieure à

$$\frac{10}{8\,400} \approx \frac{1}{8}\,\%.$$

Or, en réalité on ne peut pas considérer que la température de l'air reste constante avec l'altitude. Dans des calculs techniques de comparaison on adopte pour la température à une altitude donnée une certaine valeur moyenne qu'on obtient après un grand nombre de mesures (fig. 278). Jusqu'à une altitude d'environ 11 km la température décroît linéairement, puis plus haut reste constante et égale à environ — 55 °C. Des mesures effectuées ces derniers temps à l'aide des engins à réaction montrèrent qu'à une altitude de 25 km on observe des accroissements de température qui se poursuivent jusqu'à ≈45 km, où cette dernière est à peu près de 0 °C ; à partir de 55 km, la température décroît de nouveau pour atteindre presque — 90 °C à une altitude de 80 à 95 km. Ensuite, la température monte de nouveau et atteint 1000 °C à l'altitude d'environ 230 km.

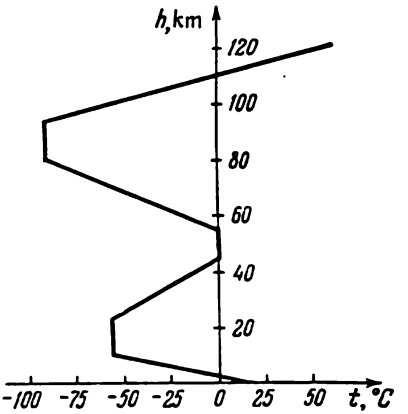


Fig. 278

§ 98. ÉQUILIBRE DE CORPS FLOTTANT À LA SURFACE DU LIQUIDE

Le corps immergé complètement ou partiellement dans un liquide (ou un gaz) subit l'action d'une poussée de la part du liquide ou du gaz environnant. C'est encore Archimède (III s. av. n. è.) qui formula le théorème fondamental : *tout corps immergé dans un liquide* (ou *un gaz*) *subit de la part du milieu environnant l'action d'une force égale au*

poids du liquide (ou *gaz*) *déplacé*; *cette force est dirigée vers le haut et passe par le centre des masses du liquide* (ou *du gaz*) *déplacé*.

L'apparition de cette force et son intensité se dégagent facilement de la répartition de pression dans le liquide pesant. Pour démontrer le théorème d'Archimède, il faut imaginer un corps, immergé dans le liquide, découpé en des cylindres de faible section et présentant des génératrices verticales, ensuite déterminer l'intensité de la force agissant sur chaque cylindre et, enfin, calculer la résultante de toutes les forces s'exerçant sur les cylindres composant le corps.

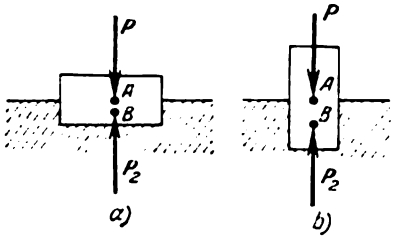


Fig. 279

Si le corps n'est immergé que partiellement, le calcul est le même, il ne faut au préalable que diviser en cylindres la partie du corps immergée dans le liquide.

Le poids du corps flottant à la surface est égal au poids du volume du liquide déplacé. L'équilibre du corps flottant sera stable non seulement dans le cas évident où le centre de gravité du corps est au-dessous du centre de gravité du liquide déplacé, comme c'est le cas pour une éprouvette flottant dans l'eau avec des grains de plomb au fond.

L'équilibre peut être stable même si le centre de gravité du corps se trouve au-dessus du centre des masses du liquide déplacé, comme c'est le cas pour les bateaux. Ainsi, par exemple, à la surface de l'eau flotte un madrier en forme de parallélépipède rectangulaire (fig. 279). La densité du bois est d'environ 0,5 de la densité de l'eau, par suite, le centre des masses du madrier A se trouve toujours au-dessus du centre des masses de l'eau déplacée B et cela, quelle que soit la position de flottement. Toutefois, l'expérience montre que le madrier flotte en équilibre stable si la plus grande face du parallélépipède est horizontale (fig. 279, *a*) et une fois lancé dans une autre position (fig. 279, *b*) il culbute aussitôt pour prendre, après quelques fluctuations, la position d'équilibre stable.

§ 99. CONDITIONS D'ÉQUILIBRE D'UN CORPS IMMERGÉ DANS LE LIQUIDE OU LE GAZ

Le corps solide dont le volume ne dépend pas, dans une certaine mesure, de la pression flottera à la surface du liquide ou s'y enfoncera jusqu'au fond. Si le poids du corps est exactement égal au poids du liquide déplacé il demeurera en état d'équilibre indifférent dans une partie quelconque du liquide.

Un tel équilibre du corps flottant peut être obtenu avec des expériences très simples. Ainsi, par exemple, en plaçant un œuf de poule

dans un récipient contenant de l'eau et en dissolvant dans l'eau de petites quantités de sel, on peut obliger l'œuf de flotter à toute profondeur (fig. 280) ; la position de l'œuf est toujours telle que son centre de gravité se trouve sur la verticale passant par le centre des masses de l'eau déplacée, ce dernier occupant la position supérieure. En écartant l'œuf de cette position, il se retourne et prend en fin de compte une position d'équilibre stable.

Généralement, le volume du corps diminue avec l'augmentation de la pression, c'est pourquoi l'équilibre d'un tel corps au sein du liquide de densité constante est toujours instable. En effet, supposons qu'à une certaine profondeur, pour une pression déterminée,

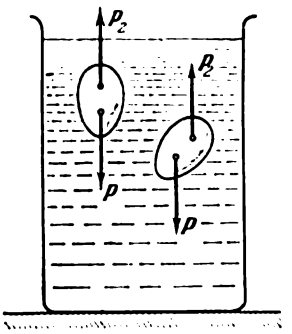


Fig. 280

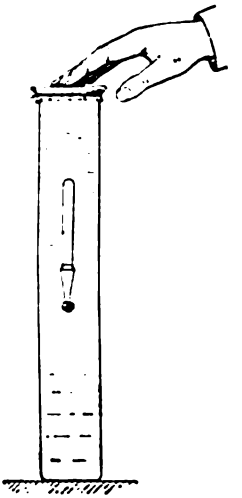


Fig. 281

le corps ait un poids égal à celui du liquide déplacé ; quand il s'enfonce quelque peu, la pression qu'il subit s'accroît et son volume diminue et, par suite, diminue également la poussée, donc le corps continue à s'enfoncer ; une situation analogue s'observe aussi quand le corps remonte quelque peu de la position d'équilibre, mais dans ce cas les variations de toutes les grandeurs changent de signe : la pression baisse, le volume augmente et le corps remonte.

L'image de l'équilibre d'un corps dont le volume diminue avec l'augmentation de la pression peut être obtenue dans des expériences avec un appareil bien connu appelé « ludion ». Dans un haut vase en verre contenant de l'eau et fermé dans sa partie supérieure par une membrane élastique (fig. 281) flotte une éprouvette qu'on a retournée et lestée à sa partie ouverte. Une partie de l'éprouvette est remplie d'eau, tandis que dans l'autre se trouve de l'air.

En appuyant sur la membrane élastique, on augmente la pression au-dessus de la surface libre et donc dans le liquide, l'air contenu dans l'éprouvette est comprimé, le volume du liquide déplacé par le ludion diminue et le ludion descend au fond du vase. En diminuant la pression exercée sur la membrane, on peut faire remonter le ludion. En faisant varier la pression sur la membrane, on peut obliger le ludion à se déplacer de façon quelconque : soit vers le haut, soit vers le bas. Autrefois cet appareil constituait un jouet instructif et amusant, on le lestait avec une figurine représentant soit une personne, soit un diablotin, etc.

Les conditions d'équilibre d'un corps flottant dans le gaz sont les mêmes que pour un liquide. Si le volume du corps flottant dans un gaz est indépendant de la pression, son équilibre sera toujours stable, car le poids spécifique du gaz augmente avec la diminution de la hauteur. La détermination de l'équilibre d'un corps flottant, quand ce dernier varie de volume en fonction de la pression, est une affaire beaucoup plus compliquée. Dans ce cas il faut tenir compte des variations des volumes du gaz et du corps.

CHAPITRE XII

ÉCOULEMENT DES CORPS LIQUIDES ET GAZEUX

§ 100. ÉCOULEMENT DU LIQUIDE EN RÉGIME PERMANENT

Au cours du déplacement du liquide ou du gaz, entre les différentes particules apparaissent des forces de frottement intérieur, ou des forces de viscosité. Le coefficient de viscosité des substances telles que l'air, l'eau est relativement faible et, par suite, dans certaines conditions (dont la nature sera éclairée en détail plus loin), l'écoulement du liquide (ou du gaz) peut être considéré comme un écoulement d'un *liquide « parfait »*, c'est-à-dire d'un liquide dépourvu de viscosité. Un tel liquide ou gaz n'existe pas évidemment en réalité. Cependant l'écoulement du liquide et du gaz dans nombre de cas pratiques très importants peut être approximativement considéré comme un écoulement de liquide parfait.

Connaissant les lois de l'écoulement d'un liquide parfait, on peut y apporter des retouches compte tenu de l'influence de la viscosité. Cette voie d'étude des lois du mouvement du liquide et du gaz par approches successives permet de façon relativement simple de dégager les lois compliquées du mouvement d'un liquide visqueux.

L'image de l'écoulement d'un liquide (ou d'un gaz) peut être fournie à l'aide d'un *champ* de vecteurs vitesses des particules. A chaque point de l'espace $\boldsymbol{r}$ correspond à l'instant t un vecteur $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ qui est le vecteur vitesse de la particule passant par le point $\boldsymbol{r}$; il est fonction de la position du point $\boldsymbol{r}$ et du temps t.

L'écoulement du liquide (ou du gaz) est dit *permanent* si toutes les grandeurs: vitesse, pression, densité, température, etc. restent tout le temps *constantes* en tout endroit occupé par le liquide qui s'écoule. Au cas contraire, il est dit *non permanent* et les lois de l'écoulement seront encore plus compliquées.

L'écoulement permanent du gaz dans des conduites, ou l'écoulement permanent de l'eau dans des conduites (tube, canaux, rivières) se présente sous un aspect assez compliqué même du point de vue cinétique. En général, en tous les points de l'espace occupé par un liquide qui s'écoule, les vitesses des particules sont différentes en grandeur et en direction. Les pressions auxquelles sont soumises les particules mobiles sont également variées, quoiqu'elles soient reliées au mouvement des particules par des relations de cause à effet. Dans un gaz en mouvement la densité varie de place en place, vu que la pression, la température, etc. varient aussi.

L'analyse de l'écoulement permanent se simplifie notablement si on divise le courant fluide [1] en *filets* suffisamment fins. Imaginons en un certain endroit du fluide un anneau solide *A* en fil très fin (fig. 282) se disposant transversalement au courant; menons les trajectoires de toutes les particules ayant effleuré l'anneau du côté extérieur. L'ensemble de ces trajectoires constitue le filet fluide. Ce

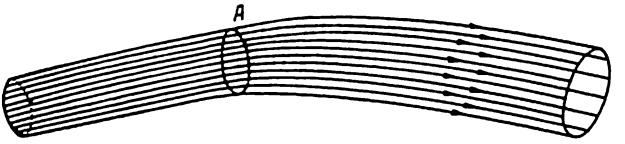


Fig. 282

filet peut être prolongé en aval du courant, ses parois étant formées de particules ayant passé près du fil de l'anneau; de même, en amont du courant, ses parois sont formées de particules qui passeront en son temps à côté du fil de l'anneau.

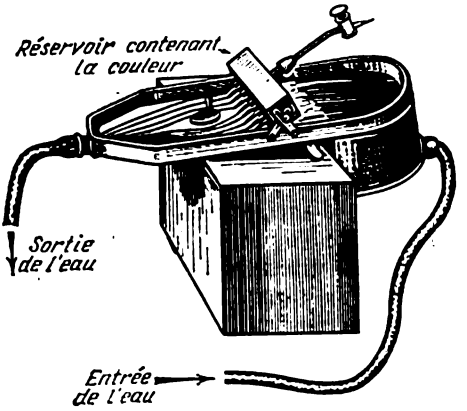


Fig. 283

Le fluide étant ininterrompu, on peut considérer les parois du filet comme continues et impénétrables. La vitesse des particules sur les parois du filet est tangente à sa surface. On peut diviser tout l'espace du courant liquide en de tels filets. Pour observer l'écoulement, certains filets fluides peuvent être rendus visibles. C'est ainsi que dans un courant d'air, on peut introduire des filets de fumée ou de gaz coloré et dans un courant d'eau, en des endroits déterminés, des filets d'eau colorée comme on le fait dans l'installation qui permet de visualiser l'écoulement autour d'un corps, montrée sur la figure 283. Les particules du fluide, passant près de l'orifice par lequel est injectée la couleur ou la fumée, marquent les filets fluides dans le courant et peuvent être soit observées soit photographiées.

Il est évident que dans le cas considéré les parois des filets fluides sont formées par les trajectoires des particules. Les particules

[1] Dans la suite, on entendra par courant fluide également un courant gazeux sans le spécifier, à l'exception des cas où la différence entre le liquide et le gaz est essentielle.

du fluide d'un filet quelconque y demeurent tant que dure le mouvement. Etant donné que la section du filet peut être prise aussi petite que l'on veut, on peut admettre que la vitesse des particules fluides est constante dans la section transversale au filet et est dirigée perpendiculairement à la section normale du filet.

L'écoulement dans un filet fluide sera semblable à l'écoulement sans frottement dans un tube aux parois rigides dont la section varie de façon suffisamment douce.

Dans un écoulement non permanent on peut imaginer des filets fluides qui ne seront plus formés par les trajectoires des particules. En effet, supposons un champ vectoriel de vitesses $v(r, t)$ des particules à l'instant t. Dans ce champ on peut en pensée tracer les lignes d'écoulement constituant des courbes dont les tangentes coïncident chaque fois en direction avec le vecteur vitesse v. Ces courbes traversant l'anneau constituent un filet fluide. Il devient évident que ce filet fluide formé par des lignes traversant l'« anneau » donné dépend du temps. Il faut noter de plus que la ligne d'écoulement ne coïncide pas, en général, avec la trajectoire de la particule, car quand la particule atteint le point $r + dr$, le vecteur vitesse de ce point durant le temps dt variera d'une certaine grandeur, etc. Or en traçant la ligne d'écoulement on ne tient compte que de la vitesse à l'instant donné dans tous les points de l'espace. La ligne d'écoulement est constituée de déplacements des particules différentes, tandis que la trajectoire de la particule est l'image du mouvement d'une seule particule.

Examinons la condition de la constance du flux de masse dans l'écoulement le long d'un filet fluide. En régime permanent la masse du liquide ou du gaz écoulée dans l'unité de temps à travers toute section droite du filet est *constante* pour toutes les sections.

Soit un filet dont l'aire de la section est S. La vitesse dans cette section est v; la masse fluide traversant en une seconde cette section est alors

$$Q = \rho v S, \tag{100.1}$$

où ρ est la densité du liquide ou du gaz dans la section considérée. Dans une autre section du filet d'aire S_1, la quantité (masse) du fluide qui la traverse par seconde doit de même être égale à

$$Q = \rho_1 v_1 S_1, \tag{100.2}$$

où v_1 et ρ_1 sont la vitesse et la densité du fluide dans la seconde section du filet fluide. Dans le cas contraire, la quantité de fluide entre ces deux sections augmenterait ou diminuerait et l'écoulement ne se ferait plus en régime permanent.

Donc le théorème de la *constance du flux de masse* peut être écrit ainsi :

$$Q = \rho v S = \text{const} \tag{100.3}$$

le long de tout filet fluide.

Si le fluide est incompressible, comme l'est, par exemple, dans les expériences ordinaires l'eau, la densité ρ reste constante et, en vertu du théorème de la constance du flux de masse (100.3), la vitesse dans toute section du filet varie en raison inverse de l'aire de la section droite. Ainsi donc la forme du filet détermine également la vitesse du courant: la vitesse augmente aux points où les filets fluides s'étranglent et, au contraire, chute, aux endroits où ils s'élargissent (fig. 284).

La situation reste la même pour un écoulement dans un large tube dont la section varie de façon régulière, de sorte que sur une

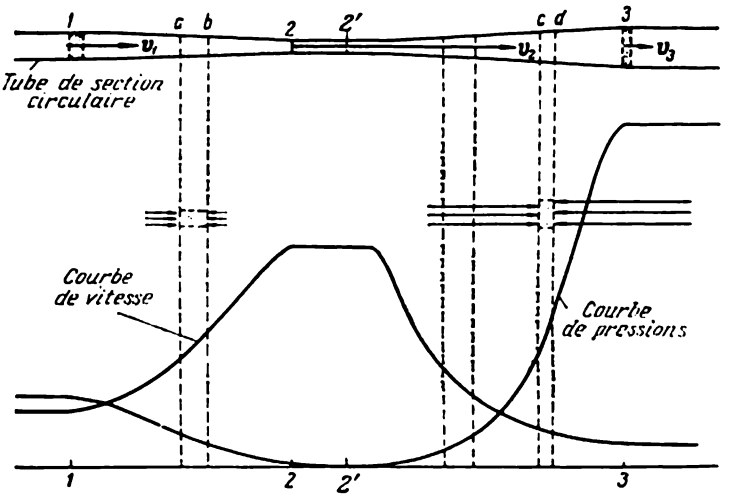


Fig. 284

distance égale à peu près au diamètre du tube il peut être considéré avec une approximation suffisante comme cylindrique. Si la densité du gaz ou du liquide dans ce tube ne varie pas, la vitesse de l'écoulement dans chaque section droite en régime permanent varie alors en raison inverse de l'aire de la section.

Cherchons le lien entre la variation de la vitesse et la variation de la pression le long du filet fluide (voir fig. 284). Suivons le mouvement d'une particule du fluide occupant une portion du filet. On peut se représenter l'écoulement comme si cette particule se meut le long du filet dont elle remplit toute la section en se déformant.

Que peut-on dire de la pression le long du filet fluide en suivant le mouvement de la particule? Il est absolument évident que si la section droite du filet fluide dans le secteur considéré est constante, la vitesse de la particule du fluide incompressible est aussi constante. Dans ce secteur la particule n'est donc pas accélérée. Si

le tube s'étrangle le long du courant (secteur *1 — 2*) la particule fluide reçoit une accélération et sa vitesse augmente. Si le filet s'élargit (secteur *2'—3*), la particule fluide est ralentie et sa vitesse chute dans ce secteur.

Quelles sont les forces qui impriment l'accélération à la particule quand le filet fluide est horizontal? Seules les forces de pression émanant des particules attenantes sont alors mises en jeu; dans un filet étranglé (secteur *1-2*) la pression doit donc chuter dans le sens de l'écoulement, c'est-à-dire que la pression à l'amont de la particule (*ab*) doit dépasser celle en aval pour lui imprimer une accélération et assurer l'accroissement de la vitesse. Dans la partie élargie du filet fluide (secteur *2'-3*), où la vitesse de la particule diminue dans le sens du courant, la pression augmente, la particule (*cd*) est décélérée et, par suite, la pression devant la particule est plus grande que derrière. Ainsi donc connaissant les variations de la section du filet d'un fluide incompressible, on peut apprécier qualitativement les variations de pression le long du filet. Le graphique de la répartition des pressions[1] le long du filet est donné à la figure 284.

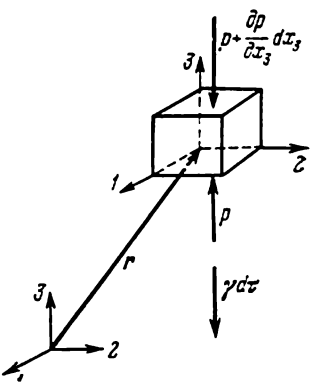


Fig. 285

§ 101. LOI FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE APPLIQUÉE À LA PARTICULE D'UN FLUIDE PARFAIT

Chaque particule d'un liquide (ou d'un gaz) qui s'écoule est soumise à l'action des particules environnantes, l'action exercée étant définie par la pression p. On a déjà vu que la variation de pression imprime une accélération à des particules mobiles. Sur la base de ces données, appliquons la loi fondamentale de la dynamique à une particule fluide.

Supposons qu'on ait isolé une particule en forme de cube de volume $d\tau = dx_1\, dx_2\, dx_3$ située au point $r\,(x_1, x_2, x_3)$ (fig. 285). Sur chaque face du cube agit une pression. Par exemple, sur la face $dx_1\, dx_2$ s'exerce à partir du bas l'effort $p\, dx_1 dx_2$ et sur la face opposée l'effort

$$-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x_3}dx_3\right) dx_1\, dx_2.$$

[1] La répartition des pressions traduit la formule de Bernoulli donnée aux paragraphes suivants.

Donc le long de l'axe *3* sur le cube agit la force

$$p\,dx_1\,dx_2 - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x_3}\,dx_3\right) dx_1\,dx_2 = -\frac{\partial p}{\partial x_3}\,d\tau.$$

De plus, la particule est sollicitée par la force de gravitation égale à

$$-\gamma\,d\tau,$$

qui est dirigée dans le sens opposé à l'axe *3* (γ est ici le poids spécifique du fluide). Dans ce cas d'après la seconde loi de la dynamique

$$\rho\,d\tau\frac{dv_3}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_3}\,d\tau - \gamma\,d\tau,$$

ou

$$\rho\frac{dv_3}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} - \gamma, \tag{101.1}$$

où v_3 est la composante de la vitesse suivant l'axe *3*.

Comme le volume $d\tau$ peut être aussi petit que l'on veut, on peut considérer que la densité ρ y est constante. De même, la pression p exercée sur les faces du cube est la même en tous les points, comme d'ailleurs la vitesse v.

De façon analogue on trouve que dans la direction des deux autres axes

$$\rho\frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad \rho\frac{dv_2}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_2}, \tag{101.2}$$

car les pesanteurs sont dirigées suivant l'axe *3*.

On peut maintenant écrire les trois formules (101.1) et (101.2) sous une forme vectorielle. Si e_1, e_2, e_3 sont des vecteurs unitaires le long des axes des coordonnées, il vient

$$\rho\frac{d}{dt}(v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3) = -\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2}e_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3}e_3\right) - \gamma e_3,$$

ou

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho\boldsymbol{g}, \tag{101.3}$$

où le vecteur $\frac{\partial p}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial p}{px_2}e_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3}e_3$ désigné par le symbole grad p est appelé *gradient* [1] de la pression p; le vecteur $-\gamma e_3 = \rho\boldsymbol{g}$, où $\boldsymbol{g}$ est le vecteur de l'accélération gravitationnelle.

La formule (101.3) traduit la loi fondamentale de l'hydrodynamique pour un liquide ou un gaz parfait (sans frottement). En régime non permanent, toutes les grandeurs ρ, v, p sont fonction de la

[1] Le gradient est quelquefois noté au moyen d'un vecteur symbolique $e_1\frac{\partial}{\partial x_1} + e_2\frac{\partial}{\partial x_2} + e_3\frac{\partial}{\partial x_3} = \nabla$, alors grad $p = \nabla p$.

cote r et du temps t. Tandis que dans le régime permanent ces grandeurs ne dépendent que de la cote r, c'est pourquoi l'étude de l'écoulement en régime permanent est commode à suivre en utilisant l'image de filets fluides : ils sont permanents et la loi de la dynamique pour un fluide parfait s'écoulant dans des filets fluides suffisamment fins peut être décrite de la façon suivante. La vitesse $v = v(s)$ est une fonction de la *seule* coordonnée s (coordonnée suivant l'axe du filet). La particule qui à l'instant t avait pour coordonnée s se déplacera durant le temps dt d'un segment ds_1 (fig. 286). La vitesse de la particule dans sa nouvelle position sera autre, v_1, par exemple, qui peut être toujours représentée ainsi :

$$v_1 = v(s) + \frac{dv}{ds} ds_1.$$

Donc la différence entre les vitesses des particules aux instants t et $t + dt$ fournit l'accroissement de la vitesse de la particule

$$dv = v_1 - v(s) = \frac{dv}{ds} ds_1.$$

Remplaçant dans cette expression le déplacement de la particule ds_1 par $v(s)\,dt$, il vient

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2}\right). \quad (101.4)$$

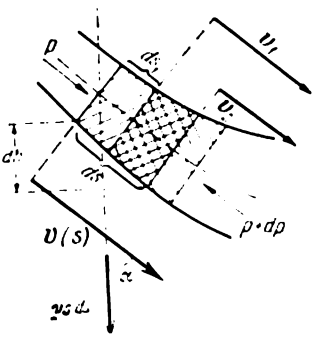


Fig. 286

L'accélération de la particule en régime permanent est égale à la dérivée suivant l'axe du filet du demi-carré de la vitesse du courant. Donc l'équation fondamentale de la dynamique pour une particule de fluide parfait (101.3) peut être dans ce cas écrite sous la forme :

$$-\frac{dp}{ds} + \gamma\cos\alpha = \rho v\frac{dv}{ds} = \rho\frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2}\right). \quad (101.5)$$

α est ici l'angle entre la verticale et la direction de l'axe du filet dans la section considérée. Cette équation se vérifie pour un régime permanent d'un liquide incompressible dénué de viscosité aussi bien que pour un gaz compressible ne présentant pas de frottement interne.

Arrêtons-nous sur la définition de l'accélération de la particule $\frac{dv}{dt}$ pour le cas d'un écoulement non permanent, quand est connu le champ $v(r, t)$. On a vu que l'accélération dans un filet fluide en écoulement permanent est $v\frac{dv}{ds}$, c'est-à-

dire qu'elle est fonction des variations de la vitesse le long du filet. Mais ce résultat peut être obtenu sans recourir aux filets fluides.

A l'instant t la vitesse de la particule passant par la cote r est $v(r, t)$, tandis qu'après le laps de temps dt la particule se trouvera à la cote $r + dr$ et sa vitesse sera $v(r + dr, t + dt)$. Dans ce cas l'accroissement de la vitesse de cette particule est

$$dv = v(r + dr, t + dt) - v(r, t) \tag{101.6}$$

et l'accélération $\frac{dv}{dt}$. Divisons l'accroissement dv en deux parties: dans la première on définit l'accroissement dû uniquement à la variation du temps $(dv)_t$ et dans la seconde, l'accroissement de v dû au changement de cote de la particule $(dv)_r$. (Sur la figure 287 on a tracé également la vitesse $v(r + dr, t)$ d'une autre particule se trouvant à la cote $r + dr$ à l'instant t.) Donc

$$dv = (dv)_t + (dv)_r, \tag{101.7}$$

où

$$(dv)_t = v(r + dr, t + dt) - v(r + dr, t),$$
$$(dv)_r = v(r + dr, t) - v(r, t). \tag{101.8}$$

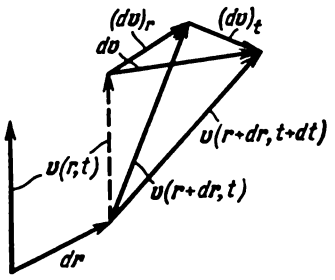


Fig. 287

Dans un courant permanent l'accélération n'est déterminée que par $(dv)_r$, car $(dv)_t = 0$, la vitesse en chaque point de l'espace ne dépendant pas du temps. Généralement parlant dans un écoulement non permanent les deux termes sont différents de zéro. Le premier terme

$$(dv)_t = \frac{\partial v}{\partial t}\, dt$$

est défini par une dérivée partielle de v pour $r = \text{const}$. Le second terme (la différentielle $(dv)_r$) a une forme plus compliquée, il est fonction de la dérivée par rapport à la direction, en dr, pour $t = \text{const}$; cette dérivée est quelquefois écrite comme $\frac{dv}{dr}$. Le calcul de $(dv)_r$ se fait comme celui de l'accroissement en régime permanent du vecteur v dans la variation de la cote de dr. Cet accroissement dans un champ vectoriel constant pour un déplacement dr a déjà été examiné en étudiant des petites déformations d'un corps élastique (§ 86). Chaque composante de la vitesse: v_1, v_2, v_3 est fonction de trois variables: x_1, x_2, x_3. Rappelons que $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ et $r = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, où e_1, e_2, e_3 sont les vecteurs unités de base du système des coordonnées. Alors l'accroissement des composantes de la vitesse peut s'écrire ainsi:

$$\begin{aligned} dv_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\, dx_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\, dx_3, \\ dv_2 &= \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\, dx_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\, dx_3, \\ dv_3 &= \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\, dx_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\, dx_3, \end{aligned} \tag{101.9}$$

et $(dv)_r = dv_1e_1 + dv_2e_2 + dv_3e_3$. Examinant le système (101.9) on constate qu'il peut être présenté sous la forme de produit du *tenseur* U par le vecteur

$dr = dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + dx_3 e_3$ de la façon suivante:

$$(dv)_r = \mathrm{U}\, dr, \tag{101.10}$$

où

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \tag{101.11}$$

Etant donné qu'il s'agit dans ce cas de l'accroissement de la vitesse d'une particule déterminée qui s'est déplacée durant le temps dt de la cote r de la grandeur dr, $dr = v\, dt$. En le portant dans (101.10), il vient

$$(dv)_r = \mathrm{U} v\, dt, \tag{101.12}$$

oul'accroissement de la particule $\frac{dv}{dt}$, considérant (101.7) et (101.12), peut s'écrire ainsi:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(dv)_t}{dt} + \frac{(dv)_r}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \mathrm{U} v. \tag{101.13}$$

C'est l'expression générale de l'accélération de la particule. Le premier terme étant une dérivée partielle par rapport à t et le second, le produit du tenseur (101.11) par v.

Pour un écoulement permanent $\partial v/\partial t = 0$ et

$$\frac{dv}{dt} = \mathrm{U} v. \tag{101.14}$$

Si la vitesse, la densité et la pression ne dépendent que d'une seule coordonnée la vitesse étant dirigée suivant cette coordonnée, par exemple si $v_1 \neq 0$, $v_2 = v_3 = 0$ et toutes les dérivées en x_2 et x_3 sont nulles, alors $\frac{dv_1}{dt} = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$, comme on l'a vu auparavant dans (101.4), où $x_1 = s$ et $v_1 = v$. La pression p n'est aussi fonction que de x_1 et, par suite, l'équation de l'hydrodynamique (101.3) en s'abstenant de la gravitation prend dans ce cas la forme

$$\rho v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial p}{\partial x_1},$$

déjà obtenue antérieurement (voir (101.5)).

§ 102. FORMULE DE BERNOULLI POUR UN LIQUIDE INCOMPRESSIBLE EN RÉGIME PERMANENT

En régime permanent pour un liquide parfait et incompressible, on peut tirer facilement de l'équation fondamentale de la dynamique d'une particule mobile le long du filet liquide une équation plus simple et importante. Dans ce cas la densité et le poids spécifique du liquide ne varient pas et donc l'équation (101.5) peut être récrite ainsi:

$$-\frac{dp}{ds} + \gamma \cos \alpha = \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right), \tag{102.1}$$

Notons par h la hauteur du lieu où se trouve la particule de cote s; dans ce cas le déplacement de la particule de ds est relié à la variation de la hauteur de dh de la façon suivante (voir fig. 286) :

$$-dh = ds \cos \alpha ; \tag{102.2}$$

remplaçons donc dans (102.1) $\cos \alpha$ par $-\frac{dh}{ds}$ et on obtient

$$-\frac{dp}{ds} - \gamma \frac{dh}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) ; \tag{102.3}$$

tous les termes sont ici des dérivées par rapport à la coordonnée s, donc

$$\frac{d}{ds}\left(p + \gamma h + \frac{\rho v^2}{2}\right) = 0. \tag{102.4}$$

L'égalité à zéro de la dérivée signifie que la somme des trois grandeurs reste constante le long du filet liquide ou

$$\vartheta = p + \gamma h + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const} \tag{102.5}$$

C'est la *formule de Bernoulli* pour un écoulement en régime permanent d'un liquide incompressible. Elle joue un rôle fondamental dans toutes les études hydrodynamiques. Dans la formule de Bernoulli p est la pression « statique », la pression comprimant la particule du liquide ; γh est la variation de pression avec la variation de hauteur de la grandeur h ; $\frac{\rho v^2}{2}$ est appelée « pression dynamique » (voir § 106).

A l'aide de la formule de Bernoulli on résout facilement un grand nombre de problèmes compliqués. En effet, si on est en mesure de diviser le champ d'un liquide qui s'écoule en des filets et de déterminer d'après certaines considérations les valeurs de la pression p_0 et de la vitesse v_0 en un point quelconque dont la hauteur h_0 est connue, alors, quelles que soient les variations le long du filet de la vitesse, de la pression et de la hauteur, la grandeur obtenue par la formule (102.5) reste invariable. Cette condition permet de rechercher les grandeurs inconnues en d'autres points du courant. On montrera dans différents exemples et problèmes comment il faut procéder dans ce cas.

La formule de Bernoulli est le corollaire du principe de conservation de l'énergie pour une particule du liquide s'écoulant le long d'un filet. Elle découle du fait que le travail des forces de pression doit être égal à l'accroissement de la somme des énergies cinétique et potentielle de la particule, les forces de pression constituant des forces extérieures par rapport à la particule concernée.

Etudions la variation d'énergie et le travail des forces de pression durant le temps dt dans le déplacement de la particule liquide qui à l'instant t occupe une portion du filet de longueur ds (voir fig. 286). Supposons que durant ce laps de temps l'élément amont (suivant le courant) de la particule s'est déplacé de ds_1 qui, en général, n'est pas égal à la longueur de la particule ds (sur le dessin il est représenté comme étant plus court). Alors les variations subies dans le déplacement de la particule se manifestent par le fait que la partie supérieure hachurée obliquement de volume $dQ = S\,ds_1$ est venue prendre la place de la partie inférieure hachurée obliquement ayant le même volume dQ; la partie moyenne couverte de hachures quadrillées n'a pas varié de position durant la temps dt, quoique, au bout du temps dt, elle est déjà composée d'autres particules matérielles. Par conséquent, l'accroissement (ou la diminution) d'énergie potentielle de la particule s'écrira sous la forme

$$-\gamma\, dQ \cos\alpha\, ds = \gamma\, dQ\, dh, \tag{102.6}$$

si l'on tient compte de l'égalité (102.2).

L'accroissement de l'énergie cinétique est

$$\left(\frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}\right) dQ = \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) dQ\, dS, \tag{102.7}$$

où v_2 est la vitesse de l'élément aval de la particule de longueur ds. Le travail des pressions dans le déplacement de l'élément amont est $pS\,ds_1 = p\,dQ$, de l'élément aval, c'est $-(p + dp)\,dQ$ et de toutes les forces de pression:

$$[p - (p + dp)]\, dQ = -dp\, dQ. \tag{102.8}$$

Egalant le travail des forces de pression à la variation des énergies potentielle et cinétique, on a:

$$\gamma\, dQ\, dh + \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) dQ\, ds = -dp\, dQ. \tag{102.9}$$

Simplifiant par $dQ\, ds$, on obtient (102.4); intégrant le long de la ligne d'écoulement, on aboutit à la formule de Bernoulli (102.5).

§ 103. ÉCOULEMENT DU LIQUIDE D'UN VASE

Utilisant la formule de Bernoulli (102.5), il est facile de déterminer la vitesse du liquide pesant s'écoulant d'un récipient. Soit un liquide qui s'écoule d'un vase muni d'un orifice latéral (fig. 288). L'orifice possède un ajutage spécial qui dirige le jet. L'écoulement par un orifice met dans le vase tout le liquide en mouvement et on peut le diviser en filets. Mais diviser de façon précise un liquide en filets est une tâche assez compliquée, même pour un vase de forme simple. Or on n'a pas besoin de savoir quel est le trajet suivi par les filets dans le volume du liquide en mouvement. Il suffit de savoir que tous les filets prennent naissance à la surface libre du liquide et aboutissent à l'ajutage de l'orifice.

Au niveau de la surface libre du liquide tous les filets ont la même vitesse v_0, la même pression p_0 et la même hauteur h_0, car la surface du liquide qui s'écoule descend vers le bas en restant horizontale, si elle dépasse de beaucoup le niveau de l'orifice. Donc la constante de la formule de Bernoulli (102.5) a la même grandeur

pour tous les filets et est égale à

$$\frac{\rho v_0^2}{2} + h_0\gamma + p_0 = \mathcal{Э}_0 = \text{const}. \qquad (103.1)$$

Notons qu'il en sera toujours ainsi quand l'écoulement de toutes les particules d'un liquide parfait débute à partir d'un même état, la constante de la formule de Bernoulli ayant alors une même valeur non seulement pour le filet considéré, comme on l'a vu auparavant,

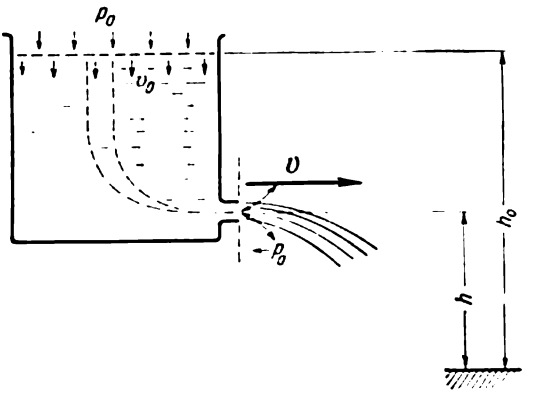


Fig. 288

mais pour tout l'espace du liquide mobile occupé par des particules s'écoulant dans des conditions identiques. Cela simplifie encore davantage l'analyse de l'écoulement.

Comme le diamètre de l'orifice est petit devant la hauteur du liquide dans le vase, on peut considérer la pression constante dans toute la section droite du filet et égale à la pression environnante p_0. De même, on peut admettre que la vitesse de l'écoulement dans tous les filets liquides est invariable et égale à v. Donc d'après la formule de Bernoulli (102.5)

$$\mathcal{Э}_0 = \frac{\rho v^2}{2} + \gamma h + p_0 = \frac{\rho v_0^2}{2} + \gamma h_0 + p_0, \qquad (103.2)$$

ou

$$\frac{\rho}{2}(v^2 - v_0^2) = \gamma(h_0 - h), \qquad (103.3)$$

où h est la hauteur de l'orifice, et h_0, la hauteur de la surface libre dans le vase.

Si l'aire de l'orifice est une fraction infime de celle de la section droite du vase, la vitesse v_0 sera infiniment petite devant la vitesse v et le terme v_0^2 de la formule (103.3) peut être négligé. Donc la vitesse

du liquide qui s'écoule est

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho}(h_0 - h)} = \sqrt{2g(h_0 - h)}, \qquad (103.4)$$

car $\frac{\gamma}{\rho} = g$ est l'accélération de la pesanteur.

C'est la *formule* dite de *Torricelli*. La vitesse d'écoulement du liquide pesant par l'orifice du vase est égale à la vitesse acquise par le corps chutant d'une hauteur égale à la dénivellation $h_0 - h$ entre l'orifice et la surface libre. Notons que la grandeur de la vitesse est complètement indépendante de la direction par rapport à l'horizon du jet d'écoulement. Elle ne variera pas quel que soit l'angle sous lequel s'écoule le jet. Donc si l'on dirige le jet verticalement

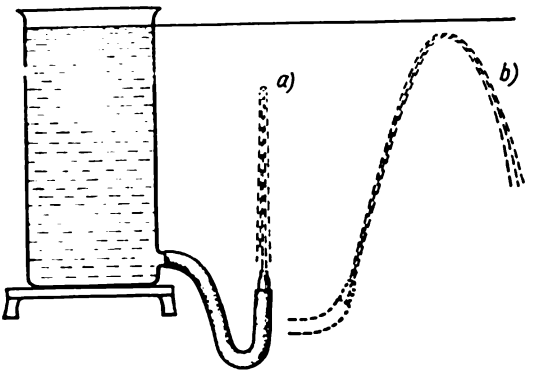


Fig. 289

vers le haut, les particules du liquide, comme tout corps, doivent s'élever à la hauteur du niveau de la surface libre du liquide [1]. Cependant, par suite du frottement dans le liquide et surtout vu le frottement contre les particules liquides descendant vers le bas, ainsi que le frottement dans l'air, le jet n'atteindra pas le niveau du liquide dans le vase (fig. 289, *a*). Mais si l'on dirige le jet sous un faible angle par rapport à la verticale il montera presque jusqu'au niveau de la surface du liquide.

La justesse de la formule de Torricelli peut être vérifiée par différents procédés. On peut, par exemple, observer le point d'intersection de deux jets s'écoulant horizontalement à partir des orifices situés à des niveaux différents (fig. 290). Si l'on ne tient pas compte de la viscosité, on peut montrer par un calcul que les jets se cou-

[1] Les forces de frottement (de viscosité), quand l'eau s'écoule par un tube en caoutchouc réunissant l'ajutage d'où sort le jet au vase, ne se manifesteront presque pas si le diamètre du tube est grand devant celui du jet de sortie.

peront sur une horizontale située au-dessous de l'orifice inférieur, à la distance égale à celle qui sépare le niveau du liquide dans le vase de l'orifice supérieur. L'expérience confirme ce fait. Les

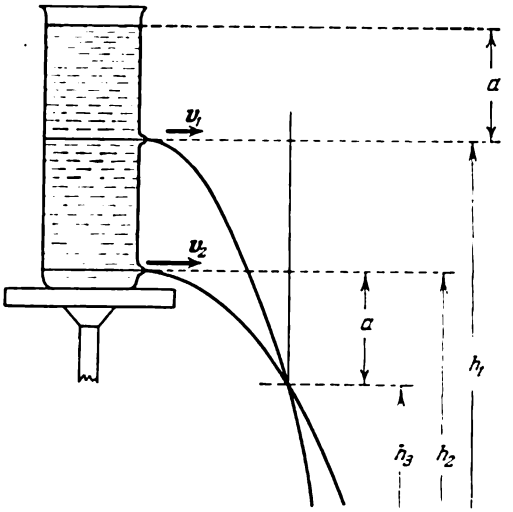


Fig. 290

variations du point d'intersection des jets sont particulièrement frappantes quand une grande quantité d'eau est ajoutée à celle contenue dans le vase, où le niveau d'eau se modifie.

Le calcul est trivial. Si la vitesse d'écoulement du liquide se détermine d'après la formule de Torricelli, il s'ensuit que

$$v^1 = \sqrt{2ga}, \quad v_2 = \sqrt{2g(a + h_1 - h_2)}$$

(la signification des notations est donnée à la figure 290). Le temps mis par la particule pour atteindre le point d'intersection se détermine pour chaque jet d'après les formules

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(h_1 - h_3)}{g}}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{2(h_2 - h_3)}{g}}.$$

Au point d'intersection des deux jets, l'éloignement du vase est le même. Dans la chute des particules la composante horizontale de la vitesse ne varie pas, donc $v_1 t_1 = v_2 t_2$; d'où

$$a(h_1 - h_3) = (a + h_1 - h_2)(h_2 - h_3),$$

ou

$$h_2 - h_3 = a$$

§ 104. PRESSION DU LIQUIDE S'ÉCOULANT DANS UN TUBE DE SECTION VARIABLE

Sur la figure 291 est représenté un appareil composé d'un tube en verre de section variable présentant des petits orifices dans sa paroi. Le tube est disposé horizontalement et aux orifices sont soudés des petits tubes en verre qui, en se remplissant jusqu'à une certaine hauteur, servent de manomètres permettant de mesurer la pression dans la section considérée du tube. La hauteur de la colonne du liquide dans les petits tubes servant de manomètre est proportionnelle à la pression des particules du liquide qui s'écoule. Le liquide dans le petit tube vertical et, partant, dans l'orifice lui-même est au

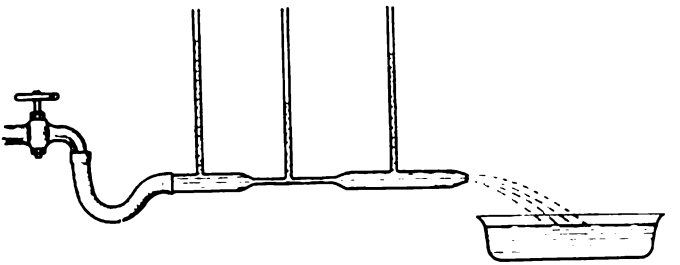


Fig. 291

repos, les particules du liquide coulant passent à côté de l'orifice, subissent une certaine compression et sont, par suite, soumises à la pression p et, comme la pression transmise dans tous les sens est la même, il faut pour que le liquide soit au repos dans l'orifice que la pression engendrée par la colonne liquide dans le petit tube soit égale à la pression p dans le liquide qui s'écoule.

On admet que le tube horizontal est suffisamment étroit pour que la pression dans chaque section droite de la veine liquide qui s'écoule soit considérée comme la même. La section droite du tube variant de façon douce, on peut assimiler tout le tube horizontal à un seul filet liquide.

En faisant passer à travers le tube de l'eau et en réglant la vitesse de l'eau, on observe la hauteur du niveau dans les tubes manométriques, c'est-à-dire on enregistre les variations de la pression p le long du tube. L'expérience montre que la pression dans la partie la plus étroite du tube est la plus faible, et cette pression est d'autant plus faible qu'est plus grande la vitesse d'écoulement de l'eau, ce qui est en conformité avec la formule de Bernoulli.

Si l'on connaît les grandeurs des sections droites aux deux endroits où sont disposés les tubes manométriques, il est possible d'après la différence de pressions d'apprécier la quantité d'eau traversant le tube par seconde, autrement dit, le « débit » d'eau.

En effet, soient S_1 et S_2 les sections droites avec respectivement des vitesses v_1 et v_2 et des pressions p_1 et p_2.

Alors d'après la formule de Bernoulli (102.5)

$$p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_2+\frac{\rho v_2^2}{2}, \tag{104.1}$$

tandis que de la condition de constance du débit dans toute section il s'ensuit

$$Q = \gamma\, v_1 S_1 = \gamma\, v_2 S_2, \tag{104.2}$$

où, comme d'ordinaire, $\gamma = \rho\, g$ est le poids spécifique.

En résolvant les deux équations (104.1) et (104.2) à deux vitesses inconnues, v_1 et v_2, on les obtient. Ensuite on trouve que le débit est

$$Q=g\sqrt{\frac{2(p_2-p_1)\rho}{\frac{1}{S_1^2}-\frac{1}{S_2^2}}}. \tag{104.3}$$

La dépendance du débit de la différence de pressions, exprimée par la formule (104.3), se trouve à la base du « jaugeur », appareil mesurant d'après la différence de pressions le débit du liquide en l'unité de temps à travers la section d'une conduite.

§ 105. ÉCOULEMENT DU LIQUIDE OU DU GAZ SOUS PRESSION DANS UN VASE

Si le liquide ou le gaz se trouve dans un vase sous une pression de beaucoup supérieure à celle créée par le poids du liquide, on peut négliger les variations de pression avec la hauteur de la colonne du liquide et considérer que l'écoulement y obéit aux mêmes lois que dans un vase fermé soumis à l'action de la pression p_1. On peut donc déterminer facilement la vitesse d'écoulement de l'eau de la chaudière, où l'eau est maintenue à une pression constante de vapeur de quelques dizaines d'atmosphères, ou bien la vitesse d'écoulement du gaz du ballon (fig. 292), où la pression est maintenue constante par un compresseur. Dans ces cas on peut considérer la constante de Bernoulli invariable dans tout le volume du gaz ou du liquide qui s'écoule et égale à p_1 (à la pression dans le récipient), vu qu'on peut négliger la vitesse de l'écoulement dans le récipient puisque la section du récipient S est de beaucoup plus grande que la section de l'orifice s.

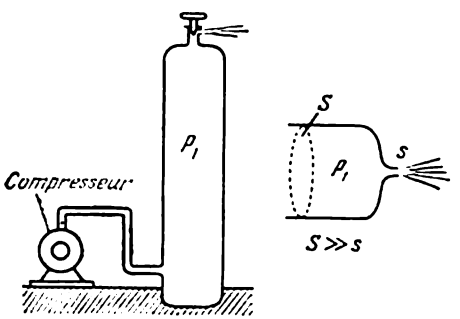


Fig. 292

La vitesse d'écoulement de l'eau de la chaudière est

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}, \tag{105.1}$$

ce qui se déduit facilement de la formule (102.5).

Pour le gaz la formule (102.5) ne permet pas de déterminer la vitesse, car la densité du gaz ρ varie à mesure que la particule gazeuse s'approche de l'orifice. La variation de pression le long du filet fluide en régime permanent peut s'écrire d'après (101.5) ainsi :

$$-\frac{dp}{ds} = \rho v \frac{dv}{ds}. \tag{105.2}$$

La densité ρ dépend cette fois de la grandeur de la pression p. Quand la particule s'approche de l'orifice, la pression doit chuter, les particules étant accélérées dans les sens du mouvement. La grandeur de la vitesse dépendra donc de la loi suivant laquelle varie la densité en fonction de la pression.

En général, le lien entre la pression et la densité est assez complexe, car il est en rapport avec des variations de la température le long du filet fluide. Toutefois dans nombre de cas, quand la particule se déplace suffisamment vite, on peut considérer, comme le montre l'expérience, que la pression et la densité se conforment à la loi adiabatique

$$\frac{p}{\rho^{\varkappa}} = \frac{p_1}{\rho_1^{\varkappa}} = \text{const}, \tag{105.3}$$

où $\varkappa$ est l'exposant adiabatique dépendant de la nature du gaz (pour l'air il est égal à 1,4) et ρ_1 la densité du gaz dans le récipient. La loi adiabatique (105.3) découle du fait qu'au cours de la dilatation de la particule il ne se produit aucun échange de chaleur avec les particules voisines.

Faisons dépendre dans (105.2) la densité de la pression et, en transformant, il vient

$$-p^{-1/\varkappa}\frac{dp}{ds} = \frac{\rho_1}{p_1^{1/\varkappa}} v \frac{dv}{ds}. \tag{105.4}$$

Cette expression peut être intégrée le long de la trajectoire du filet fluide. Si la pression dans le ballon est p_1 et la pression dans l'espace dans lequel s'écoule le gaz est égale à p_0, il faut intégrer par rapport à la pression de p_1 à p_0 et par rapport à la vitesse, de zéro à v_0 (vitesse de sortie) :

$$-\int_{p_1}^{p_0} p^{-1/\varkappa}\, dp = \frac{\rho_1}{p_1^{1/\varkappa}} \int_0^{v_0} v\, dv.$$

Effectuant l'intégration et transformant, on obtient la vitesse d'écoulement :

$$v = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_1}{\rho_1}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}. \qquad (105.5)$$

Si le gaz était supposé incompressible, on obtiendrait alors de (105.1)

$$v_{\text{Incom}} = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho_1}}. \qquad (105.6)$$

La vitesse d'écoulement du gaz d'un ballon sous pression peut s'écrire ainsi

$$v = v_{\text{Incom}} \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{1 - \frac{p_0}{p_1}}}. \qquad (105.7)$$

Il est maintenant facile d'apprécier l'erreur commise dans les calculs où le gaz est supposé incompressible ; pour cela il suffit d'évaluer la grandeur de la racine de (105.7) pour la différence de pression donnée. On peut se convaincre par un calcul direct que pour une différence très petite entre les pressions p_1 et p_0, égale, par exemple, à quelques pour cent, la grandeur de la racine ne différera que très peu de l'unité. On peut calculer alors la vitesse de l'écoulement du gaz comme pour des liquides incompressibles.

Déterminons la valeur exacte de l'erreur faite, en admettant l'air incompressible à la pression proche de la pression atmosphérique. Supposons que la différence de pression dans le vase et en dehors est de 10 % de la pression atmosphérique, et posons que la pression dans le vase p_1 est de 1 atm tandis qu'en dehors $p_0 = 0{,}9$ atm. Quelle serait la vitesse d'écoulement si l'air était un liquide incompressible? Portant dans (105.6) la valeur de la densité de l'air

$$\rho_1 = 1{,}293 \text{ kg/m}^3$$

et la grandeur de la pression atmosphérique

$$p_1 = 1{,}0133 \cdot 10^5 \text{N/m}^2,$$

il vient

$$v_{\text{Incom}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}0133 \cdot 10^5}{1{,}293}} = 125 \text{ m/s}.$$

Calculons maintenant la valeur de la racine dans (105.7). Introduisons les notations $\Delta = 1 - \frac{p_0}{p_1}$ et $\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = a$, la racine prend alors la forme

$$\sqrt{\frac{1 - (1 - \Delta)^a}{a\Delta}};$$

décomposons $(1 - \Delta)^a$ en série de Taylor au voisinage de l'unité et il vient

$$(1 - \Delta)^a = 1 - a\Delta + \frac{a(a-1)}{2}\Delta^2 + \ldots$$

Portant cette expression dans la racine et transformant, on obtient

$$\sqrt{1-\frac{\Delta}{2}(a-1)+\ldots}=\sqrt{1+\frac{\Delta}{2\varkappa}+\ldots}\approx 1+\frac{\Delta}{4\varkappa}+\ldots$$

En y portant $\Delta = 0{,}1$ et $\varkappa = 1{,}4$, on trouve que l'erreur dans la détermination de la vitesse est d'environ 2 %. Donc, dans les cas où une grande précision n'est pas exigée dans l'évaluation de la vitesse à des dénivellations de pression inférieure à 10 % de la pression atmosphérique, on peut ne pas tenir compte de la compressibilité de l'air et assimiler l'écoulement de l'air à celui d'un liquide incompressible.

Il va de soi que pour une si faible différence de pression le long du filet fluide, la densité variera également très peu; le pourcentage des variations de la pression et de la densité sera à peu près le même. En effet, pour une détente adiabatique du gaz d'une grandeur insignifiante, la variation relative de la pression sera de $\varkappa$ fois plus grande que la variation relative de la densité: car de (105.3) on obtient $\frac{dp}{p} = \varkappa\frac{d\rho}{\rho}$. Une petite variation de densité le long du filet n'influe pas sur la grandeur de la vitesse et, par suite, sur la nature de l'écoulement.

§ 106. PRESSION AU POINT CRITIQUE DE L'ÉCOULEMENT SUR UN CORPS

Le plus répandu des appareils mesurant la vitesse de l'écoulement est le tube de Pitot; au moyen de ce tube on mesure aussi la vitesse du corps par rapport à l'air, par exemple, la vitesse de l'avion.

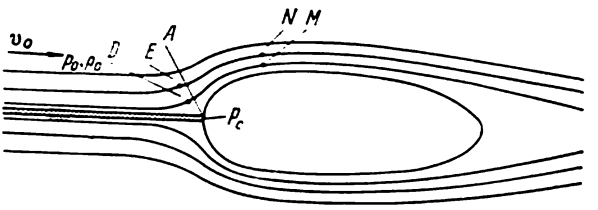


Fig. 293

Dans cet appareil on utilise le lien existant entre la pression au point « critique » de l'écoulement sur le corps et la vitesse du courant.

Si au sein d'un écoulement liquide ou gazeux se trouve un corps quelconque que le liquide entoure de tous les côtés, les filets divergent alors d'une certaine manière le long de la surface du corps, à peu près comme c'est montré sur la figure 293. Il y a donc, du côté du corps faisant face au courant, un point A dit *point critique* d'où les filets divergent dans différentes directions en entourant le corps. Etant donné que le courant diverge au point critique, il devient évident qu'en ce point la vitesse doit être nulle et, par suite de la continuité, elle reste également très faible en son voisinage. Soit

un filet qui vient buter pour ainsi dire sur le point critique; ce filet est hachuré sur la figure 293.

Le corps se trouve au sein d'un flux uniforme d'un liquide parfait incompressible, aussi à une certaine distance du corps, suffisamment éloignée, la pression p_0, la densité ρ_0 et la vitesse v_0 sont partout les mêmes; par suite, la constante de Bernoulli est égale [1] à $p_0 + \frac{\rho_0 v_0^2}{2}$ pour tous les filets liquides ou pour tous les points du flux. Etant donné qu'au point critique la vitesse est nulle il s'ensuit, d'après la formule de Bernoulli (102.5), que la pression en ce point p_c est

$$p_c = p_0 + \frac{\rho_0 v_0^2}{2}, \tag{106.1}$$

ou

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p_c - p_0)}{\rho_0}}. \tag{106.2}$$

Remarquons que loin du corps la pression au point critique et la vitesse du flux sont liées par la relation qui liait la vitesse et la pression dans un liquide sous pression s'écoulant d'un vase (voir (105.1)). Seulement dans l'un des cas, le flux est l'image réfléchie de l'autre.

La pression au point critique du corps placé dans un flux, souvent appelée en technique « pression de charge totale », peut être mesurée à l'aide d'un manomètre. Il suffit, généralement, de joindre une prise de pression par un tube long avec l'orifice percé près du point critique qu'il est plus approprié d'appeler domaine critique. La pression au point critique du corps, baigné par un flux, nous fournit la constante de Bernoulli de ce flux, appelée « charge totale ». Connaissant la charge totale, on peut déterminer la vitesse du flux en tout point, si est connue la pression statique p_0 au sein du flux et la densité du liquide ρ_0.

Il est commode de choisir en qualité de corps autour duquel s'effectue l'écoulement, un tube tournant son ouverture vers le flux. L'autre bout du tube est réuni au manomètre mesurant la pression dans le tube. Quelquefois au lieu du tube on prend un corps cylindrique à l'extrémité profilée (fig. 294), suivant l'axe duquel est percé un orifice A qu'un petit tube réunit au manomètre. Ce cylindre, fixé sur un porte-objet, est orienté par l'orifice A vers le flux de manière que le domaine critique se trouve dans la zone de l'orifice.

Pour évaluer la vitesse du flux v_0, il faut connaître, outre la charge totale p_c, la pression statique au sein du flux p_0. La pression

[1] On admet dans ce problème que le terme γh peut être négligé, car la variation de la hauteur est très faible. Au cas de besoin ce terme peut toujours être pris en compte.

statique dans le flux se détermine à peu près de la manière dont on mesure la pression dans un tube contenant un liquide qui s'écoule (voir fig. 291). Dans les parois du tube des orifices étaient percés qu'on réunissait aux tubes du manomètre. Dans le cas concerné pour mesurer la pression au sein du flux le corps cylindrique est placé de façon que sa génératrice suive les lignes des filets dans le flux non perturbé [1], et on évalue la pression à l'orifice de petit diamètre percé dans la paroi du corps. Si la section du filet liquide

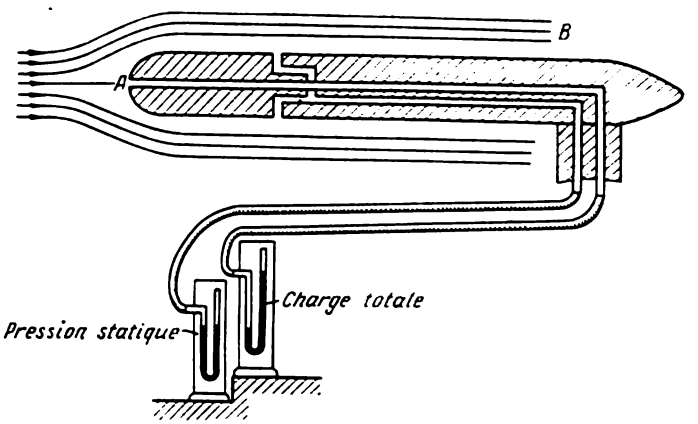


Fig 294

passant près de l'orifice est la même que celle du filet au loin du corps, la pression à l'orifice sera égale à la pression au loin du corps [2]. L'orifice est réuni par un tube avec un manomètre qui enregistre la pression statique p_0.

L'orifice servant à mesurer la pression statique au sein du flux est habituellement pratiqué dans le corps cylindrique même qu'on utilise pour la mesure de la pression de la charge totale. Dans le tube de Prandtl, dont la section est représentée schématiquement à la figure 294, l'orifice pour la mesure de la pression statique se trouve à une certaine distance du front amont du cylindre (à peu près à la distance de 3-5 diamètres), à l'endroit où les filets liquides s'alignent. Ces orifices sont réunis au manomètre à l'aide d'un embout en caoutchouc spécial, qui mesure la pression statique p_0 dans le flux.

---

[1] Cette exigence est toujours remplie, si l'axe du cylindre est dirigé suivant le flux et son diamètre est petit devant les dimensions transversales de la veine du flux.

[2] Rigoureusement parlant, la pression sera la même que si la température en ces points le sera aussi.

Connaissant la pression de la charge totale p_c et la pression statique p_0, on peut, d'après l'équation (106.1), déterminer la vitesse du flux qui arrive sur l'obstacle.

La grandeur $p_v = \frac{\rho_0 v_0^2}{2}$ est appelée *pression dynamique* (« cinétique ») ou de vitesse. Elle peut être mesurée directement, si le manomètre est réuni aux deux prises donnant d'une part, la pression totale p_c et, d'autre part, la pression statique p_0, l'appareil indiquant alors la différence p_v, ou la pression dynamique. On évalue la vitesse d'après la grandeur de la pression dynamique.

Notons que pour déterminer de façon approchée la vitesse de l'air, on peut utiliser la formule

$$v = 4\sqrt{h}, \tag{106.3}$$

où la vitesse v est mesurée en m/s et la différence des pressions ou la pression cinétique $p_v = h$, en milimètres d'eau. Cette formule découle de (106.2), si l'on considère comme le font généralement les ingénieurs que la densité de l'air est

$$\rho \approx \frac{1}{8}\,\frac{\text{kgf}\cdot s^2}{\text{m}^4}.$$

Pour déterminer la vitesse d'un gaz compressible (l'air, par exemple) à des vitesses importantes [1], il faut déjà tenir compte de la variation de la densité et calculer la relation entre la pression et la vitesse au sein d'un filet fluide comme cela a été fait au § 105. Les formules (105.5) et (105.7) peuvent être utilisées pour le calcul de la vitesse d'après la pression, si on substitue p_c (pression au point critique) à p_1. Mais pour une vitesse très grande proche de la vitesse du son dans le gaz, ces relations ne conviennent pas, car à une telle vitesse du flux un nouveau phénomène apparaît : le « saut de vitesse et de pression » devant le corps dont on parlera plus bas au § 120.

§ 107. VARIATION DE LA PRESSION DANS LA SECTION TRANSVERSALE DU FILET

En déterminant la pression au sein d'un filet fluide (§ 100), on avait admis que la pression conservait sa valeur dans toute section droite du filet. On y avait admis une pression moyenne pour la section droite non seulement parce que le diamètre de la section du filet était petit, mais également parce qu'on déterminait l'accélération de la particule suivant l'axe du filet.

Si le filet fluide est rectiligne pour la tranche considérée, c'est-à-dire que la ligne axiale du filet est une ligne droite, l'accélération de la particule liquide ne sera dirigée que suivant l'axe du filet et,

[1] Comme il a déjà été mentionné au § 105, à une vitesse inférieure 130 m/s, l'erreur commise pour un air incompressible ne dépasse pas 2 %.

partant, la pression doit être la même pour toute section du filet près des parois opposées et, donc, exactement *la même* le long de toute la section transversale. Mais aux endroits où la ligne axiale se recourbe, la pression dans la section droite ne peut être constante. En effet, la particule parcourant un filet incurvé possède une accélération centrifuge v^2/R, où R est le rayon de courbure de la ligne axiale du filet (fig. 295). Donc sur la particule doit s'exercer une force située dans le plan de courbure et dirigée perpendiculairement à la trajectoire du filet : elle est égale à

$$\rho S \frac{v^2}{R} ds,$$

où S est l'aire de la section du filet et ds la longueur de la particule liquide.

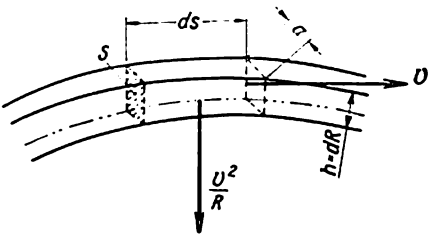


Fig. 295

Cette force ne peut être due qu'à la pression des couches attenantes du liquide en mouvement. Il doit donc exister une différence de pressions entre les parois du filet dans le plan de courbure. Cette différence de pressions se calcule facilement, si l'on pose que la section du filet a la forme d'un rectangle de côtés h et a, $S = ah$. Alors, en vertu de la seconde loi de la dynamique, dans la direction perpendiculaire à la trajectoire du filet fluide on peut écrire :

$$(p_1 - p_2)\, a\, ds = \rho a h \frac{v^2}{R} ds. \tag{107.1}$$

Simplifiant par $ah\, ds$, on obtient

$$\frac{p_1 - p_2}{h} = \frac{\rho v^2}{R}. \tag{107.2}$$

Si le filet est suffisamment fin, $\frac{p_1 - p_2}{h}$ peut être remplacé par $\frac{\partial p}{\partial R}$ et la formule (107.2) peut être récrite ainsi :

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \frac{\rho v^2}{R}. \tag{107.3}$$

Cette égalité signifie que la pression varie transversalement aux filets fluides quand ces derniers s'incurvent, la chute de pression $\frac{\partial p}{\partial R}$ étant dirigée vers le centre de courbure de l'axe du filet.

Par exemple, dans un écoulement sur un corps (voir fig. 293) la pression au point D doit dépasser celle au point E et inversement, en N, elle doit être plus grande qu'en M. Donc d'après la courbure de la trajectoire du filet fluide on peut toujours conclure à la variation de la pression dans la direction perpendiculaire à la trajectoire

du filet fluide, car les particules ne peuvent infléchir leur trajectoire que s'il existe une différence de pressions.

Comme la pression sur la surface du corps définit les forces sollicitant le corps de la part du courant, il devient possible d'aboutir à une série de conclusions utiles sur les forces auxquelles est soumis le corps au sein d'un flux liquide ou gazeux en procédant à l'analyse des variations de pression transversalement aux filets fluides.

§ 108. RÉPARTITION DES PRESSIONS DANS UN LIQUIDE EN ROTATION

En brassant le thé dans le verre, on peut observer la surface du liquide mis en rotation, elle acquiert une forme parabolique. Imaginons un verre ou tout autre récipient cylindrique sur le disque d'une centrifugeuse (fig. 296).

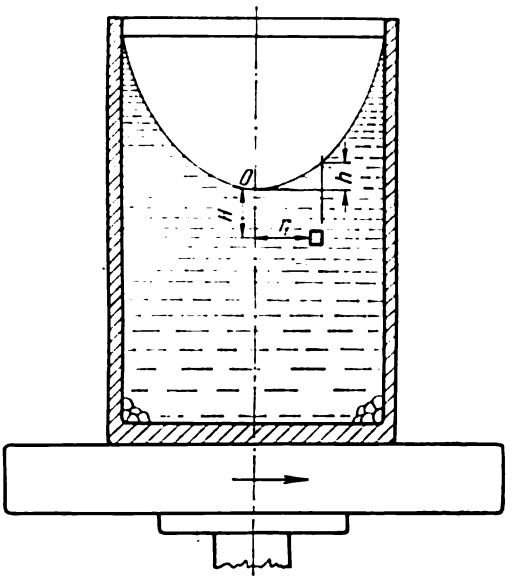


Fig. 296

Si le disque tourne à la vitesse angulaire ω, au bout d'un certain temps toutes les particules liquides effectueront des mouvements circulaires de sorte que le liquide restera immobile par rapport aux parois du verre. Les particules se déplaçant dans les filets liquides suivant un cercle de rayon r, on voit la pression croître dans le plan horizontal à mesure que l'on s'éloigne de l'axe de rotation. Le gra-

dient de pression le long du rayon r sera d'après (107.3) égal à [1]

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho v^2}{r}. \tag{108.1}$$

Remplaçant dans (108.1) la vitesse circulaire de la particule v par ωr, il vient

$$\frac{dp}{dr} = \rho w^2 r; \tag{108.2}$$

cette équation peut être intégrée par rapport à r:

$$\int_{p_0}^{p_1} dp = \rho\omega^2 \int_0^{r_1} r\,dr,$$

ou

$$p_1 - p_0 = \frac{\rho\omega^2}{2} r_1^2. \tag{108.3}$$

On en déduit que la pression dans la section horizontale du récipient croît proportionnellement au carré de la distance à l'axe de rotation. Comme on le sait, la pression en chaque point du liquide doit être la même dans toutes les directions et, par suite, le niveau du liquide doit également monter avec la distance de l'axe. En effet, les variations de pression dans le sens vertical ne sont le fait que du poids du liquide; donc, pour que la particule du liquide soit au repos par rapport au verre, il faut que le niveau du liquide au-dessus de l'élément annulaire de rayon r_1 soit supérieur de la grandeur h au niveau du liquide au centre. La pression due au poids du liquide sur le plan horizontal passant par le point inférieur de la surface libre (point O sur la figure 296) est égale à $h\gamma$, et elle doit être égale à la pression $\frac{\rho\omega^2}{2} r_1^2$, où r_1 est la distance du point considéré de l'axe. Donc

$$h\gamma = \frac{\rho\omega^2}{2} r_1^2,$$

ou

$$h = \frac{\omega^2}{2g} r_1^2,$$

car $\gamma = \rho g$, où g est l'accélération de la pesanteur. La hauteur du niveau du liquide croît proportionnellement au carré de la distance de l'axe de rotation, c'est-à-dire que la surface libre est un paraboloïde de révolution observé dans les expériences.

La forme de la surface libre témoigne des variations de pression le long du rayon. Or cela peut se vérifier également de la façon sui-

[1] Le mouvement étant permanent, la pression p peut être considérée dans le plan horizontal comme une fonction de r seulement.

vante : jetons dans le verre en rotation sur une centrifugeuse des morceaux de substance plus lourde que l'eau, au bout d'un certain temps tous ces morceaux s'accumuleront au fond du verre près de sa paroi. Quant aux morceaux de substance flottant à la surface de l'eau, ils se concentreront autour du point *0*.

Il est intéressant d'examiner comment se comporteront dans le verre un fragment de plomb et une bille en cire (la cire est plus légère que l'eau). En guise d'exercice, essayez d'interpréter les résultats de cette expérience. Quelle sera la répartition de pression dans un récipient en rotation fermé de toutes parts? Quelles seront la répartition de pression et la forme de la surface si le centre du verre contenant de l'eau ne coïncide pas avec l'axe de la centrifugeuse?

Remarquons que dans le cas étudié du mouvement des particules liquides dans un verre en rotation, la constante de Bernoulli ne conserve sa grandeur que le long d'un filet et varie suivant les filets. En se référant à (102.5) et en tenant compte de (108.3), on peut écrire pour un filet

$$\mathcal{Э} = p_1 + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} = p_0 + \rho\omega^2 r^2 ;$$

les filets étant horizontaux, on peut négliger le terme contenant h. La grandeur p_0, pression sur l'axe, ne dépend que de la profondeur et est égale à γH (voir fig. 296). Donc la constante de Bernoulli ($\mathcal{Э}$) varie avec la profondeur et la distance à l'axe de rotation.

§ 109. QUANTITÉ DE MOUVEMENT DU LIQUIDE ET DU GAZ

Dans nombre de cas pour l'étude du mouvement composé du liquide ou du gaz on peut se servir de la loi de variation de la quantité de mouvement. Pour le calcul et la détermination des forces sollicitant un corps ou un liquide, on peut procéder ainsi : on isole dans le liquide mobile conformément aux conditions du problème un certain volume de l'espace occupé par le liquide. On applique ensuite au liquide traversant ce volume la loi de la variation de la quantité de mouvement. Cette loi pour un écoulement en régime permanent peut s'énoncer ainsi : *la somme des forces extérieures agissant sur les particules liquides du volume considéré est égale à la variation en l'unité de temps de la quantité de mouvement du liquide de volume isolé.*

Les *forces extérieures* sont composées de forces appliquées *à chaque particule* liquide contenue dans le volume isolé (souvent ces forces se réduisent aux forces de gravitation) et de forces de pression s'exerçant sur la *surface* du volume isolé. Pour déterminer la variation de la quantité de mouvement par seconde il faut déterminer aupara-

vant la variation de la quantité de mouvement du fluide traversant un élément de surface infiniment petit.

Dans un certain élément de surface très petit $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} \cdot dS$ (fig. 297), où la vitesse peut être considérée comme constante, la quantité de mouvement passant par seconde (le « *flux* » *massique*) est

$$\rho \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{S} = \rho v\, dS \cos \alpha, \qquad (109.1)$$

où dS est l'aire de l'élément de surface et α l'angle entre la normale extérieure à la surface et la vitesse. Le « flux » massique est la quantité de liquide sortant par seconde par l'élément de surface considéré du volume isolé, et, c'est une grandeur scalaire. Le flux sortant du volume est affecté du signe plus et celui qui y entre du signe moins.

Le produit du flux massique (109.1) par le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$

$$\rho v\, dS \cos \alpha \cdot \boldsymbol{v} \qquad (109.2)$$

est une grandeur vectorielle et fournit la quantité de mouvement que possède le liquide, s'éloignant par seconde à travers un certain élément de surface du volume considéré.

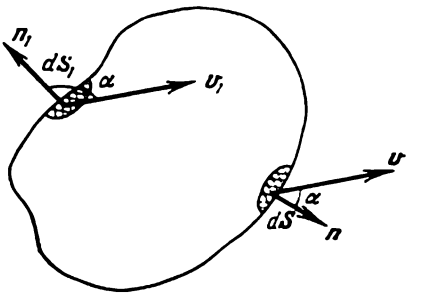


Fig. 297

La même expression (109.2) définit la quantité de mouvement « entrant » par seconde avec le liquide dans le volume par l'élément de surface donné (voir fig. 297). En sommant (ou en intégrant) la variation de la quantité de mouvement sur tous les petits éléments composant la surface totale du volume isolé, on obtient l'*accroissement total de la quantité de mouvement* par seconde dans le volume donné. C'est une grandeur vectorielle égale à la somme de toutes les forces extérieures s'exerçant sur le volume considéré : somme des forces de gravitation et des forces de pression sur la surface du volume isolé.

Notons que la loi de variation de la quantité de mouvement ainsi énoncée se justifie aussi bien pour le liquide que pour le gaz, il faut seulement en déterminant la quantité de mouvement dans le mouvement du gaz tenir compte de la dépendance entre la densité et la pression.

§ 110. RÉACTION DE L'EAU COURANTE

Appliquons la loi de variation de la quantité de mouvement pour déterminer la réaction du liquide sur le tube qu'il parcourt. Chacun a pu observer le déroulement brusque d'un tuyau d'arrosage plié quand on y introduit l'eau. Le tuyau plié aurait dû modifier la

direction de la quantité de mouvement de l'eau (fig. 298), mais les forces appliquées au volume de l'eau qui s'écoule de la part du tuyau plié sont très faibles et, par suite, le tuyau se déplie, la quantité de mouvement du liquide sortant coïncide en direction avec la quantité de mouvement du liquide entrant.

Déterminons la réaction de l'eau sur le robinet représenté sur la figure 299. Isolons le volume du liquide de la façon montrée à la figure 299 en pointillé ; sa surface coïncide avec la surface intérieure du robinet et avec ses deux sections droites A et B. La section droite

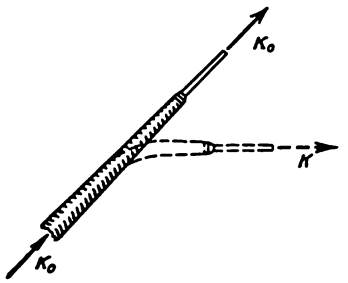


Fig. 298

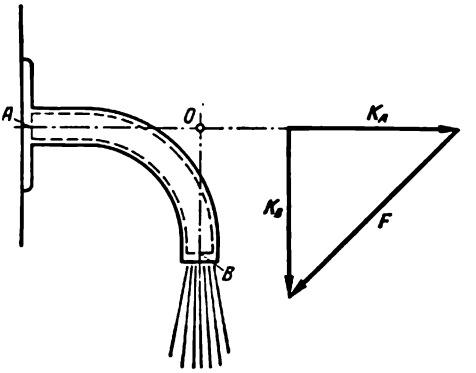


Fig. 299

du robinet ne varie pas, donc la vitesse v dans chaque section est la même en grandeur absolue. La quantité de mouvement du liquide pénétrant par seconde dans le volume considéré est alors

$$K_A = \rho S v_A v, \tag{110.1}$$

où, comme d'habitude, ρ est la densité de l'eau, v_A la vitesse et S l'aire de la section droite du robinet. Le vecteur de la quantité de mouvement K_A est dirigé perpendiculairement à la section A. La quantité de mouvement sortant par seconde du volume de liquide isolé K_B est numériquement égale au module de K_A, mais est dirigée sous un angle de 90° par rapport à lui. Le vecteur de variation de la quantité de mouvement est donc dirigé comme il est indiqué sur la figure 299 et est égal dans ce cas à la force

$$F = K_B - K_A, \tag{110.2}$$

et sa grandeur est

$$F = \sqrt{2}\, K = \sqrt{2}\rho S v^2.$$

Voyons maintenant les forces sollicitant le volume isolé. L'action de la force de gravitation peut être négligée [1], il ne reste donc que

[1] Le poids du liquide occupant le volume est pratiquement très faible comparé à la force cherchée. Il va de soi que la prise en compte de cette force ne présente pas de difficulté.

les pressions sur la surface du volume isolé. Examinons-les successivement. Les pressions dans les sections d'entrée A et de sortie B du liquide sont les mêmes si l'on néglige la viscosité de l'eau. En effet, il suit de la formule de Bernoulli que pour des vitesses égales le long du filet liquide la pression sera également la même. La pression à la sortie du jet est égale à la pression atmosphérique. La pression atmosphérique à l'entrée et à la sortie du jet est équilibrée par la pression sur le robinet de l'extérieur, et par suite, leur résultante sur le robinet est nulle, de même que la pression atmosphérique qui sur le robinet vide ne donne pas de résultante si l'on néglige la force ascensionnelle de l'air.

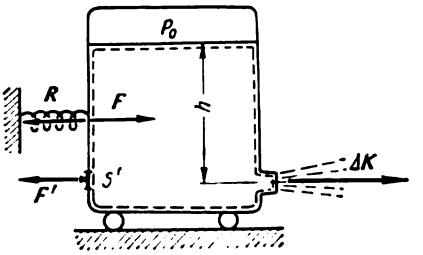


Fig. 300

Il ne reste que l'action de la pression du robinet sur l'eau dans la partie restante de la surface du volume isolé. La somme de ces forces, ou la résultante de la pression du robinet sur le liquide sortant, est F, qui est la variation de la quantité de mouvement par seconde dont la grandeur et la direction sont connues de (110.2). La réaction du liquide sortant sur le robinet est donc égale et opposée au vecteur de variation de la quantité de mouvement F; elle passe par le point O (voir fig. 299), qui est le point d'intersection des lignes de direction de la quantité de mouvement du liquide entrant et sortant.

Evaluons la force qu'exerce sur le vase le jet de liquide qui en sort (fig. 300). D'après la formule de Bernoulli (102.5) la vitesse de l'écoulement est

$$v=\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0+\gamma h)}, \qquad (110.3)$$

où p_0 est la pression sur le liquide dans le vase [1], h la hauteur du niveau d'eau au-dessus de l'orifice. Isolons un volume du liquide, comme il est indiqué sur la figure 300. Pour faciliter les calculs supposons que le vase a une section horizontale rectangulaire, ce qui permet de ne tenir compte que des pressions et des variations de la quantité de mouvement du liquide sur les surfaces normales au jet; pour toutes les autres directions la variation de la quantité de mouvement du liquide est nulle. On calculera donc les forces et l'accroissement de la quantité de mouvement dans la direction de la vitesse du jet.

[1] Plus précisément, p_0 est la grandeur dont la pression dans le vase est supérieure à la pression atmosphérique.

Si la section droite du jet est S_0, la variation de la quantité de mouvement par seconde dans la direction du jet sera

$$\Delta K = \rho S_0 v^2 = Qv, \tag{110.4}$$

où Q est le débit massique par seconde. Le vase agit sur le liquide avec la force $F = \Delta K$, quant à la réaction du liquide R sur le vase, elle est égale en grandeur à F et est de direction opposée. La force R est dite *réaction*. Elle est exactement égale à la réaction définie par la formule de Mechtcherski (§ 27).

La réaction du jet sortant peut se déterminer de façon expérimentale, si on mesure la force s'exerçant sur le vase au moyen d'un dynamomètre, comme c'est montré schématiquement sur la figure 300. C'est à peu près de la même manière qu'on mesure la poussée des moteurs à réaction et des fusées.

Il est intéressant de dégager comment la réaction est transmise aux parois du vase. La réaction est due à la différence de pression sur les parois du vase, différence engendrée par l'écoulement de la veine liquide. La pression sur la paroi arrière (fig. 300) peut être considérée égale à p_0 augmentée de la pression

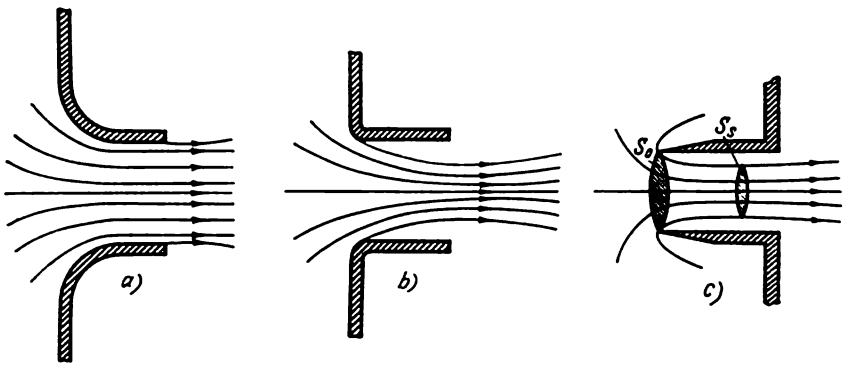


Fig. 301

hydrostatique γh (γ étant le poids spécifique du liquide et h la profondeur du point), car la vitesse d'écoulement près de cette paroi est infiniment petite devant la vitesse dans la veine du liquide sortant. La pression sur la paroi avant du vase (voir fig. 300), la paroi où se situe l'orifice, ne correspondra pas à la pression sur la paroi arrière. S'il n'en était pas ainsi et les pressions sur les parois arrière et avant étaient les mêmes, elles s'équilibreraient pour tous les éléments de surface opposés, à l'exception de l'élément $S' = S_0$ situé sur la paroi arrière en face de l'orifice d'aire S_0. Donc la pression totale du liquide sur la paroi arrière, comme il fallait s'y attendre, sera supérieure. Evaluons la grandeur de la pression sur l'élément de surface S', en supposant ses dimensions très réduites devant h. Cette force F' sera évidemment égale à

$$F' = S_0 (p_0 + \gamma h). \tag{110.5}$$

Considérant la formule (110.3), écrivons:

$$F' = \frac{1}{2}\rho v^2 S_0;$$

puis confrontant avec (110.4), on voit que la force F' est exactement de deux fois inférieure à la réaction R. Il est donc erroné de considérer la pression égale sur les parois opposées du vase, autrement dit on ne peut négliger la vitesse d'écoulement au voisinage de l'orifice dans la paroi avant et qui est la raison de la diminution de pression dans cette région. Pour une détermination précise des variations de répartition de la pression sur les parois du vase, il aurait fallu calculer tout l'écoulement dans le vase, ce qui présente un problème très ardu, tandis qu'en appliquant la loi de variation de la quantité de mouvement le problème de la détermination de la réaction se résout facilement sans recourir à ce calcul.

Ces raisonnements montrent que la chute de pression sur la paroi avant, au voisinage de l'orifice, engendre une force égale à la moitié de la réaction R. Notons que cette conclusion n'est vérifiée que quand la section minimale de la veine S_0 est égale à l'aire de l'orifice, or ce n'est pas toujours le cas.

Jusque-là on avait admis que la veine liquide sortait de l'ajutage par passages progressifs de la paroi verticale, ce qui équivalait à un écoulement de l'orifice en filets parallèles remplissant ce dernier de la façon indiquée à la figure 301, *a*. Si le passage de la paroi à l'ajutage n'est pas profilé la veine liquide se contractera (fig. 301, *b*). Cette contraction de la veine peut s'expliquer facilement. Les filets marginaux du liquide arrivant à l'orifice en longeant la paroi se précipitent par inertie vers le centre de la veine et ce n'est que sous la pression des particules plus proches du centre de la veine que ces filets marginaux se redressent. Dans ce cas la section minimale de la veine correspondant à l'endroit où les filets se redressent, est inférieure à la section de sortie. Le rapport de l'aire de la section minimale à l'aire de la section de sortie dépend des caractéristiques géométriques de l'orifice et se détermine par tatonnements.

Au cas d'un orifice à paroi taillée en biseau, l'aire de la section de la veine est de beaucoup inférieure à celle de la section de sortie, mais dépasse la moitié de cette dernière. Si l'orifice en mince paroi est en forme d'un cylindre rentrant dans le vase (fig. 301, *c*), l'aire minimale de la section de la veine devient exactement égale à la moitié de l'aire de la section de sortie. On peut dans ce cas négliger complètement la vitesse des filets longeant la paroi verticale du vase dans laquelle rentre le cylindre de sortie, car la paroi verticale du vase est éloignée de l'orifice. La pression sur les parois opposées sera alors la même et la réaction d'après (110.5) devra être égale à

$$F' = S_0 (p_0 + \gamma h), \tag{110.6}$$

où S_0 est l'aire de l'orifice du cylindre. Or d'après la loi de la variation de la quantité de mouvement la réaction doit être égale à

$$F' = S_s \rho v^2 = S_s \cdot 2 (p_0 + \gamma h), \tag{110.7}$$

où S_s est l'aire de la section droite de la veine au point le plus étranglé (fig. 301, *c*). Comparant (110.6) et (110.7) on conclut

$$2S_s = S_0, \tag{110.8}$$

ou l'étranglement de la veine (rapport de l'aire de la veine à celle de la section de sortie) est 1/2. Ce rapport est bien confirmé par des études expérimentales.

L'application de la loi de la variation de la quantité de mouvement est particulièrement efficace dans les cas où il est facile d'évaluer la direction et la vitesse de la veine. Par exemple, lors d'une chute de la veine liquide sur le volet d'une roue de turbine hydraulique, dont l'aube est de la forme indiquée

sur la figure 302, *b*, la pression sera de deux fois plus grande qu'au cas de chute à la même vitesse de la veine de section identique sur un volet plat montré sur

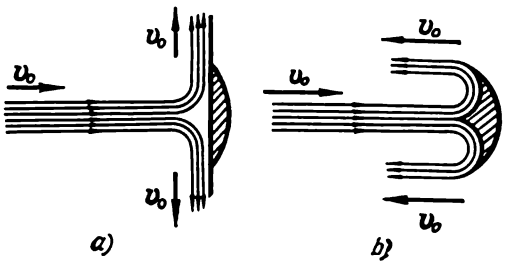


Fig. 302

la figure 302, *a*. On peut évidemment dans ces conditions estimer approximativement que la vitesse de la veine percutant le volet reste constante en grandeur, les vitesses des volets dans les deux cas étant les mêmes et suffisamment petites devant la vitesse des particules dans la veine.

§ 111. ÉCOULEMENT D'UN LIQUIDE VISQUEUX DANS UNE CONDUITE

Dans nombre de cas il est possible de négliger les forces engendrées par la viscosité et d'analyser le phénomène de façon approchée comme si la viscosité était absente. Cette manière de procéder est souhaitable non seulement parce qu'on est encore dans l'ignorance des méthodes générales d'étude de l'écoulement visqueux mais, essentiellement, parce que dans nombre de cas pratiques très importants les résultats d'études expérimentales des liquides courants concordent dans certaines limites de précision avec les résultats de l'analyse théorique de l'écoulement du liquide « parfait ». Il est seulement important de savoir quand la sous-estimation de la viscosité aboutit à des erreurs importantes.

Comme on le sait, la viscosité est proportionnelle à la variation de la vitesse du courant dans la direction perpendiculaire à la vitesse et, par suite, elle se manifestera d'autant plus fortement là où les variations de vitesse sont grandes. Dans l'écoulement d'un liquide visqueux, sur des corps solides, les particules liquides contiguës au corps y adhèrent pour ainsi dire et possèdent une vitesse nulle par rapport à ce corps. Donc au voisinage immédiat de la surface du corps solide, la vitesse du courant croît de la valeur zéro jusqu'à une certaine grandeur. Au loin du corps les variations de la vitesse du courant sont relativement faibles et l'influence de la viscosité ne s'y manifeste presque pas.

La couche de liquide entourant le corps, où la vitesse croît et, par suite, le rôle de la viscosité est grand, est appelée *couche limite*. Dans certains cas cette couche est très mince et son influence est

négligeable : l'écoulement du liquide visqueux ou du gaz est semblable à celui qu'on aurait au cas de l'écoulement sur le corps d'un liquide parfait dénué de viscosité. Dans d'autres cas la couche limite n'est pas mince et on ne peut plus négliger la viscosité. C'est ainsi, par exemple, que dans l'écoulement du liquide visqueux à travers un tube étroit la couche limite peut occuper tout le volume du liquide mobile et il devient donc nécessaire de tenir compte de la viscosité.

Faisons l'expérience en mesurant la répartition de la pression au moyen de tubes manométriques dans un liquide s'écoulant au sein d'un tube horizontal de section invariable (fig. 303). Si le liquide

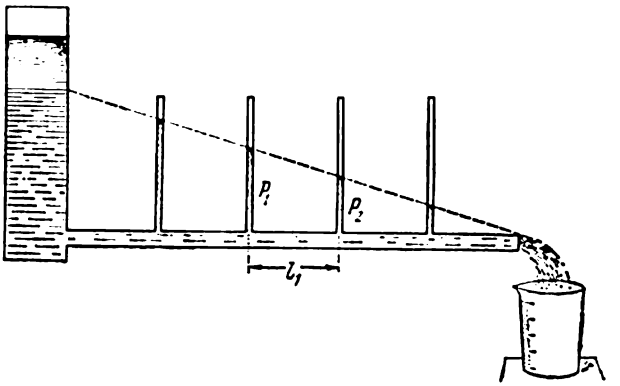


Fig. 303

est suffisamment visqueux, par exemple, de la glycérine, ou un sirop, ou bien le tube est assez étroit, la pression chutera uniformément tout au long du tube. Cela se voit d'après les niveaux des petits tubes manométriques équidistants qui se rangent sur une droite inclinée (voir fig. 303). Si le liquide n'était pas visqueux, les niveaux de tous les tubes seraient les mêmes et la pression le long du tube serait invariable.

En effet, le liquide peut être considéré comme incompressible, donc la vitesse du courant dans chaque section du tube est la même ; le tube ayant une section constante, selon la formule de Bernoulli, la pression devrait également rester invariable. Dans le cas considéré, outre les pressions sur la particule, s'exercent des forces dues à la viscosité et, par suite, dans un écoulement permanent à une vitesse constante la pression chute le long du filet liquide.

L'écoulement le long du tube étant rectiligne, les vitesses de toutes les particules suivant l'axe du tube et les forces dues à la viscosité n'agiront que dans la direction de l'axe du tube. La chute de pression le long du filet liquide est contrebalancée par des forces de viscosité et, par suite, la vitesse d'écoulement du liquide le long du filet reste constante.

Examinons plus en détail l'écoulement permanent d'un liquide visqueux dans un tube horizontal de section invariable. La pression dans chaque section droite peut être considérée comme constante. S'il n'en était pas ainsi, les filets liquides se recourberaient ou des courants transversaux au tube apparaîtraient. Toutes les particules liquides attenantes aux parois du tube cylindrique y adhèrent et ont une vitesse nulle, la couche annulaire qui leur est contiguë, par suite de la symétrie, doit posséder la même vitesse le long de toute la circonférence. Si l'on imagine un liquide divisé en des couches annulaires et concentriques suffisamment minces, la vitesse dans chacune de ces couches serait la même, dont la grandeur de la vitesse d'écoulement ne peut être qu'une fonction de la distance r de la particule donnée de l'axe du tube.

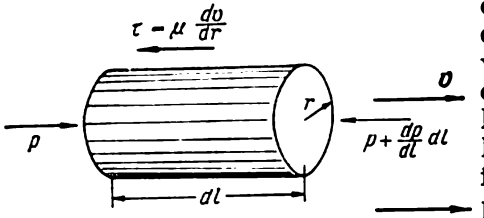


Fig. 304

Isolons du volume du liquide qui s'écoule un cylindre de rayon r et de longueur dl (fig. 304) et écrivons les conditions du mouvement du cylindre. Le liquide se déplace de façon uniforme, donc la somme de toutes les forces appliquées au cylindre isolé est nulle. La différence des pressions aux extrémités du cylindre

$$\left[p - \left(p + \frac{dp}{dl} dl\right)\right] \pi r^2 = -\frac{dp}{dl} dl \pi r^2$$

doit être équilibrée par la viscosité appliquée à la surface du cylindre. La somme des forces de viscosité est égale à l'aire de la surface latérale du cylindre $2\pi r\, dl$ multipliée par la tension des forces de viscosité τ. L'égalité à zéro de toutes les forces extérieures sollicitant le cylindre peut maintenant s'écrire ainsi :

$$-\frac{dp}{dl} dl \pi r^2 - \tau \cdot 2\pi r\, dl = 0$$

ou

$$\frac{dp}{dl} r = -2\tau. \qquad (111.1)$$

D'après la loi de Newton (voir (39.1)), la tension de toutes les forces de viscosité est proportionnelle à la dérivée de la vitesse dans la direction perpendiculaire qui est la direction du rayon

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr}, \qquad (111.2)$$

où μ est le coefficient de viscosité, quant au signe moins il n'est là que parce que la vitesse décroît avec l'augmentation du rayon. Por-

tant (111.2) dans l'égalité (111.1), il vient

$$\frac{dp}{dl} r = 2\mu \frac{dv}{dr}. \qquad (111.3)$$

La grandeur du gradient de pression le long de l'axe du tube $\frac{dp}{dl}$ ne dépend pas du rayon, car la pression p est la même dans toute section droite. Donc on peut déduire de l'équation (111.3) la relation liant la vitesse de l'écoulement au rayon, en intégrant cette équation par rapport au rayon tout en tenant compte qu'au voisinage des parois la vitesse $v(R) = 0$,

$$\frac{dp}{dl} \int_R^r r\,dr = 2\mu \int_0^r dv, \qquad (111.4)$$

où R est le rayon du tube. Après calcul il vient

$$\frac{1}{2} \frac{dp}{dl} (r^2 - R^2) = 2\mu v,$$

ou

$$\frac{1}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dl} \right) (R^2 - r^2) = v. \qquad (111.5)$$

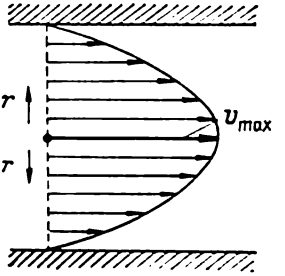


Fig. 305

La pression chute régulièrement dans la direction de la vitesse et, par suite, la grandeur $-\frac{dp}{dl}$ est positive et invariable. La vitesse sera maximale sur l'axe du tube et la répartition de la grandeur de la vitesse le long du diamètre du tube suit la loi parabolique (fig. 305). La vitesse maximale est

$$v_{max} = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dl} \right).$$

La distribution des vitesses d'écoulement d'un liquide visqueux dans un tube peut être observée d'après le mouvement de la surface de séparation entre deux liquides différemment colorés. On remplit partiellement un tube vertical avec du sirop de sucre coloré (fig. 306, *a*) et par-dessus on verse avec soin le même sirop, mais cette fois non coloré. Au repos, la frontière entre les sirops est horizontale. Après l'ouverture du robinet au bas du tube, un lent mouvement du liquide visqueux commence et la frontière de séparation se met à modifier sa forme dans le temps en s'allongeant suivant l'axe (voir fig. 306, *a*).

Connaissant la distribution des vitesses, on peut calculer le débit volumique du liquide Q à travers la section droite du tube. Par l'anneau de rayon r et d'aire $2\pi r\,dr$ il passe par seconde un volume de liquide $dQ = v\,2\pi r\,dr$ (fig. 306, *b*), tandis qu'à travers toute la section il s'écoulera

$$Q = \int dQ = 2\pi \int_0^R vr\,dr = \frac{2\pi}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dl} \right) \int_0^R (R^2 - r^2)\,r\,dr = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dl} \right). \qquad (111.6)$$

On a dans ce cas tenu compte de la formule (111.5).

En utilisant cette relation, on peut construire un appareil très simple permettant de mesurer le coefficient de viscosité μ du liquide et dont le schéma est donné à la figure 303. La grandeur $\frac{dp}{dl}$ peut s'évaluer sur la base des mesures

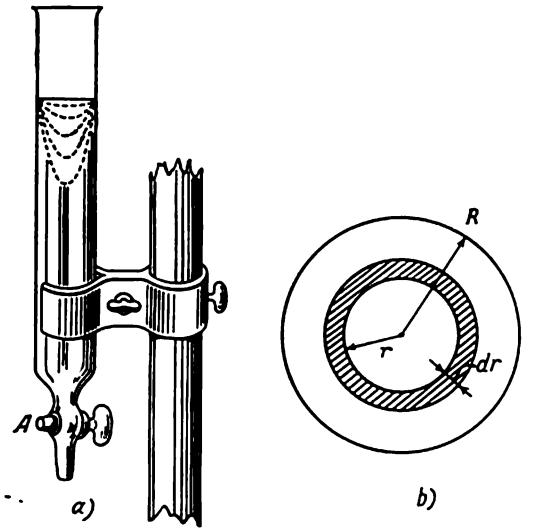


Fig. 306

de la pression aux différents points du tube. Etant donné que la pression chute proportionnellement à la longueur, on a :

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{p_0 - p_e}{l}, \qquad (111.7)$$

où p_0 est la pression à l'origine du tube et p_e, à l'extrémité du tube de longueur l.

La grandeur du débit Q peut être mesurée directement en évaluant la quantité du liquide passant durant un certain temps par le tube. Connaissant le rayon du tube R, on peut sur la base de ces données déterminer le coefficient de viscosité μ du liquide.

L'écoulement du liquide dans un tube cylindrique pour lequel les vitesses des particules sont partout dirigées suivant l'axe du tube est dit *laminaire* (ou *par filets*). Un tel écoulement a lieu pour des faibles valeurs de la vitesse du courant d'un liquide visqueux. Avec l'augmentation de la vitesse du courant et l'accroissement de la chute de pression aux extrémités du tube, l'écoulement modifie radicalement sa nature : au lieu d'un écoulement stable et laminaire, on observe un écoulement *turbulent* ou *tourbillonnaire*.

Il est facile d'observer un écoulement tourbillonnaire en injectant dans un tube en verre que parcourt de l'eau une veine colorée (fig. 307, *a*). Si la vitesse du courant est faible, l'écoulement est laminaire et la veine colorée en forme d'une ligne droite prend une position parallèle à l'axe du tube (fig. 307, *b*). Ensuite, avec l'aug-

mentation graduelle de la vitesse du courant, apparaît soudain un mouvement tourbillonnaire et la veine s'étend en une large bande aux marges irrégulières, comme c'est montré sur la figure 307, *c*.

Dans un mouvement permanent et turbulent la vitesse en un lieu donné ne reste pas constante en grandeur et en direction et varie de façon rapide et désordonnée en grandeur comme en direction. Mais la valeur moyenne de la vitesse prend une valeur constante suivant l'axe du tube. C'est pourquoi dans un courant turbulent on détermine le plus souvent la valeur moyenne de la vitesse.

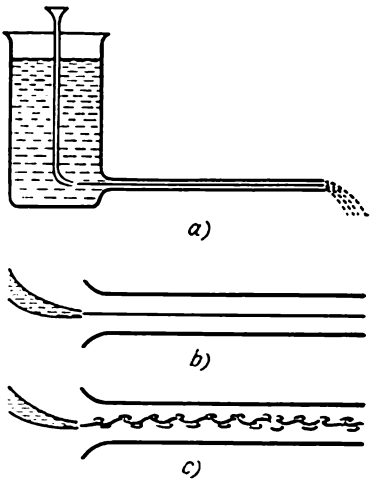


Fig. 307

La raison déterminant la turbulence sera éclairée plus bas au § 113. On remarque seulement ici que la distribution de la vitesse moyenne dans un courant turbulent suivant le diamètre du tube est complètement différente (fig. 308) de celle observée au cas d'un écoulement laminaire (fig. 305). Dans un mouvement turbulent la vitesse moyenne reste presque constante tout au long de la section

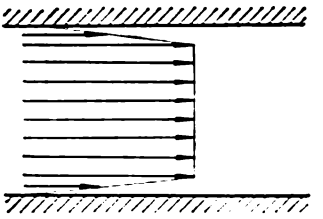


Fig. 308

et ne chute rapidement jusqu'à zéro que près des parois ; la *couche limite* contiguë aux parois n'occupe qu'une fraction relativement faible du courant, tandis qu'au centre le champ des vitesses est presque uniforme et rappelle davantage celui qui se forme dans le tube en l'absence de viscosité du liquide. Dans le cas de l'écoulement laminaire (voir fig. 305), il n'existe pas de couche limite bien définie, le champ des vitesses varie en tout point du tube, par suite du jeu de forces de viscosité de la même façon que près des parois ; on peut même dire que la couche limite occupe alors tout le courant liquide.

CHAPITRE XIII

ACTION DU COURANT FLUIDE SUR UN CORPS

§ 112. RÉSISTANCE FRONTALE DES CORPS À L'ÉCOULEMENT

Les forces sollicitant le corps solide dans un courant peuvent toujours être réduites à une résultante et à un moment résultant. La résultante peut toujours se décomposer en deux forces perpendiculaires : l'une suivant le courant, la *force de résistance frontale* ou *traînée* et l'autre, perpendiculaire à cette dernière. Pour des corps symétriques, se disposant de façon que leur axe de symétrie suive le courant, l'action du courant est évidemment aussi alignée avec le courant ; dans ce cas seule se manifeste la force de résistance frontale.

Quelle est donc l'origine de la force de la résistance frontale? Cette dernière dépend de la forme, des dimensions du corps, de la

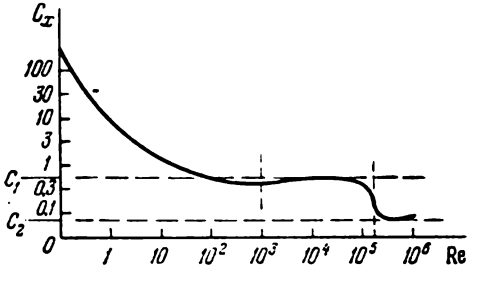


Fig. 309

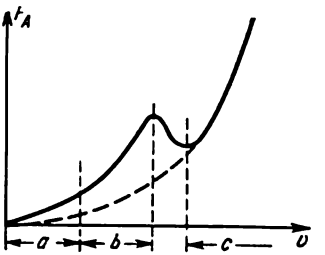


Fig. 310

vitesse du courant et des propriétés physiques du fluide. Les études expérimentales montrent que la force de résistance des corps de forme identique est proportionnelle à l'aire de la section transversale du corps (transversale par rapport à la direction de la vitesse v du courant), à la pression dynamique $\rho v^2/2$ et à un certain coefficient C_x appelé *coefficient de traînée* du corps de forme donnée. Le coefficient de traînée n'est pas, en général, constant et dépend du *nombre de Reynolds* $\mathrm{Re} = vl\rho/\mu$, où l est la dimension caractéristique du corps, v la vitesse du courant, ρ la densité du fluide et μ le coefficient de viscosité du fluide. La signification physique de cette dépendance sera éclairée au paragraphe suivant.

Sur la figure 309 on a représenté pour une sphère la courbe de dépendance du coefficient de traînée du nombre Re. Comme le

nombre de Reynolds est proportionnel à la vitesse du courant, pour des petites valeurs de ce nombre, par exemple, pour Re $\approx$ 100, la traînée est aussi proportionnelle à la vitesse du courant. Ensuite, on passe à un domaine de transition après lequel le coefficient de traînée reste à peu près constant; cela signifie que dans ce secteur la traînée est proportionnelle au carré de la vitesse du courant. Au voisinage de la valeur de Re $\approx 1{,}5 \cdot 10^5$, le coefficient C_x change brusqement de valeur, puis ne varie presque plus. On a montré à la figure 310 la grandeur de la traînée F_A pour une sphère en fonction de la vitesse du courant. La région *a* est la région de dépendance linéaire;

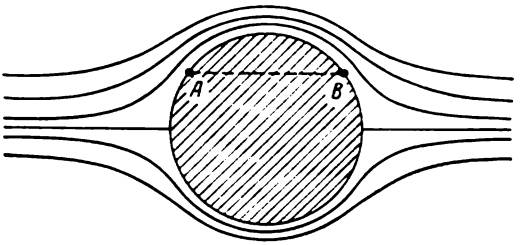


Fig. 311

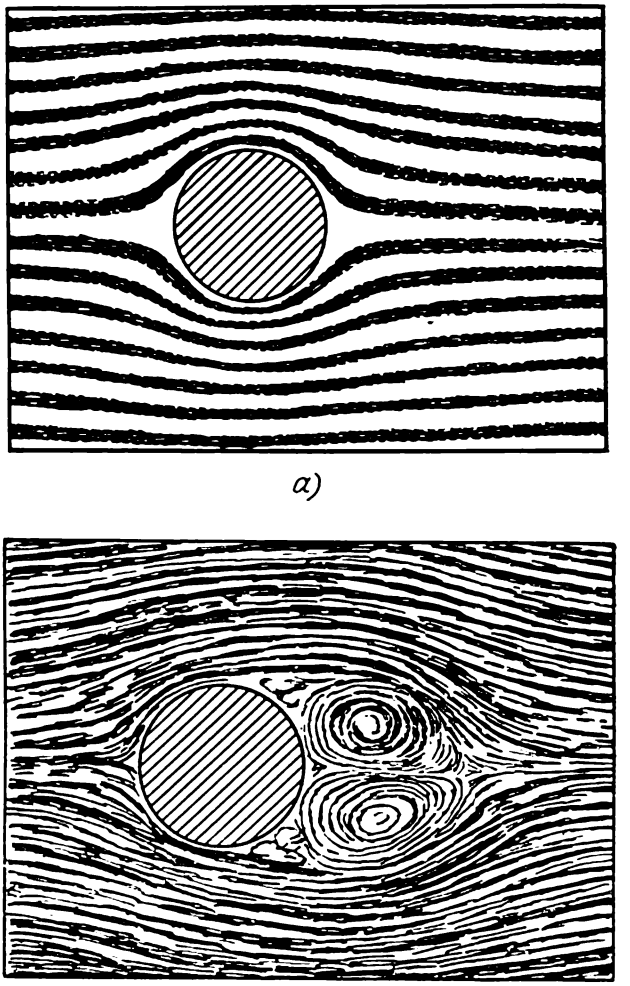
la région *b* est la première région de dépendance du carré de la vitesse, il lui correspond le coefficient de traînée $C_x \approx 0{,}4$; *c* est la seconde région de dépendance quadratique, il lui correspond la valeur de $C_x \approx 0{,}1 - 0{,}2$.

Avant de passer à l'étude de l'écoulement et de dégager les raisons de la variation de la traînée en fonction de la vitesse, faisons quelques remarques se rapportant à la traînée engendrée dans un fluide parfait (fluide dénué de viscosité). Dans ce cas l'écoulement s'effectuera de façon douce autour du corps lisse, tel, par exemple, une sphère, les filets fluides occupant des positions symétriques par rapport à cette sphère.

Les forces de viscosité sont absentes et la surface de la sphère n'est sollicitée que par des pressions statiques. Mais par suite de la symétrie du courant, devant et derrière la sphère la section du filet fluide au point *A* est égale à la section du filet au point *B*, situé du côté opposé de la sphère par rapport au courant (fig. 311). La vitesse en ces points est la même, comme l'est également la pression. Par conséquent, la résultante s'exerçant sur la sphère baignée par le courant d'un fluide parfait est nulle. L'analyse théorique de l'écoulement doux et *sans décollement* d'un fluide parfait sur un *corps solide quelconque* montre que dans ce cas la résistance au mouvement (ou traînée) est nulle (paradoxe de d'Alembert).

Toutefois, c'est seulement pour une vitesse très petite du courant qu'on peut observer un écoulement sans décollement du fluide autour

d'un corps. Un écoulement sans décollement peut s'observer très bien dans la rigole de l'appareil représenté à la figure 283. En posant



a)

b)

Fig. 312

un petit cylindre sur le fond de la rigole, on peut observer la divergence des filets liquides devant le cylindre et leur convergence derrière lui.

Sur la figure 312, *a* on a montré l'arrangement des filets fluides autour du cylindre dans un écoulement doux. Avec l'augmen-

tation de la vitesse de l'écoulement, la situation change radicalement. Les filets ne convergent plus derrière le cylindre et s'en décollent en formant derrière le corps un espace aux trajectoires tourbillonnaires; l'écoulement s'effectue avec décollement des filets du corps. Sur la figure 312, *b* sont représentés les filets pour le cas d'un écoulement autour du cylindre avec décollement. Dans l'espace derrière le cylindre il y a une région tourbillonnaire, où il n'est déjà plus possible d'observer des filets fluides, aussi, se distingue-t-elle d'une manière radicale de la région à écoulement régulier, où s'observent des filets nets. Il n'y a plus dans ce cas de symétrie de pression s'exerçant sur le corps de la part du courant devant comme derrière. Devant on est en présence d'une situation à peu près identique à celle de l'écoulement doux, la pression dans la zone critique et en son voisinage étant supérieure à la pression statique de la grandeur de l'ordre de $\rho v^2/2$ qui correspond à la grandeur de la charge dynamique. Mais derrière le cylindre les filets, une fois décollés du corps, deviennent plus rectilignes, et dans la région tourbillonnaire en aval la pression est toujours plus faible qu'en amont, étant égale environ à la pression statique de l'écoulement non turbulent. La résultante de la pression comporte donc lors du décollement du courant une composante dirigée vers l'arrière et ainsi s'explique l'apparition de la résistance frontale au cas du décollement même au sein d'un fluide « parfait ».

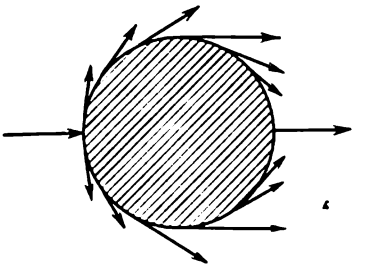


Fig. 313

Dans le cas général de l'écoulement sur un corps quelconque, le décollement du courant provoque une telle redistribution de pression à la surface du corps que la résultante devient non nulle, le courant fluide non visqueux agissant sur le corps avec une certaine force.

Au sein d'un fluide visqueux en mouvement la surface du corps est sollicitée par une force tangentielle entraînant le corps suivant le courant. Même si l'écoulement visqueux est sans décollement, comme on l'a constaté dans des expériences (voir fig. 312, *a*), en dépit de la symétrie du courant, on observe tout de même une résistance frontale composée principalement de forces tangentielles de viscosité dont la répartition schématique est donnée à la figure 313. Mais la situation change radicalement quand le courant du fluide visqueux décolle. Dans ce cas, en plus des forces tangentielles dues à la viscosité, un rôle essentiel est joué par la répartition des pressions, provoquée par le décollement du courant et qui engendre une résultante de pression s'exerçant suivant le courant. Pour une grande

vitesse (plus précisément, pour une grande valeur du nombre de Reynolds Re), le rôle dominant revient aux forces dues à la répartition de pression près de la surface du corps.

De plus, avec le décollement du courant du corps on observe dans la zone tourbillonnaire de l'écoulement la formation de tourbillons isolés qui de façon soit régulière soit désordonnée s'éloignent de la limite de décollement du courant du corps et viennent occuper une région en aval de ce dernier. Il va de soi que la formation des tourbillons et leur éloignement du corps engendrent des oscillations du courant et, partant, des oscillations de pression près de la surface du corps, dont la nature est régulière ou désordonnée suivant la périodicité de la formation des tourbillons. Ces oscillations sont difficiles à mesurer et ne se prêtent qu'à un calcul théorique fort laborieux, mais une chose est claire : si l'on prend la moyenne des oscillations de la pression dans le temps, elle fournira la résistance frontale additionnelle, appelée quelquefois *résistance due aux remous*.

Les raisonnements ayant conduit à cette conclusion sont les suivants. Soit un corps se mouvant de façon uniforme dans un milieu immobile et qui laisse derrière soi des remous ou, comme il se dit, un *sillage tourbillonnaire*. Après le passage du corps, le fluide acquiert un certain mouvement de rotation d'énergie déterminée. Quelle est l'origine de cette énergie? Elle ne peut être due qu'à une force appliquée au corps et nécessaire, dans le cas considéré, pour qu'un mouvement uniforme lui soit imprimé. D'après le principe de conservation de l'énergie, l'énergie cinétique du mouvement rotationnel doit être égale au sein du sillage au travail de la résistance frontale.

On peut donc ainsi distinguer trois causes de l'apparition de la résistance frontale du corps au sein d'un fluide visqueux : a) les forces tangentielles de viscosité, b) la répartition de pression due au décollement du courant, c) les oscillations de pression provoquées par la formation de tourbillons en aval du corps.

On fournit plus bas dans le tableau les valeurs moyennes des coefficients de résistance frontale (de traînée) pour des corps de formes différentes.

Sur ce tableau on peut voir le rôle essentiel de la forme de la partie aval du corps. Pour une même section transversale, la plus petite résistance est opposée par des corps en « forme de goutte », à nez obtus et un doux effilage à l'arrière. Un tel effilage régulier de la partie arrière, où convergent les filets du courant s'écoulant autour du corps, garantit une faible zone de décrochage du courant et prévient le décollement. La majeure partie du corps est plongée dans un écoulement doux, à peu près semblable à celui du fluide parfait ; le courant se referme à l'aval, dans la région où la pression est plus élevée et, partant, la force de résistance diminue.

Forme du corps et direction du courant		C_x	Re
	Disque	1,11	0—5·10⁶
	Coupe semi-sphérique	1,35—1,40	
		0,30—0,40	
	Sphère	0,4	$2\cdot10^3$—$2,5\cdot10^5$
		0,1—0,2	$3\cdot10^5$—$7\cdot10^6$
	Corps en forme de goutte de révolution	0,045	$1,5\cdot10^5$—$6\cdot10^6$
		0,1	

Par contre, si le corps en forme de goutte est tourné sa pointe vers le courant, la résistance grandit, car presque toute sa partie arrière se trouve dans la zone de décrochage du courant, ce dernier ne se referme pas augmentant ainsi la résistance. Aussi les jambes et les haubans des avions comme toutes les parties exposées au courant possèdent-ils, en général, des formes aérodynamiques. La forme de leur section droite rappelle une goutte ; à l'arrière de ces jambes et haubans il ne se produit pas de décrochage du courant, ou il ne porte que sur une partie très réduite de leur surface.

§ 113. LOI DE SIMILITUDE MÉCANIQUE DANS L'ÉCOULEMENT DES CORPS

Comme on voit, il découle des paragraphes précedents que la nature des phénomènes accompagnant l'écoulement sur des corps plongés dans un fluide visqueux est très complexe et il est encore impossible, dans la majorité des cas, de déterminer théoriquement la force de résistance. Il faut donc recourir à l'expérience pour déterminer les forces agissant sur le corps au sein du courant.

Certes, dans nombre de cas fort intéressants (aviation, marine, etc.) une telle détermination des forces s'exerçant sur des corps volumineux (en nature) constitue un problème ardu dont la solution est non seulement compliquée et onéreuse, mais quelquefois tout simplement impossible. Aussi se pose-t-on les questions suivantes : peut-on, en observant les similitudes géométriques, mesurer les résistances sur un modèle réduit et, ensuite, déterminer les forces du courant s'exerçant sur le corps vraie grandeur? Est-il possible et à quelles conditions, sur la base des essais sur une maquette, de reconnaître les forces sollicitant un corps de grandes dimensions géométriquement semblable? Est-il possible sur la base des essais dans l'eau, ou un autre liquide, ou un gaz, de déduire les forces qui agiront sur un corps géométriquement semblable dans l'air? La réponse générale à ces questions est la suivante : pour ce faire, il est nécessaire, en plus de la *similitude géométrique* de la maquette et du modèle grandeur, d'imposer une *similitude mécanique* [1].

En effet, si la forme du corps reste invariable, l'écoulement autour de lui variera suivant la vitesse du courant et les propriétés du liquide ; il faut que dans le cas des courants mécaniquement semblables que soient semblables non seulement les formes des filets fluides, mais que soient aussi égaux les rapports des forces de nature physique différente dans chaque secteur du courant, aussi bien pour le modèle réduit que pour le modèle grandeur.

Dans un courant de fluide visqueux chaque particule est sollicitée par deux forces : la force de pression et la force de viscosité (s'il est possible de négliger le poids de la particule) dont la somme est égale à la « masse par l'accélération ». Si, pour abréger, on appelle la « masse × l'accélération » affectée du signe moins « force d'inertie » [2], on peut alors dire que chaque particule du fluide est toujours soumise à trois forces en équilibre : la « force d'inertie », la force de pression et la force de viscosité. La somme de ces trois forces est nulle, donc deux d'entre elles sont indépendantes. On peut donc choisir en qualité de critère de similitude mécanique le rapport de deux quelconques d'entre elles ; habituellement, on se réfère au rapport entre les « forces d'inertie » et les forces de viscosité. Ce rapport est justement la condition de similitude, il est *proportionnel* au nombre de Reynolds qui est une grandeur sans dimension.

Ainsi donc si les nombres de Reynolds sont identiques pour des courants s'écoulant autour de la maquette et du modèle grandeur, alors dans ces courants le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité est aussi le même et, par suite, les courants fluides entourant la maquette et le modèle grandeur sont semblables non

[1] On dit quelquefois « similitude dynamique ».

[2] Cette définition de la « force d'inertie » diffère de celle adoptée partout ailleurs dans cet ouvrage.

seulement du point de vue géométrique, mais également du point de vue *mécanique*.

Pour déterminer le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité, il faut écrire l'équation du mouvement pour la particule fluide en tenant compte des frottements (de viscosité), au moins pour le cas le plus simple. Ecrivons cette équation pour un courant d'un fluide visqueux de direction constante longeant une paroi plane (fig. 314).

Soit v la vitesse du courant qui dépend du temps t et de la coordonnée y (distance de la paroi) et qui est dirigée suivant l'axe x. Prenons un élément fluide de volume $a\,dx\,dy$, où a est la dimension de l'élément suivant la perpendiculaire

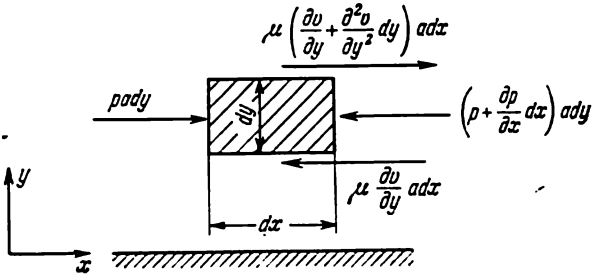


Fig. 314

au dessin. A gauche, sur la particule isolée agit la pression $pa\,dy$, en bas et en haut, la viscosité $\mu\,\frac{\partial v}{\partial y}\,a\,dx$ et $\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,dy\right)a\,dx$, à droite, la pression $\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\right)a\,dy$. La somme de toutes ces forces doit être égale à la masse multipliée par l'accélération, ou à

$$\rho\,\frac{dv}{dt}\,a\,dx\,dy.$$

Donc l'équation de la dynamique sera

$$\rho\,\frac{dv}{dt}\,a\,dx\,dy=-\frac{\partial p}{\partial x}\,a\,dx\,dy+\mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial y}\,a\,dx\,dy. \tag{113.1}$$

Pour un courant en régime permanent d'après (101.3)

$$\frac{dv}{dt}=v\,\frac{\partial v}{\partial x},$$

et, par suite, (113.1) peut être récrite ainsi:

$$\left(\rho v\,\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}-\mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)a\,dx\,dy=0. \tag{113.2}$$

C'est bien l'égalité fondamentale des forces s'exerçant sur la particule du fluide visqueux; sur sa base on trouve la condition

$$\frac{\rho_{\text{mod}}v_{\text{mod}}\,\dfrac{\partial v_{\text{mod}}}{\partial x_{\text{mod}}}}{\mu_{\text{mod}}\,\dfrac{\partial^2 v_{\text{mod}}}{\partial y^2_{\text{mod}}}}=\frac{\rho_{\text{maq}}\,v_{\text{maq}}\,\dfrac{\partial v_{\text{maq}}}{\partial x_{\text{maq}}}}{\mu_{\text{maq}}\,\dfrac{\partial^2 v_{\text{maq}}}{\partial y^2_{\text{maq}}}}, \tag{113.3}$$

où l'indice « mod » marque que la grandeur donnée se rapporte au courant du modèle grandeur et l'indice « maq » au courant de la maquette. L'expression (113.3) peut se transformer ainsi :

$$\frac{\rho_{\text{mod}} v_{\text{mod}} \, \partial y_{\text{mod}}}{\mu_{\text{mod}}} = \frac{\rho_{\text{maq}} v_{\text{maq}} \, \partial y_{\text{maq}}}{\mu_{\text{maq}}} \, \frac{\partial^2 v_{\text{mod}}}{\partial^2 v_{\text{maq}}} \, \frac{\partial v_{\text{maq}}}{\partial v_{\text{mod}}} \, \frac{\partial x_{\text{mod}}}{\partial x_{\text{maq}}} \, \frac{\partial y_{\text{maq}}}{\partial y_{\text{mod}}}. \quad (113.4)$$

Supposons que la maquette possède une dimension caractéristique quelconque de longueur l_{maq}, tandis que la même dimension du modèle grandeur a pour longueur l_{mod}. Alors on a évidemment pour des courants semblables

$$\frac{\partial x_{\text{mod}}}{\partial x_{\text{maq}}} = \frac{l_{\text{mod}}}{l_{\text{maq}}}, \quad \frac{\partial y_{\text{mod}}}{\partial y_{\text{maq}}} = \frac{l_{\text{mod}}}{l_{\text{maq}}},$$

$$\frac{\partial v_{\text{mod}}}{\partial v_{\text{maq}}} = \frac{v_{\text{mod}}}{v_{\text{maq}}}, \quad \frac{\partial^2 v_{\text{mod}}}{\partial^2 v_{\text{maq}}} = \frac{v_{\text{mod}}}{v_{\text{maq}}}. \quad (113.5)$$

En tenant compte de ces conditions, on peut écrire la condition fondamentale de la similitude mécanique (113.4) ainsi :

$$\frac{\rho_{\text{mod}} v_{\text{mod}} l_{\text{mod}}}{\mu_{\text{mod}}} = \frac{\rho_{\text{maq}} v_{\text{maq}} l_{\text{maq}}}{\mu_{\text{maq}}}. \quad (113.6)$$

Comme $\frac{\rho v l}{\mu}$ = Re, on peut affirmer que plus le nombre de Reynolds est grand, plus petite est l'intensité relative des forces de viscosité et plus le courant du fluide visqueux se rapproche du courant du fluide « idéal » dénué de viscosité. Une valeur très faible de ce nombre témoigne de la prédominance des forces de viscosité dans le courant considéré.

On ne peut comparer le nombre de Reynolds qu'en cas de similitude géométrique des corps et des courants ; ce n'est que dans ce cas que l'augmentation du nombre de Reynolds, disons de cinq fois, correspond au quintuple accroissement du rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité.

Dans la comparaison des courants s'écoulant autour des corps de formes différentes, mais semblables, par exemple, des tubes de section variée, des ailes d'avions différents, etc. le nombre de Reynolds fournit des indications approchées sur la variation du rapport entre les forces d'inertie et de viscosité. La nature de l'écoulement au voisinage du corps, par exemple, le décollement du courant est lié non seulement à la forme du corps, mais également au rapport entre les forces d'inertie et de viscosité. Pour établir l'influence de ce rapport sur l'écoulement, examinons au paragraphe suivant, en plus de détail, la couche limite et ses relations avec la formation de tourbillons et le décrochage du courant.

Notons que l'apparition dans une conduite d'un mouvement turbulent à la place d'un mouvement par filets (laminaire), dont on a parlé au paragraphe précédent, est également traduite dans le rapport entre les forces d'« inertie » et de viscosité. Dans des conduites circulaires jusqu'à une vitesse correspondant à peu près

à Re $\approx$ 1000, on observe un écoulement laminaire, tandis que pour une vitesse plus grande (quand Re $>$ 1000), l'écoulement est en général turbulent.

§ 114. COUCHE LIMITE

Comme il a été indiqué précédemment, dans l'écoulement d'un liquide ou d'un gaz de faible viscosité autour d'un corps, la force de viscosité ne se manifeste de façon sensible que près du corps, dans une mince *couche limite*, où la vitesse croît de zéro à partir de la surface du corps. La couche limite ne dépend pas que des propriétés du fluide, mais également de la forme du corps. Par exemple, sur une plaque plane placée suivant le courant (fig. 315), la couche limite s'élargit vers l'aval; étant freinée, par suite de la viscosité

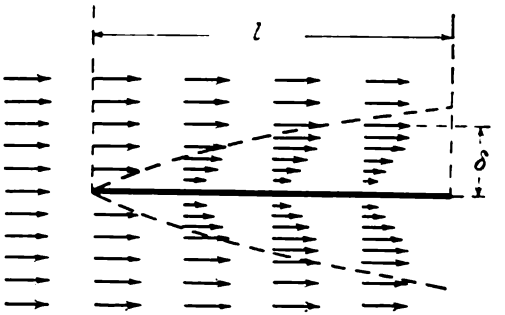


Fig. 315

du fluide, cette couche prend de l'épaisseur à l'extrémité arrière de la plaque. On a visualisé sur la figure 315 de façon schématique le champ des vitesses au voisinage de la plaque. Pour plus de clarté, la couche limite a été agrandie et les flèches, indiquant la vitesse des particules, représentées de façon plus serrée.

Comme le montrent les calculs théoriques, on peut évaluer de façon approximative l'épaisseur de la couche limite δ sur la base de formule

$$\frac{\delta}{l} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}. \qquad (114.1)$$

Le rapport de l'épaisseur de la couche à la longueur caractéristique l du corps (épaisseur relative de la couche limite) est en raison inverse de la racine carrée du nombre de Reynolds. On ne donnera pas la déduction de cette formule, tout en croyant utile de pouvoir tenir en réserve ce rapport simple. Par exemple, pour une sphère de 10 cm de diamètre plongée dans un courant d'air à la vitesse de 30 m/s, le nombre $\mathrm{Re} = \frac{10 \cdot 30 \cdot 10^2}{0{,}15} = 2 \cdot 10^5$ (pour l'air $\mu/\rho \approx 0{,}15$ cm²/s

à 20 °C). Donc l'épaisseur de la couche limite sur la sphère est de l'ordre

$$\delta \approx \frac{10}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{10^4}} \approx 0{,}022 \text{ mm},$$

qui chutera avec l'accroissement de la vitesse du courant.

Pour de très petites valeurs du nombre de Reynolds (de l'ordre de 1), l'épaisseur de la couche limite coïncide à peu près avec les dimensions du corps (voir (114.1)). Quoique dans le cas considéré cette formule ne soit pas tout à fait adéquate, la conclusion tirée n'est néanmoins pas contredite par la réalité : à ces faibles valeurs du nombre de Reynolds il n'est plus possible de dégager la couche limite, car elle occupe presque tout le courant, ou une grande partie de ce courant autour du corps. On a déjà rencontré un tel écoulement en examinant la variante de l'écoulement visqueux laminaire dans une conduite (voir § 111) ou le mouvement d'une petite bille s'enfonçant dans de la glycérine (voir § 40). Ainsi, par exemple, pour une bille en acier de 2 mm de diamètre la vitesse de chute au sein de la glycérine est d'environ 2 cm/s. En effet, d'après (40.3)

$$v = \frac{2}{9}\frac{\rho_b - \rho_g}{\mu} g r_0^2 = \frac{2}{9}\frac{8-1}{8{,}5}\cdot 10^3 \cdot 0{,}1^2 \approx 2 \text{ cm/s}.$$

Et par suite le nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = \frac{2\cdot 0{,}2}{6{,}8} \approx 0{,}06$, car pour la glycérine $\frac{\mu}{\rho} \leqslant 6{,}8$ cm²/s. L'épaisseur de la couche limite est ici de beaucoup plus grande que les dimensions de la bille.

Pour une valeur du nombre de Reynolds supérieure à 10^4, l'épaisseur de la couche limite sera inférieure à 0,01 de la dimension du corps. Donc, pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds ($\mathrm{Re} \geqslant 10^4$), on peut parler d'une couche limite, réellement mince entourant le corps. Il ne s'agira dans la suite que d'une telle couche.

On peut se représenter grossièrement un courant de fluide peu visqueux s'écoulant autour d'un cylindre de la façon suivante : près de la surface du cylindre se forme une couche de fluide freiné (couche limite), tandis qu'autour de cette dernière on a un écoulement différant très peu de celui d'un liquide parfait. A première vue il semble que l'existence de la couche limite ne se traduit que par de faibles forces tangentielles et n'entraîne qu'une petite variation des dimensions effectives du cylindre. En réalité, pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds le courant se modifie de façon importante, du fait du décollement et de l'apparition des agitations.

Etudions l'influence de la couche limite sur l'écoulement. Sur la face amont du cylindre, où la vitesse du courant en dehors de la couche s'accroît dans la direction de l'écoulement et la pression chute, la couche limite n'introduit aucune variation particulière et la pression y est presque la même comme au sein du courant au

voisinage de la couche. Dans la partie amont du corps, la pression chute vers l'aval et, partant, rétrécit la couche limite et diminue le freinage des particules dû aux forces de viscosité ; la chute de pression suivant le courant « exprime », pour ainsi dire, les particules de la couche.

La situation est toute différente à l'aval du cylindre (de la sphère, ou tout autre corps), où les filets fluides s'étendent sur tout le courant et la vitesse diminue, tandis que la pression *s'accroît* suivant le courant. La pression freine ici davantage le mouvement des particules dans la couche limite et, avec l'accroissement de la vitesse

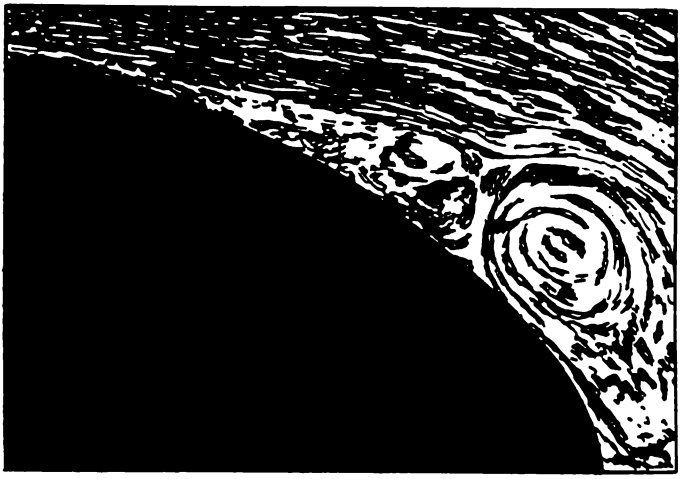


Fig. 316

d'écoulement et l'accentuation de la chute de pression, il peut advenir que près du corps les particules fluides s'arrêtent complètement et même ébauchent un mouvement en *retour*, à l'encontre du courant (fig. 316). Les particules allant à l'encontre du courant, tangentiellement au corps, et les particules du courant qui arrive sur le corps se heurtent en un certain point (point de décollement) et sont entraînées en tourbillons dans le sens contraire par le courant amont ; les particules sont ainsi prises dans un mouvement de rotation qu'accentue de plus en plus le courant brassant des quantités de plus en plus grandes du fluide et, en fin de compte, sont emportées par le courant, délaissant le corps et continuant de tourner par inertie. A l'arrière du corps se forme une région *d'agitation tourbillonnaire*, le courant se remplissant de tourbillons. Au-dessus d'une certaine valeur du nombre de Reynolds (pour la sphère cette valeur est de

$\approx 3 \cdot 10^5$), la couche limite devient elle-même turbulente, la zone de décollement diminuant comme d'ailleurs celle du coefficient de résistance frontale (voir fig. 309).

§ 115. MESURE DES FORCES S'EXERÇANT SUR LE CORPS DANS L'ÉCOULEMENT

L'action du courant est fonction du mouvement du corps par rapport aux particules fluides. Il paraît évident que les forces sollicitées restent les mêmes, indépendamment du fait que ce soit le corps plongé dans le milieu au repos qui se déplace, ou que c'est le milieu qui soit en mouvement à la même vitesse par rapport au corps fixe.

Dans les projets d'avions ou de vaisseaux aériens, de surface et sous-marins il est indispensable de connaître l'intensité des forces d'action du milieu, que ce soit l'air ou l'eau, s'exerçant sur ces vaisseaux. C'est pourquoi, au préalable, on détermine sur des maquettes les forces auxquelles elles sont soumises pendant

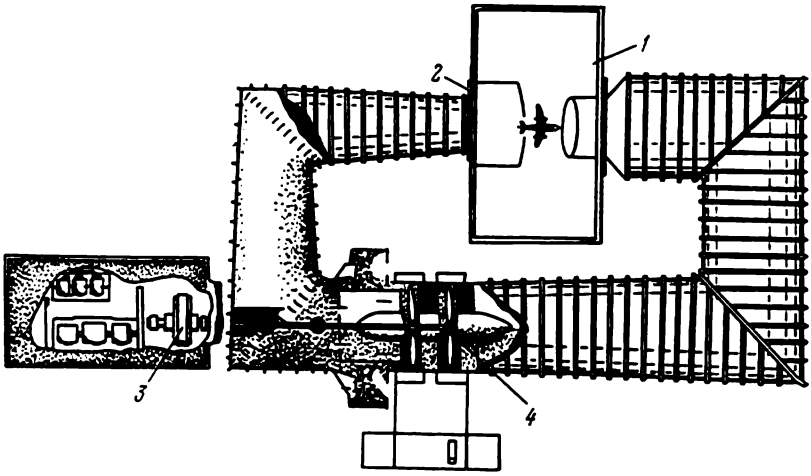


Fig. 317

le mouvement dans le milieu. Dans ce but on déplace la maquette avec une certaine vitesse, par exemple, en entraînant des maquettes de vaisseaux sur l'eau contenue dans un bassin spécial, et on mesure les forces engendrées ainsi, ou bien on mesure les forces sollicitant la maquette plongée dans un certain courant d'air, comme on le fait pour des maquettes d'avions ou d'autres corps au cours des essais aérodynamiques en souffleries (voir fig. 317).

Etant donné qu'en pratique la maquette essayée est toujours plongée dans un courant limité, une soufflerie, un canal, etc., il existe une différence de principe entre des essais, où le corps se déplace dans un milieu au repos illimité et des essais avec un corps immobile dans un milieu mobile. Dans une conduite (un canal) l'écoulement sera influencé d'une certaine façon par les parois (les limites du courant), aussi pour pallier à l'influence de ces perturbations faut-il choisir pour les maquettes des dimensions linéaires suffisamment petites devant celles du courant (diamètre de la conduite, largeur et profondeur du canal, etc.).

On a représenté sur la figure 317 une vue schématique d'une soufflerie en circuit fermé avec un secteur d'essais ouvert. Le ventilateur *4*, mis en rotation par le moteur *3*, crée un courant d'air permanent le long d'un tube semi-fermé. Sur un certain secteur *1* le tube est ouvert et dans le courant régulier qui y est maintenu plonge la maquette *2* portée par une balance. L'air sort de la buse du tube, s'écoule autour de la maquette et retourne dans le tube. La balance, appelée balance aérodynamique, est destinée à mesurer les efforts sur la maquette. Les dimensions du courant, du tube (soufflerie) et de la maquette sont choisies de façon à pouvoir négliger l'influence des autres objets entourant le courant, ou, au contraire, de pouvoir en tenir compte. En fixant de différentes maquettes sur la balance, on peut mesurer les forces et les moments s'exerçant sur la maquette.

Il n'est pas toujours commode de mesurer les forces avec une balance, aussi peut-on recourir à la loi de variation de la quantité de mouvement (voir § 109).

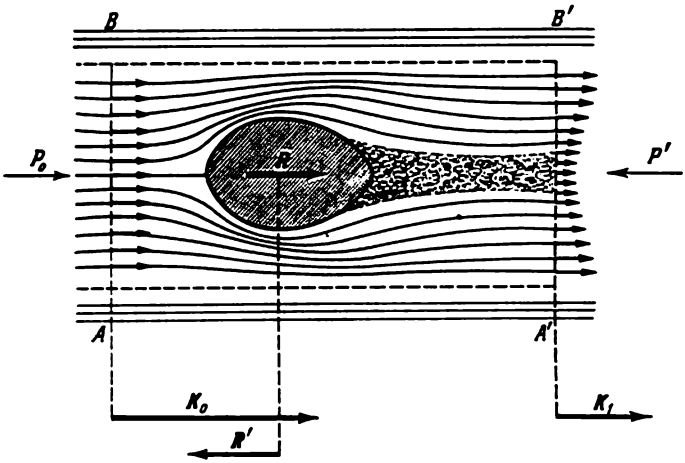


Fig. 318

La force agissant sur le corps peut se déterminer en mesurant autour de lui le champ des vitesses et des pressions.

Si on plonge dans un courant d'air uniforme un petit corps à symétrie des axes (fig. 318) et on mesure à une certaine distance en amont et en aval du corps le *champ* des vitesses et des pressions, il est possible de déterminer en se basant sur ces mesures la force de résistance frontale (la traînée). En effet, évaluons la quantité de mouvement du fluide K_0 passant par seconde à travers le plan AB perpendiculaire au courant, la quantité de mouvement K_1 du fluide traversant par seconde le plan $A'B'$, qui lui est parallèle, et la pression constatée sur les plans AB et $A'B'$. Soient respectivement P_0 et P' ces pressions; dans ce cas la résistance frontale R', s'exerçant de la part du corps sur le fluide, se détermine à partir de l'égalité

$$K_1 - K_0 = P_0 + P' + R', \quad \text{ou} \quad R' = K_1 - K_0 - (P_0 + P').$$

On admet de même que les dimensions des éléments de surface dans les plans AB et $A'B'$ sont suffisamment grandes et qu'on peut négliger la quantité de mouvement des particules traversant les surfaces cylindriques latérales (leur trace est indiquée en pointillé sur la figure 318).

Très souvent, les pressions en amont et en aval sont presque égales, $P' + P_0 \approx 0$, on peut alors les négliger. Dans ce cas la résistance frontale du corps

$R = -R'$ est égale à la différence entre la quantité de mouvement par seconde du fluide s'écoulant en amont du corps et la quantité de mouvement du fluide coulant en aval du corps,

$$R = K_0 - K_1.$$

Dans le cas général, quand le corps est sollicité non seulement par la résistance frontale (traînée), agissant suivant le courant, mais également par la force normale au courant, il est possible d'évaluer la force s'exerçant sur le corps de la part du courant, sur la base des variations de la quantité de mouvement du fluide traversant par seconde la surface fermée sur le corps, au cas où la pression et la vitesse sur cette surface sont mesurées.

§ 116. PORTANCE DE L'AVION

Un exemple particulièrement important du point de vue pratique de l'action du courant est la portance de l'aile de l'avion, ou la portance d'une plaque inclinée sous un certain angle par rapport à l'écoulement. L'aile de l'avion est constituée habituellement d'une plaque de profil déterminé, arrondie à l'avant (bord d'attaque) et effilée à l'arrière (bord de fuite) (fig. 319). Si le profil est incliné sous un certain angle α (dit *angle d'attaque* ou *incidence*) la réaction

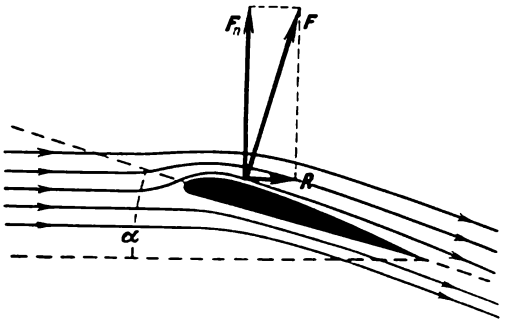


Fig. 319

du fluide au profil peut se décomposer en deux forces ; l'une normale à l'écoulement, la force F'_p et la résistance frontale, ou traînée R. Pour des petites incidences α, la force F_p est de beaucoup supérieure à R. Habituellement l'avion se déplace avec une incidence pour laquelle la portance F_p (force positive) dépasse de beaucoup la force R (force négative ou de traînée).

L'explication élémentaire, proposée encore par Newton, de l'origine de la portance est fort simple. Les particules de l'air, avant le passage de l'aile de l'avion, étaient au repos ; quand l'aile s'en approche, la pression sur les particules sous l'aile augmente et les particules d'air reçoivent une impulsion vers le bas et vers l'avant. Si l'on calculait la variation totale de la quantité de mouvement

des particules par seconde, dirigée vers le bas, et le gradient de pression sur la surface entourant l'aile, on déterminerait la portance.

Ainsi donc, l'aile communique aux particules d'air qu'elle rencontre sur sa voie une certaine quantité de mouvement dirigée vers le bas; les particules étant repoussées par l'aile vers le bas, agissent, par conséquent, sur elle en direction du haut. L'avion est maintenu en sustentation pour la raison que l'aile « frappe» constamment sur les particules d'air en les repoussant vers le bas. La pression sur la partie inférieure (l'intrados) étant plus grande que sur la partie supérieure (extrados), une force apparaît, dite de portance, qui équilibre le poids de l'avion.

L'image de l'écoulement sur l'aile montre que la vitesse des particules à l'extrados est supérieure à celle de l'intrados, car les filets fluides en haut sont plus fins qu'en bas. Or d'après le théorème de Bernoulli, la pression est plus grande aux endroits où la vitesse est plus petite, donc la pression sur l'extrados est inférieure à celle de l'intrados et, c'est la raison de la portance. Le gradient de pression entre l'extrados et l'intrados se détermine facilement par l'expérience.

Une première tentative de calculer théoriquement la portance fut réalisée par Newton lui-même. Il proposa la méthode suivante d'évaluation de la portance; sur une plaque rectangulaire d'aire S inclinée sous l'angle α par rapport au courant tombe par seconde une masse de particules égale à

$$\rho S v_0 \sin \alpha,$$

où, comme habituellement ρ est la densité de l'air et v_0 la vitesse. Ces particules modifient leur vitesse et reçoivent une composante de vitesse $v_0 \sin \alpha$ dirigée vers le bas. Donc l'air acquiert par seconde une quantité de mouvement vers le bas égale à

$$\rho S v_0^2 \sin^2 \alpha,$$

à laquelle doit être égale la portance. Le calcul étant évidemment grossier, il faut faire intervenir un coefficient k différant de l'unité et considérer la portance égale à

$$F_p = k\rho S v_0^2 \sin^2 \alpha, \qquad (116.1)$$

où k se détermine expérimentalement.

Or les premières expériences de mesure de la portance de l'aile (d'une plaque) pour de petites incidences montrèrent que la formule (116.1) était inexacte: la portance est, en effet, proportionnelle à v_0^2, mais elle est en fait proportionnelle à $\sin \alpha$ (ou à α pour de petits angles) et non pas à $\sin^2 \alpha$. Donc la formule de Newton est fausse.

L'explication de Newton correspondrait à la réalité, si les particules d'air (ou de liquide) n'interagissaient pas entre elles. Sur la voie de l'aile se trouvent des particules qui ne se mettent à glisser

le long de sa surface qu'en la contactant. Avant la collision avec l'aile ou la plaque, la particule était au repos et « dans l'ignorance » de l'arrivée de l'aile. Or, en fait, il n'en est pas ainsi, par suite de l'interaction des particules; en raison de la pression existant dans le gaz le mouvement des particules près de l'aile se propage, pour ainsi dire, de proche en proche, et les particules devant l'aile sont déjà en mouvement quand l'aile s'en approche (voir fig. 321), les particules du fluide exécutant des mouvements déterminés. Aussi le calcul de la portance constitue-t-il un problème bien plus compliqué que ne le pensait Newton. Il faut avoir en vue que les mouvements les plus intenses effectuent justement les particules au voisinage desquelles se déplace l'aile et c'est également l'endroit où les variations de pression sont les plus grandes. Le mouvement des particules se trouvant au loin de l'aile est insignifiant, mais ces particules sont nombreuses et on ne peut négliger leur quantité de mouvement.

Toutefois, pour de très grandes vitesses de vol, de beaucoup supérieures à la vitesse du son dans le milieu (voir § 121), pour des vitesses dites *hypersoniques*, la nature de l'écoulement varie radicalement: seules les particules se trouvant près de l'aile entrent en interaction avec cette dernière et seules les particules occupant une certaine couche mince sont « au courant » du vol de l'aile. Et, par suite, pour de telles vitesses de vol, malgré la complexité des phénomènes liés à l'écoulement, la formule de Newton s'avère pratiquement applicable pour le calcul de la portance, ce que confirme nombre d'expériences.

§ 117. ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE SUR L'AILE. CIRCULATION ET PORTANCE

Pour mettre au clair le mécanisme de l'écoulement d'un fluide visqueux sur l'aile, voyons ce que donne la théorie de l'écoulement d'une plaque (ou d'une aile) infinie par un fluide parfait.

L'aile (ou la plaque) est considérée comme infinie dans le sens perpendiculaire au plan du dessin (sens de l'envergure); dans un tel écoulement tous les filets fluides se trouvent dans des plans mutuellement parallèles, et, en particulier, parallèles au plan du dessin, la forme des filets étant la même dans tous les plans. Un tel *écoulement* est dit *plan*; à une certaine précision près il correspond à l'écoulement autour d'une plaque s'appuyant aux parois d'une conduite parcourue par un liquide ou un gaz.

Dans ces calculs on ne tient pas compte de la viscosité, mais on admet que le mouvement des particules se propage dans tout l'espace environnant l'aile.

Deux cas peuvent se présenter: l'écoulement est uniforme ou bien graduellement varié. Dans un écoulement uniforme la pression et la vitesse en tous les points du courant sont uniformes, tandis

que dans un écoulement graduellement varié la pression au sein du fluide varie également de façon uniforme, mais la vitesse peut varier de manière graduelle d'une section à une autre.

Tout d'abord, dans un écoulement en régime uniforme d'un fluide parfait sur un corps, la résultante des forces, comme il a été dit au § 112, est nulle. Les filets fluides dans l'écoulement sur la plaque présenteront à peu près la forme montrée à la figure 320. Il y a deux points critiques b et b_1 sur les surfaces avant et arrière pour lesquels les vitesses du courant sont nulles. Une certaine symétrie de l'écoulement peut être notée par rapport au centre de la plaque ; sur toute ligne passant par O et se trouvant dans le plan du dessin à des distances égales du centre, la vitesse du courant est la même.

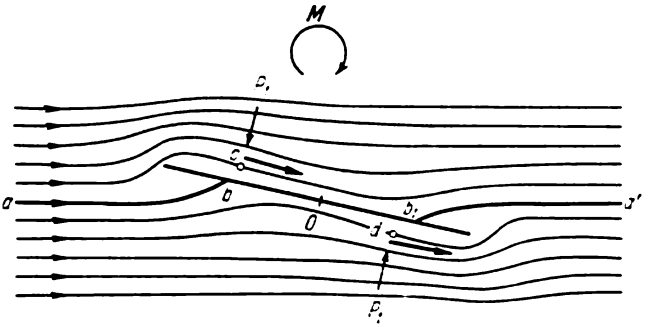


Fig. 320

Par exemple, les vitesses du courant aux points c et d sont identiques ; donc les pressions y sont également les mêmes. Par conséquent, la résultante des forces agissant sur la plaque est nulle. Seul s'exercera le moment des forces $\boldsymbol{M}$ qui tendra à faire tourner la plaque suivant les aiguilles d'une montre. On a un écoulement presque identique pour une aile de profil mince.

L'écoulement sur une aile d'un fluide réel est complètement différent de l'image donnée par la théorie pour un écoulement uniforme. En réalité, on a le phénomène qui se visualise à peu près par la figure 319. Le courant près du bord de fuite ne s'incurve pas et longe l'aile sur l'extrados et l'intrados pour converger derrière le bord de fuite, de sorte que la vitesse est tangente à l'aile. Sur le bord d'attaque, la situation est à peu près celle d'un fluide parfait : il y a un point critique et le courant en s'écoulant sur le bord d'attaque, généralement arrondi et non pas effilé comme le bord de fuite, l'atteint en adhérant à l'extrados.

Dans des conditions ordinaires, lors de la mise en mouvement de l'aile, on voit se former près du bord de fuite de l'aile un tourbillon (fig. 321). C'est la conséquence du fait qu'à de faibles vitesses l'écou-

lement sur l'aile s'effectue à peu près comme dans le cas d'un fluide parfait; sous l'action de la pression les particules fluides tendent à contourner par le bas le bord de fuite, mais, par suite de la viscosité, perdent leur énergie cinétique et s'arrêtent; le contre-courant, qui aurait dû s'arrêter, est freiné par la pression des particules du courant rebroussant chemin, et au lieu de s'arrêter continue le mouvement le long de la surface en formant un *tourbillon*. Ce tourbillon est détaché du bord de fuite et entraîné par le courant. Après

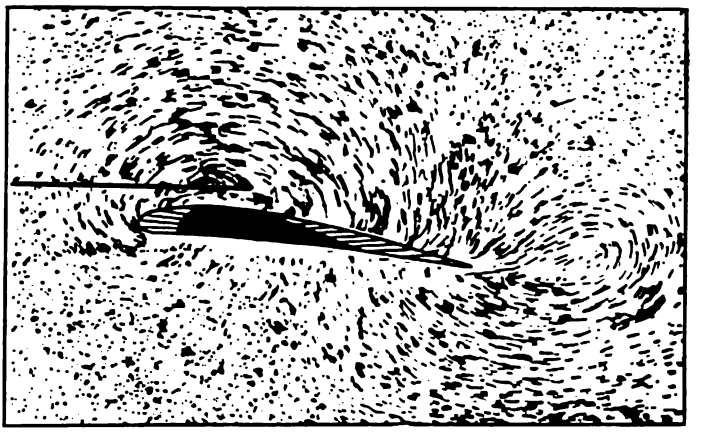


Fig. 321

quoi l'écoulement devient de régime permanent, montré à la figure 319. En se décollant de l'aile, le tourbillon emporte avec lui un certain moment cinétique.

Le fluide emporté par le tourbillon possède un moment cinétique déterminé; et, par suite, le fluide restant doit acquérir un moment cinétique de sens contraire, car avant le déclenchement du mouvement son moment cinétique était nul. Le fluide tournera donc autour de l'aile dans la direction opposée à la rotation du tourbillon et il se créera ainsi une *circulation* le long du contour du profil de l'aile. L'équation hydrodynamique donne une explication exhaustive de cette circulation le long du contour du profil.

Ainsi donc l'écoulement sur une aile (ou une plaque inclinée sous un certain angle) d'un fluide réel peut être représenté comme un écoulement uniforme d'un fluide parfait, visualisé sur la figure 320, auquel se superpose une circulation le long du contour de la plaque, montrée sur la figure 322, *a*.

La circulation est un mouvement des particules fluides sur des contours fermés, chaque particule subissant durant le mouvement des déformations sans toutefois pivoter; elle effectue, pour ainsi dire, un

mouvement de translation le long d'un contour fermé. Comme le montre la théorie, ce mouvement possède la propriété importante suivante : *la circulation de la vitesse le long de tout contour géométrique fermé entourant un corps est une grandeur constante.* On appelle circulation de la vitesse la grandeur scalaire

$$\Gamma = \oint v\, ds, \tag{117.1}$$

où v est la vitesse et ds un élément du contour. Cela signifie qu'il faut prendre un élément quelconque du contour ds (fig. 322, *b*) et le multiplier scalairement par la vitesse v, puis sommer (intégrer) les

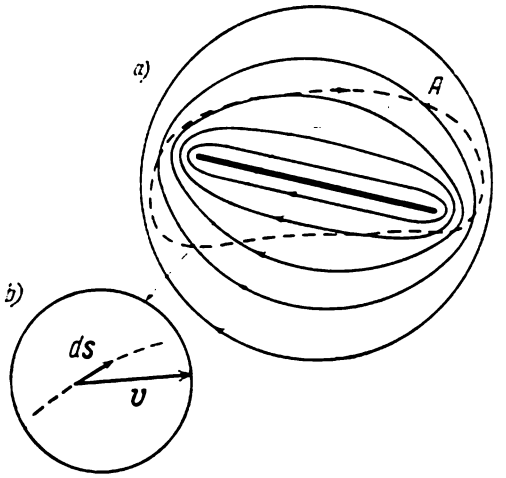


Fig. 322

résultats pour tous les éléments ds constituant le profil fermé considéré. La grandeur Γ est indépendante de la forme du profil A sur lequel on l'a calculée. Elle sera la même pour les différents profils de l'aile quoique les vitesses en tous les points de ces profils soient absolument différentes. Aussi la grandeur de la circulation Γ définit-elle de façon univoque la nature du courant de circulation autour du corps donné. Notons que la circulation le long d'un contour fermé n'enveloppant pas l'aile est nulle.

N. E. Joukovski montra que l'écoulement réel le long de l'aile peut être assimilé à un écoulement du fluide parfait composé de deux écoulements existant simultanément : a) l'écoulement uniforme d'un fluide parfait (dont les filets sont montrés sur la figure 320) et b) la circulation le long du profil de l'aile (dont les filets sont montrés sur la figure 322, *a*). La grandeur de la circulation dans ce cas étant telle que le *second point critique* b_1 (voir fig. 320) se trouve sur

le bord de fuite (fig. 323), b_1 passant au point c' et b en c. A cette condition on aura un *écoulement régulier du bord de fuite*, presque identique à celui qu'on observe en réalité. Ce choix de la grandeur de la circulation Γ autorise en fait de tenir compte de l'influence d'une forte viscosité engendrant la circulation comme l'écoulement régulier du bord de fuite.

Théoriquement sur la base de cette condition dite *condition de Joukovski*, on peut évaluer la circulation Γ_0; elle sera égale à [1]

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}\pi\lambda v\alpha, \tag{117.2}$$

où λ est la corde de l'aile, ou la droite qui joint les extrémités des bords d'attaque et de fuite de l'aile suivant le courant (fig. 323),

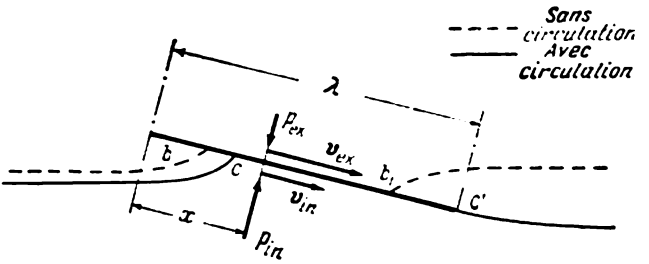


Fig. 323

α l'incidence. Si l'on connaît la circulation autour de l'aile, on peut trouver la grandeur de la portance agissant sur l'aile.

Supposons que l'aile a une incidence α et l'écoulement sur l'aile se fait avec la circulation Γ_0, la vitesse du courant à une distance suffisamment éloignée de l'aile étant v_0 et la pression p_0. Soit $v_{ex}(x)$ la vitesse sur l'extrados de l'aile (ou de la plaque) et $p_{ex}(x)$ la pression, où x est la distance du bord d'attaque; introduisons de façon analogue les notations pour l'intrados: $v_{in}(x)$ et $p_{in}(x)$ (voir fig. 323). Dans ce cas la force s'exerçant de la part du courant sur l'élément de largeur dx et de longueur l sera

$$(p_{in} - p_{ex})\, l\, dx,$$

quant à la force d'action du courant sur toute la plaque de longueur l, elle peut s'écrire sous la forme

$$P_c = \int_0^{\lambda} (p_{in} - p_{ex})\, l\, dx. \tag{117.3}$$

[1] On ne donne pas de déduction de cette formule vu sa complexité.

D'après le théorème de Bernoulli

$$p_{\text{in}} = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v_{\text{in}}^2}{2}, \qquad p_{\text{ex}} = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v_{\text{ex}}^2}{2}.$$

D'où

$$p_{\text{in}} - p_{\text{ex}} = \frac{1}{2}\rho\,(v_{\text{ex}}^2 - v_{\text{in}}^2) = \frac{1}{2}\rho\,(v_{\text{ex}} + v_{\text{in}})\,(v_{\text{ex}} - v_{\text{in}}). \quad (117.4)$$

Pour de petits angles α, les vitesses différeront peu de v_0; donc on peut considérer [1] que

$$v_{\text{ex}} + v_{\text{in}} \approx 2v_0. \quad (117.5)$$

Considérant (117.5) et portant (117.4) dans (117.3) il vient

$$P_c = \int_0^\lambda \frac{\rho}{2}\,2v_0\,(v_{\text{ex}} - v_{\text{in}})\,l\,dx = \rho v_0 l \int_0^\lambda (v_{\text{ex}} - v_{\text{in}})\,dx. \quad (117.6)$$

L'intégrale

$$\int_0^\lambda (v_{\text{ex}} - v_{\text{in}})\,dx = \Gamma_0$$

est par définition la grandeur de la circulation le long du contour de l'aile. Donc la formule (117.6) peut s'écrire ainsi:

$$P_c = \rho l \Gamma_0 v_0. \quad (117.7)$$

C'est la *formule* bien connue de *Joukovski-Kutta* qui définit la portance de l'aile en fonction de la circulation. Vu que d'après (117.2) la circulation Γ_0 croît proportionnellement à l'incidence α et à la vitesse, il s'ensuit que la portance croît proportionnellement au carré de la vitesse, à la densité de l'air et à l'incidence. Toutes ces déductions de la théorie de l'aile pour de faibles incidences sont confirmées par des études expérimentales.

Il est facile de se représenter pourquoi l'apparition de la portance est liée à une circulation suivant les aiguilles d'une montre. La circulation engendre une vitesse v supérieure à v_0 sur l'extrados, surtout près du bord d'attaque. La vitesse de circulation sur l'extrados est sommée à la vitesse de l'écoulement sans circulation montré à la figure 320, tandis que sur l'intrados elle est retranchée, donc la vitesse v_{ex} est plus grande que la vitesse v_{in}. Par suite, la pression p_{ex} sera également inférieure à la pression p_{in}; on aura sur l'extrados une dilatation et sur l'intrados une condensation. La pression à la surface de l'aile peut être mesurée en réunissant des petits orifices sur la surface de l'aile avec des manomètres. Ces expériences montrant de façon qualitative les variations de pres-

[1] On peut montrer de façon rigoureuse, en se basant sur la condition de l'écoulement symétrique (avec et sans circulation), que cette égalité se réalise avec précision.

sion peuvent être exécutées par chacun en soumettant à l'action d'un ventilateur une maquette de plaque (fig. 324).

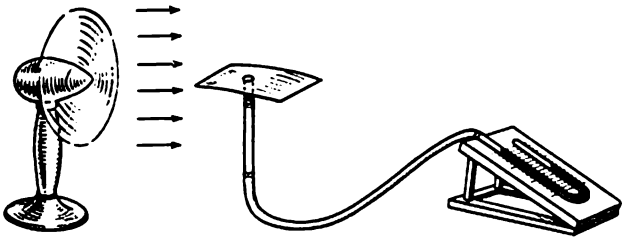


Fig. 324

La courbe de variation de la pression suivant la section d'une aile ordinaire a à peu près la forme montrée sur la figure 325 ; la force agissant sur l'aile est proportionnelle à la surface hachurée. S'il y a dans l'aile un trou débouchant, on observera une infiltration de l'air de bas en haut, et partant, la portance diminuera brusquement près du trou.

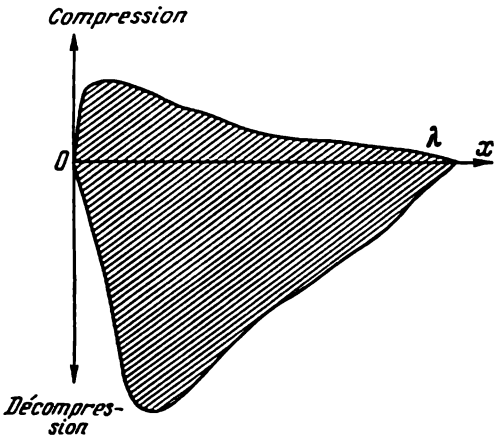


Fig. 325

Il est connu que si l'on plonge un cylindre auquel on a imprimé une rotation dans un courant d'air, il sera soumis à une force transversale au courant, dont l'origine est absolument analogue à celle de la portance s'exerçant sur l'aile. En effet, là où la vitesse circulaire du cylindre coïncide avec la vitesse de l'air (fig. 326) la vitesse du courant, par suite de la viscosité, dépassera celle développée sur le côté opposé du cylindre et, partant, la pression d'un côté sera plus grande que de l'autre. On a montré que la force latérale croît, en général, avec l'augmentation de la vitesse du courant comme avec celle de la vitesse de rotation du cylindre.

L'apparition de la force transversale peut être facilement montrée en faisant rouler un cylindre en papier mâché sur une table (fig. 327). En tombant, le cylindre est toujours entraîné sous la table. Il devient évident que la rotation acquise par le cylindre en roulant sur la table se conserve dans la chute et engendre une force dirigée sous la table. Le phénomène de l'apparition de la force transversale au cours de la rotation est dit *effet Magnus*.

Les tentatives de remplacer les voiles ou les ailes d'avions par des cylindres tournants n'aboutirent pas aux résultats escomptés,

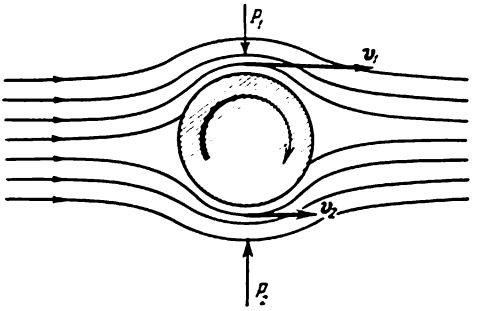


Fig. 326

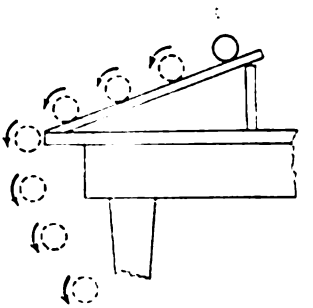


Fig. 327

quoiqu'un navire muni de cylindres tournants au lieu de voiles ait vu le jour (*rotors de Flettner*).

§ 118. DÉPENDANCE DE LA PORTANCE DE L'AILE DE L'INCIDENCE. RÉSISTANCE FRONTALE DE L'AILE, OU TRAINÉE

Jusqu'à présent on a étudié une aile d'envergure infinie, ou plus précisément, les forces agissant sur une petite tranche de la partie d'une aile de très grande envergure, ou bien les forces s'exerçant sur une aile dont les extrémités s'appuient sur des parois fixes. Et on a admis que les filets fluides se trouvaient toujours dans le plan perpendiculaire à l'aile et qu'ils étaient identiques pour toute section de l'aile.

Mais si l'on prend une aile, ou une plaque, de certaine longueur déterminée l, les filets fluides ne se trouveront plus dans le plan perpendiculaire à l'aile, leur

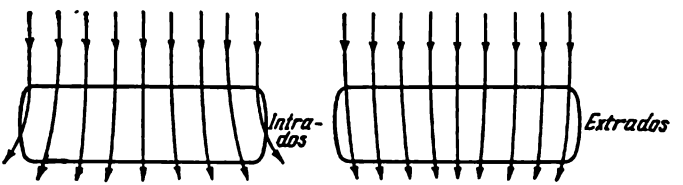


Fig. 328

direction sur l'extrados et sur l'intrados étant différente. Soit une telle aile vue de dessus (fig. 328). Au milieu de l'aile les filets suivront le contour de l'aile sur l'extrados comme sur l'intrados. Mais en approchant du bord de l'aile, les filets s'incurveront sur l'intrados vers le bord de l'aile et sur l'extrados, vers son milieu. En effet, sur l'extrados il y a dépression et sur l'intrados, une pression et cette dernière chasse donc l'air latéralement de sous l'intrados, l'air se précipite vers la zone de décompression et, par suite, repousse les filets longeant

le contour de l'extrados vers le centre de l'aile. Ainsi les filets qui longent l'extrados et l'intrados de l'aile, en convergeant à l'arrière du bord de fuite, sont donc mis en rotation suivant le courant et, derrière l'aile, se forment des cordons tourbillonnaires singuliers, particulièrement bien marqués au bout même de l'aile. Aux extrémités de l'aile le courant prend une direction quelque peu inclinée par rapport au bord d'attaque, réduisant ainsi l'incidence, ou diminuant la portance aux extrémités de l'aile, ce qui d'ailleurs est à prévoir, car, par suite de l'écoulement de l'air de l'intrados sur l'extrados par les bouts de l'aile, la pression sur l'intrados chute, tandis que sur l'extrados elle croît.

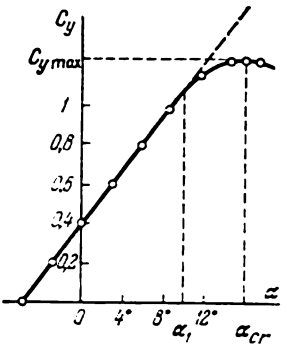


Fig. 329

Les portances des ailes courte et longue ne seront donc pas proportionnelles à leur aire, la portance par unité d'aire étant plus grande pour l'aile longue.

Dans les essais et les calculs des ailes d'avions la portance de l'aile s'exprime par la formule suivante :

$$P_p = C_y S \frac{\rho v^2}{2}, \qquad (118.1)$$

où S est l'aire de l'aile, C_y un coefficient sans dimension, dépendant du nombre de Reynolds, de l'envergure de l'aile, c'est-à-dire du rapport de la longueur de l'aile à sa corde et de l'incidence. Avec l'accroissement de l'envergure, C_y augmente.

Pour de petites incidences, la portance croît linéairement avec l'augmentation de l'angle α. Et par suite la grandeur C_y croît également proportionnellement à α (fig. 329). Mais cette croissance ne se poursuit que jusqu'à une certaine valeur de l'incidence α, après quoi le coefficient C_y (ou la portance) croît plus lentement, atteint un maximum pour une certaine valeur de α_{cr} et si α continue

Fig. 330

à croître, amorce une chute. La valeur de α_{cr} est appelée *angle d'incidence critique*, ou de décharge, sa grandeur (de l'ordre de 10-15°) dépend essentiellement de la forme du profil de l'aile et du nombre de Reynolds. La grandeur C_y pour α_{cr} est dite C_y maximal, ou $C_{y\,max}$ et joue un rôle très important, car la vitesse minimale de vol pour laquelle l'avion peut rester en sustentation dans l'air est

déterminée par la grandeur $C_{y\ max}$. Dans le but de garantir la sécurité de l'atterrissage, on tend à diminuer cette vitesse minimale (vitesse d'atterrissage) en augmentant $C_{y\ max}$.

La chute de la portance avec l'accroissement de α au-dessus de α_{cr} s'explique par le décrochage du courant sur l'extrados et l'augmentation de la zone de décrochage avec l'élévation de α. Pour des angles d'incidence supérieurs à l'angle critique, le courant n'adhère plus à l'extrados et se décolle à peu près de la manière

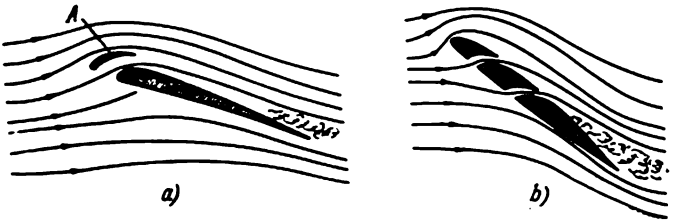


Fig. 331

montrée à la figure 330. Dans la zone de décrochage la pression est presque atmosphérique, il n'y a plus de décompression et, par suite, la portance y chute brusquement comme on devait s'y attendre.

Il existe une série de procédés pour pallier au décollage sur l'extrados et augmenter en conséquence $C_{y\ max}$, par exemple, en recourant aux volets de bord d'attaque (fig. 331, *a*) ou aux ailes à fentes (fig. 331, *b*). Le courant passe par la fente entre le volet de bord d'attaque *A* et l'aile, en se serrant contre l'extrados, et permet ainsi d'augmenter $C_{y\ max}$ et, partant, α_{cr}. Le même effet est obtenu avec l'aile à fentes. Il est intéressant de noter que les oiseaux avant de se poser sur terre écartent souvent les plumes de leurs ailes en formant ainsi une sorte d'aile à fentes.

La réaction du courant fluide sur l'aile est toujours inclinée vers l'arrière ; il existe toujours, en plus de la *portance* P_p, également une *résistance frontale* (*traînée*) R. La traînée est également définie par la formule

$$R = C_x S \frac{\rho v^2}{2}, \qquad (118.2)$$

où C_x est un coefficient sans dimension et S l'aire de l'aile. Pour des ailes bien profilées, la grandeur de C_x est de beaucoup inférieure à C_y. La traînée varie également en fonction de l'incidence de l'aile. Pour apprécier les qualités de vol de l'aile, il est très important de savoir comment varient simultanément les deux grandeurs, C_x et C_y, en fonction de l'incidence. Sur la figure 332 on a représenté ces dépendances, les échelles choisies pour C_y et C_x étant différentes.

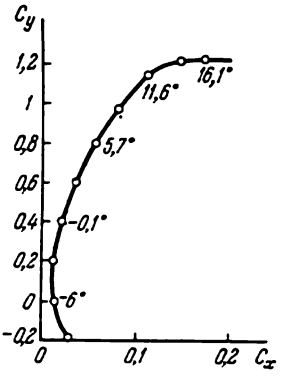


Fig. 332

La traînée augmente avec l'accroissement de l'incidence. Il est important de connaître l'incidence pour laquelle on a le plus grand rapport de la portance à la traînée. Le rapport de la portance à la traînée définit le rendement aérodynamique (ou la finesse) de l'aile, c'est-à-dire le rapport de la portance positive à la traînée négative. L'aile de finesse élevée est préférable, toutes les autres conditions restant les mêmes, car il est évident que les meilleurs régimes de vol s'établissent pour des incidences entraînant la finesse la plus élevée.

§ 119. FORCES ENGENDRÉES AU COURS DU VOL DE L'AVION

La somme de toutes les forces extérieures agissant sur l'avion volant horizontalement avec une vitesse uniforme est nulle. Examinons isolément les forces sollicitant l'avion. Dans le sens vertical s'exerce la force de gravitation P_g et la portance P_p, dans le sens horizontal, la traction de l'hélice F et la traînée R (fig. 333).

Si $P_p > P_g$, l'avion possède une accélération vers le haut, au contraire, pour $P_p < P_g$, l'accélération est dirigée vers le bas. La commande de l'avion dans le plan horizontal s'effectue au moyen de *gouvernes d'altitude* situées habituellement sur l'empennage de queue horizontal. L'empennage de queue horizontal, ou *stabilisateur*, est destiné à stabiliser l'avion dans le plan vertical. Si par hasard l'avion s'écarte de l'état d'équilibre, l'incidence de l'empennage horizontal se modifie et la force qui agit sur ce dernier remet l'avion en équilibre en lui communiquant sa position antérieure.

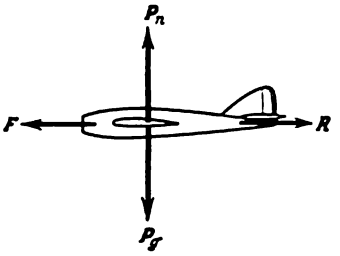


Fig. 333

Les gouvernes de profondeur sont situées en arrière de l'empennage horizontal et constituent sa partie mobile (*b* et *b* sur fig. 334). Quand la gouverne de profondeur est déviée vers le bas, la force, agissant sur l'empennage horizontal et dirigée vers le haut, fait piquer l'avion du nez. La déviation de la gouverne de profondeur vers le haut fait braquer le nez de l'avion.

La commande de gauchissement, l'inclinaison des ailes de l'avion par rapport à l'horizontale, ou la rotation autour de son axe longitudinal horizontal

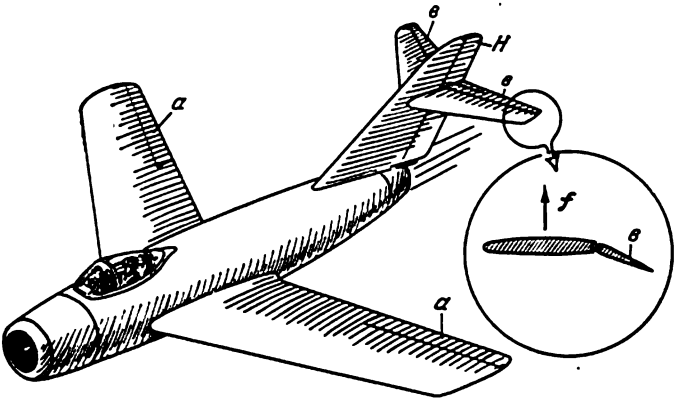


Fig. 334

(roulis), s'effectuent au moyen des *ailerons* (*a* et *a* sur fig. 334). La commande des ailerons s'effectue sur la base du même principe que celle des gouvernes de profondeur. L'aileron forme, en général, la partie arrière de l'aile qui se lève à un bout vers le haut et à l'autre, vers le bas et, inversement, suivant le besoin du pilote.

La rotation de l'avion autour de l'axe vertical, ou mouvement de lacet, est réalisée au moyen du *volet*, ou *commande de direction* (gouvernail), habituellement situé sur l'empennage de queue vertical (le volet de direction est désigné sur la figure 334 par la lettre *H*).

La traînée *R* de l'avion est compensée par la traction *F*, développée par le moteur. La traction *F* est créée par la rotation de l'hélice, ou le moteur à réaction. La traction du moteur à réaction, comme il a déjà été mentionné au § 27, se définit par le « débit d'air » par seconde et la vitesse avec laquelle cet air est rejeté par le moteur. Un principe analogue est également à la base de l'action de l'hélice; l'hélice, en tournant, effectue une prise d'air dans le milieu environnant et le rejette en arrière. La traction de l'hélice dépend également de la quantité d'air rejetée, ainsi que de la vitesse avec laquelle il est expulsé. Les pales de l'hélice constituent, en général, des ailes à incidence variable en longueur. La portance s'exerçant sur la pale est justement la traction que cette dernière développe.

§ 120. PROPAGATION DES PERTURBATIONS DE PRESSION DANS UN FLUIDE COMPRESSIBLE ET MOUVEMENT DU CORPS AVEC UNE VITESSE SUPERSONIQUE

A de petites vitesses du mobile l'air peut être considéré comme incompressible. Comme il a été vu (§ 105) pour des vitesses inférieures à 100 m/s l'erreur admise n'est pas si grande. La vitesse du son dans l'air dans des conditions ordinaires ($t = 15$ °C, $p = 760$ mm de mercure) est de 340 m/s. Quand la vitesse du corps dans l'air augmente, il faut tenir compte de la *compressibilité*.

La propagation d'une impulsion de pression quelconque dans l'air (si cette impulsion n'est pas trop grande) s'effectue avec la vitesse du son dans l'air. Si en un endroit quelconque du milieu aérien on augmente la pression en contractant l'air, puis on l'abandonne à lui-même, il se produira une décompression de l'air, mettant en mouvement les particules voisines de l'air, qui à leur tour, de proche en proche, mettront en mouvement les autres particules. La *perturbation*, ou l'*onde*, se propagera dans le milieu avec la vitesse d'environ 340 m/s.

Si la particule du gaz (le volume) comprimée est très petite, ou de forme sphérique, elle engendrera une onde sonore *sphérique*: les oscillations des particules sur la sphère seront identiques ou, comme il est dit, le *front d'onde* est une sphère. Par suite de la symétrie sphérique, le déplacement des particules en oscillations s'effectue le long du rayon, quant à l'allure des oscillations d'un point dans le temps elle sera à peu près de la forme indiquée sur le graphique de la figure 335. L'intensité de ces oscillations diminue avec l'éloignement du centre de l'onde.

Les études expérimentales montrent que pour des petites oscillations de la densité, la vitesse de la propagation de l'onde sonore est indépendante de la forme des oscillations, étant une grandeur constante qui est fonction des propriétés physiques du milieu.

C'est pourquoi, pour déterminer la vitesse de propagation du son, examinons le plus simple des exemples, celui de la propagation de l'impulsion de pression dans une conduite cylindrique remplie d'air ou d'un autre gaz. Supposons qu'à l'une des extrémités de la conduite cylindrique remplie de gaz sous pression p_0 est situé un piston A (fig. 336, a). A un certain instant $t = 0$, le piston se met en mouvement de façon instantanée avec une petite vitesse

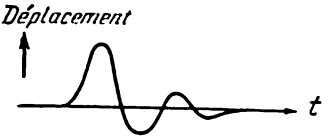


Fig. 335

constante v. Qu'arrivera-t-il avec le gaz au sein de la conduite? Le long de la conduite devant le piston [1] se propagera une « onde de vitesse » et une « onde de pression ». Après un temps Δt une certaine tranche de gaz de longueur $c\Delta t$, où la pression sera non pas p_0, mais

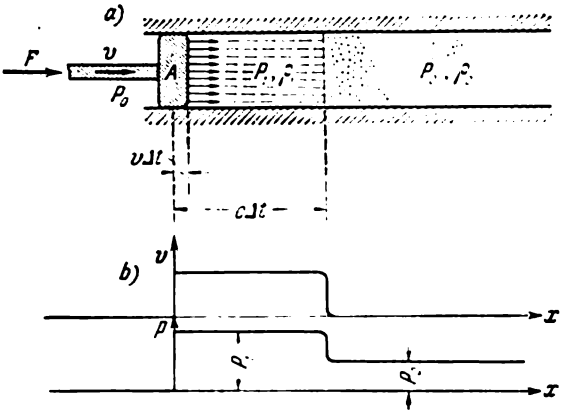


Fig. 336

déjà $p_1 = p_0 + \Delta p$ se déplacera devant le piston à la vitesse v. Le graphique des vitesses des particules à l'instant Δt est représenté à la figure 336, b; un aspect identique aura aussi le graphique des pressions; les particules comprimées se déplacent à la vitesse du piston, mais le nombre de particules en mouvement croît dans le temps, car l'onde des pressions se propage vers l'avant.

Appliquons la loi de variation de la quantité de mouvement à la propagation de l'onde. Les impulsions de la force F, avec laquelle

[1] L'onde se propagera aussi de l'autre côté du piston, mais on s'abstiendra de l'étudier.

le piston presse sur le gaz, peuvent s'écrire ainsi :

$$F\Delta t = \Delta p S \Delta t;$$

cette impulsion est égale à la quantité de mouvement reçue par le gaz :

$$(\rho_0 + \Delta\rho)\, cSv\Delta t,$$

où $\rho_0 + \Delta\rho = \rho_1$ est la densité au sein de l'onde, dans la tranche des particules comprimées. De cette égalité il s'ensuit :

$$\Delta p = (\rho_0 + \Delta\rho)\, cv. \tag{120.1}$$

La condition de constance de la masse de l'air au sein du volume gazeux, où se propage l'onde, peut s'écrire ainsi :

$$\rho_0 cS\Delta t = (\rho_0 + \Delta\rho)\,(c - v)\, S\Delta t,$$

ou

$$\Delta\rho + \rho_0 = \rho_0 \frac{c}{c - v}. \tag{120.2}$$

D'où il vient

$$\rho_0 + \Delta\rho = \Delta\rho \frac{c}{v}. \tag{120.3}$$

Portant (120.3) dans (120.1), on obtient l'expression générale de la vitesse de propagation de l'onde de pression dans la conduite :

$$c^2 = \frac{\Delta p}{\Delta\rho}. \tag{120.4}$$

Si $\Delta p \ll p_0$ et $\Delta\rho \ll \rho_0$, la vitesse de propagation de l'onde s'écrit ainsi :

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \tag{120.5}$$

Cette formule définit la vitesse de propagation du son, car pour une onde sonore les variations de pression dp et de densité $d\rho$ sont minimes.

Les variations de pression et de la densité au sein de l'onde sonore sont régies par la loi adiabatique [1] (§ 105)

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^{\varkappa}} \rho^{\varkappa},$$

où p_0 et ρ_0 sont les valeurs de la pression et de la densité en l'absence de l'onde ; d'où

$$dp = \frac{p_0}{\rho_0} \varkappa\, d\rho. \tag{120.6}$$

[1] La loi adiabatique, liant la pression à la densité ($p = \text{const} \cdot \rho^{\varkappa}$), est applicable aux phénomènes ne s'accompagnant pas d'échange de chaleur avec les corps environnants. Dans le cas considéré l'accroissement de la pression sur les particules gazeuses est très rapide, et, par suite, comme l'a indiqué Laplace, on peut considérer cet accroissement comme adiabatique.

Portant (120.6) dans (120.5), on obtient que la vitesse du son dans le gaz est

$$c = \sqrt{\frac{\varkappa p_0}{\rho_0}}. \tag{120.7}$$

La vitesse de propagation de l'onde dans un fluide est proportionnelle à la racine carrée de $\frac{\Delta p}{\Delta \rho}$, où $\Delta\rho$ est la variation de la densité d'une certaine particule du gaz due à la modification de la pression Δp. Si la pression donnée n'engendre qu'une petite variation de la densité, le fluide se comprimant faiblement, la vitesse du son

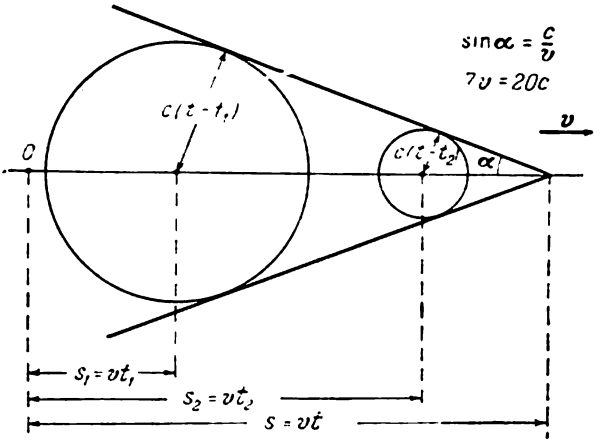


Fig. 337

sera grande. Un fluide incompressible correspond à $\Delta\rho \to 0$ pour un Δp fini, ou la vitesse du son dans un fluide incompressible doit tendre vers l'infini.

Supposons qu'un petit corps solide, qu'on peut assimiler à un point, se déplace de façon rectiligne dans un certain milieu (gaz) avec une vitesse supersonique v. Dans son mouvement le corps entre en collision avec des particules du milieu au repos. Ces chocs engendrent des impulsions qui se propagent dans toutes les directions de l'espace environnant avec la vitesse constante du son c. Il est évident que le front d'onde est une sphère, car les particules du milieu sont immobiles.

Ce processus est ininterrompu : à l'instant t_1 le point se trouve au point de coordonnée s_1 (fig. 337) et durant le laps de temps dt subit une collision avec la particule du gaz de longueur $v\,dt$; à partir de cette particule durant le temps $t - t_1$ se propage une onde sonore sphérique de rayon $c\,(t - t_1)$; le même phénomène a lieu au cours de tous les laps de temps ultérieurs. Ainsi, par exemple, à partir du

point de coordonnée $s_2 = vt_2$ à l'instant $t_2 > t_1$ commence à se propager une onde sphérique identique et dont le rayon à l'instant $t > t_2$ sera $c(t - t_2)$, etc. On peut imaginer une surface enveloppante de l'ensemble de toutes les ondes sphériques qui aura évidemment la forme d'un cône dont le sommet est situé à l'instant donné t au point de coordonnée $s = vt$ correspondant à la position du corps mobile. Le cône a pour angle au sommet 2α; la grandeur de α se détermine d'après la formule

$$\sin\alpha = \frac{c(t-t_2)}{v(t-t_2)} = \frac{c}{v}. \tag{120.8}$$

Toutes les portions des ondes contiguës à la surface du cône ont la même forme; en se superposant, elles se renforcent mutuellement.

Ce qui est important, c'est que seule la partie qui se trouve à l'intérieur du cône, dit *cône de Mach*, est « perturbée » par la particule en mouvement. Toutes les autres particules du milieu sont au repos à l'instant t. Le mouvement du corps (du point) à une vitesse supersonique peut donc être représenté comme un phénomène continu de propagation d'une séquence d'ondes sonores au sein du cône de Mach se déplaçant avec le corps. Plus la vitesse v est grande, plus petit est l'angle α, plus faible est l'ouverture du cône, moins grand est l'espace perturbé par le mouvement de la particule.

Il va de soi que la formation d'ondes s'accompagne d'une dépense d'énergie; l'énergie cinétique du corps se transforme en partie en l'énergie des ondes sonores et, partant, le corps devient soumis à la « force de résistance au mouvement » qu'on appelle *traînée d'onde*. Les oscillations des ondes sonores s'affaiblissent dans le temps, car elles occupent avec le temps un domaine de plus en plus grand et s'amortissent du fait du frottement interne au sein du gaz; en fin de compte « la queue » du cône se disperse dans l'espace.

Si la particule se déplaçait à une vitesse non supersonique, elle serait également une source d'ondes sonores, mais leur nature serait tout à fait différente: la perturbation s'étendrait à tout l'espace gazeux dont l'image est fournie par la figure 338, où la position du corps et le front d'onde qu'il envoie sont marqués par les mêmes chiffres. Si la particule était en mouvement un long moment avant l'instant considéré, les ondes occupent alors tout l'espace.

A la vitesse du corps égale à la célérité du son, le domaine de la perturbation ne concerne que la moitié de l'espace, car l'ouverture du cône de Mach est $2\alpha = \pi$ (la situation correspondante est visualisée sur la figure 339).

L'exemple idéal, décrit plus haut, du mouvement d'un petit corps (assimilé au point) permet de se représenter la nature des processus engendrés par le mouvement d'un grand corps à des vitesses supersoniques. Si l'aile de l'avion est suffisamment mince et a un bord pointu, on peut, en première approximation, l'assimiler

à un ensemble de petits corps (de points ou de particules) dont chacun envoie dans l'espace environnant une onde sonore sphérique. L'onde résultante sera constituée de la superposition l'une sur l'autre d'ondes élémentaires émanant de chacun des points formant la surface de l'aile, et le domaine de la perturbation se définira par l'ensemble des cônes de Mach se déplaçant avec chacun des points

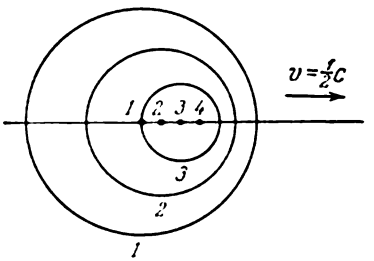


Fig. 338

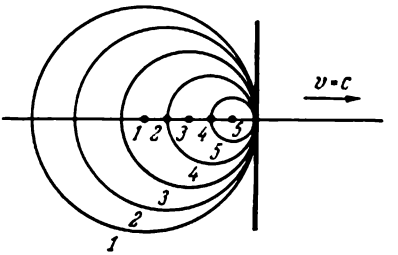


Fig. 339

de la surface de l'aile. La surface du domaine perturbé ne sera plus un cône, mais il est facile de se la représenter, si l'on tient compte de ce qu'elle est l'enveloppante de tous les cônes de Mach. Par exemple, si l'on se réfère à la figure 340, on peut se représenter la position de la surface enveloppe autour d'une certaine plaque mince *adbc*.

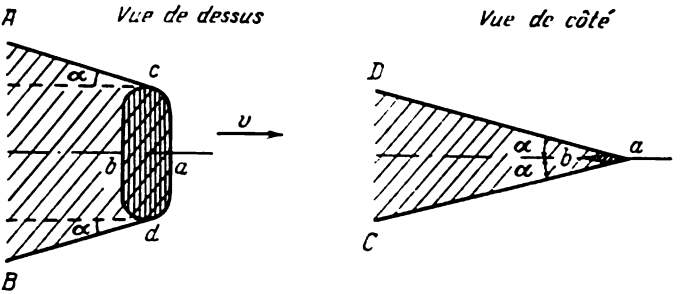


Fig. 340

(On a montré sur le dessin l'intersection de cette surface avec les plans horizontal *AcadB* et vertical *DaC*.) En première approximation, il est possible de calculer la traînée d'onde de l'aile et sa portance en se basant sur cette image simplifiée de la propagation des ondes élémentaires autour de l'aile.

En réalité la situation est plus compliquée, les chocs des particules du milieu contre le corps sont très intenses, c'est-à-dire qu'ils engendrent des variations de pression suffisamment grandes et la nature des perturbations se propageant dans l'espace environ-

nant est quelque peu différente : les perturbations ne peuvent plus être décrites par une somme (un ensemble) d'ondes acoustiques simples provoquant de petites variations de densité du milieu et de pression. Cette différence est particulièrement sensible pour des corps volumineux au bec émoussé ; on en traitera au paragraphe suivant.

§ 121. NATURE DES ONDES POUR DES VARIATIONS DE PRESSION IMPORTANTES ET MOUVEMENT DU CORPS AUX GRANDES VITESSES

Au paragraphe précédent on a supposé que la vitesse de déplacement du piston est très faible : $v \ll c$, et Δp est petit devant p_0. Ensuite, on a admis que le piston prend instantanément la vitesse finale v lors de sa mise en mouvement. Si le temps de l'accroissement de la

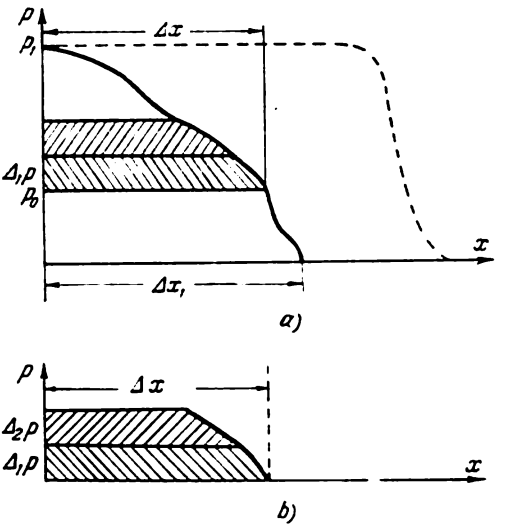


Fig. 341

vitesse du piston de zéro à v, égal à $\Delta\tau$, est de beaucoup inférieur à Δt, toutes nos conclusions resteront valables. Toutefois le graphique du premier front d'onde de la pression (ou de la vitesse) ne sera plus aussi à pic que sur la figure 336, *b*. Durant le temps $\Delta\tau$ la vitesse de la particule située sur le front d'onde croît de zéro à v.

Etudions maintenant l'onde pour des grandes variations de la pression. Supposons que la pression du piston s'est élevée durant le temps $\Delta\tau$ d'une grandeur importante p_1 et la distribution de pression devant le piston à l'instant $\Delta\tau$ a la forme indiquée sur la figure 341, *a*. La propagation de cette onde complexe peut être présentée

sous forme de propagation d'une séquence d'ondes élémentaires d'intensité aussi faible que celle des ondes examinées au paragraphe précédent. Chacune de ces ondes élémentaires se propage à la suite l'une de l'autre et la variation de pression est chaque fois petite et égale à Δp ; alors $\Delta x_1 = c\Delta\tau$. Admettons que l'onde élémentaire de pression $\Delta_1 p$ se propage dans un milieu comprimé jusqu'à p_0, comme c'est montré sur la figure 341, *b*.

Au sein d'un milieu, déjà comprimé jusqu'à la grandeur $p_0 + \Delta_1 p$, se propage l'onde élémentaire suivante de pression $\Delta_2 p$ et, ainsi de suite, jusqu'à la grandeur p_1. Chacune des ondes élémentaires suivantes se propage dans un milieu plus dense. La variation de la densité et de la pression est reliée par la loi adiabatique $p = \text{const} \cdot \rho^{\varkappa}$, $\varkappa$ étant égal pour l'air à 1,4, tandis que la tangente de l'angle d'inclinaison de la droite tangente à la courbe adiabatique est égale d'après (120.5) au carré de la vitesse du son ; donc la vitesse du son croît avec l'augmentation de la densité. Par conséquent, les ondes élémentaires qui suivent rattrappent celles qui les devancent, le *front d'onde* devenant avec le temps *de plus en plus abrupte*, pour acquérir en fin de compte la forme indiquée sur la figure 341, *a* en pointillé ; cela signifie que par la suite dans la conduite se propage l'*onde de pression d'explosion* au sein de laquelle un *saut* fait croître presque instantanément la pression et la vitesse qui après ce saut restent constantes [1]. La vitesse de propagation de l'onde explosive est plus difficile à déterminer, car elle diffère de la vitesse du son et est fonction de la grandeur du saut de pression. Donc pour de grandes et brusques variations de pression, par exemple, dans l'explosion d'un obus ou d'une bombe dans l'air on observe la propagation d'ondes de pression explosive. Dans ces ondes la grandeur du saut de pression décroît également avec la distance, surtout si l'explosion a lieu au sein d'un domaine restreint, en engendrant une onde presque sphérique.

Quand le front de l'onde explosive passe par la particule considérée cette dernière éprouve un *choc* de la part des particules mobiles, au cours duquel sa vitesse s'accroît instantanément de zéro jusqu'à une valeur finale. C'est pourquoi les ondes explosives sont encore appelées *ondes de choc*.

Une situation à peu près analogue se présente devant et sur les côtés d'un corps droit et épais lancé à une vitesse supérieure à la vitesse du son dans le milieu. Dans ce cas la partie frontale de l'onde de choc, pour un corps en flèche et une vitesse suffisamment grande, ressemble à une pointe. Les particules en aval du corps sont au repos jusqu'à l'instant où elles sont heurtées par la partie de l'onde de choc qui accompagne le corps.

[1] Des considérations identiques montrent que si dans le milieu se propage une onde de détente, le front de l'onde de *détente* s'étale et devient *de moins en moins abrupte*, à mesure que l'onde se propage.

Au moment où la particule est traversée par l'onde de choc, la particule est instantanément comprimée et acquiert une certaine vitesse. L'air entre le corps et le front de l'onde de choc se déplace, en écartant les particules pour laisser la place au corps. La situation rappelle le phénomène de la propagation des ondes dans une conduite cylindrique, seulement la couche gazeuse comprimée entre l'onde de choc et le piston y croît tout le temps, tandis que dans le cas considéré les particules du gaz comprimé divergent continûment vers les côtés (car les parois sont absentes) et la couche entre l'onde de choc et le corps conserve une épaisseur constante ; les particules d'air qui y pénètrent continûment divergent dans tous les sens,

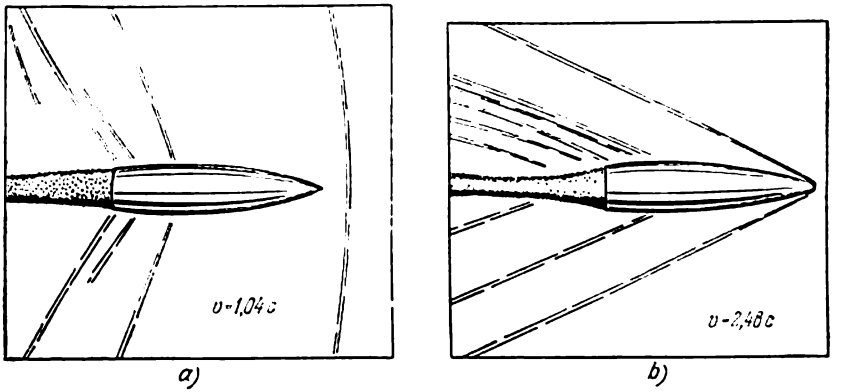


Fig. 342

en provoquant une perturbation dans le milieu environnant. Les perturbations se propagent avec une certaine vitesse dépendant de la grandeur du saut de pression. Mais avec l'éloignement du corps la grandeur du saut de pression diminue évidemment et la vitesse de propagation des perturbations diffère déjà peu de la vitesse acoustique et, partant, la forme de l'onde de choc rappelle le cône de Mach correspondant.

Pour des corps en flèche, entre le nez et l'onde de choc, si $v > c$, la couche peut être très mince et l'onde de choc se « détache » du nez du corps. Pour de très grandes vitesses, $v \gg c$, l'onde de choc frôle presque la surface du corps et le cône de Mach s'allonge fortement.

L'onde de choc accompagne toujours l'avion se déplaçant à des vitesses supersoniques et, s'il vole à des altitudes pas trop grandes, la grandeur du saut de pression se ressent fortement à la surface terrestre. Quand cette onde atteint notre oreille, on entend un brusque bang rappelant l'explosion d'une grenade ou d'un obus, suivi du bruit ordinaire d'un avion en vol. Quant au pilote se déplaçant avec l'onde il n'entend aucun bang. Sur la figure 342 on a montré

des balles lancées à la vitesse $v = 1{,}04\ c$ et $v = 2{,}48\ c$; l'ombre de l'onde de choc est représentée en pointillé.

L'énergie du corps en mouvement (obus, balles, etc.) est en majeure partie dépensée à la création de l'onde de choc accompagnant son mouvement à des vitesses supersoniques. La résistance au mouvement du corps à de telles vitesses est essentiellement une *résistance d'onde*. Les particules du milieu sont mises en mouvement du fait de l'impact du corps avec les particules se trouvant sur son passage. Les particules percutées par le corps s'écartent et provoquent le mouvement des particules du milieu environnant, qui se déclenche après le passage de la partie frontale de l'onde de choc. L'énergie dépensée au mouvement des particules et à la chaleur, engendrée par le choc, s'obtient aux dépens des pertes d'énergie cinétique du corps en mouvement, ou aux dépens de la source entretenant le mouvement du corps. La forme de la partie frontale du corps exerce une influence essentielle sur la grandeur de la traînée : un corps en flèche et mince a une moindre traînée. La forme de la partie arrière du corps a une moindre importance que dans le cas de l'écoulement à des vitesses subsoniques.

§ 122. ÉCOULEMENT SUPERSONIQUE DANS UNE CONDUITE

Comme on l'a vu au § 105, la vitesse du flux gazeux, sortant d'un orifice et se trouvant sous une pression p_1, peut atteindre théoriquement une grande valeur. Ainsi, par exemple, l'air à la pression d'une atmosphère possède suivant la formule (105.5) une vitesse d'écoulement dans l'espace de pression nulle (le vide) qui est égale à

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_1}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}405 \cdot 1{,}0133 \cdot 10^5}{0{,}405 \cdot 1{,}293}} \approx 750 \text{ m/s},$$

où le coefficient adiabatique $\varkappa = 1{,}405$, la pression atmosphérique $p_1 = 1{,}0133 \cdot 10^5$ kg/m·s^2 et la densité initiale de l'air $\rho_i = 1{,}293$ kg/m^3.

Cette vitesse d'écoulement dépasse de plus de deux fois la vitesse du son. Toutefois, si l'orifice est seulement en section contractée, comme c'est montré à la figure 301, *a*, pratiquement ces valeurs de la vitesse ne seront pas atteintes. En effet, soient à l'extérieur et l'intérieur du vase des pressions identiques ; abaissons progressivement la pression à l'extérieur, en admettant qu'à l'intérieur du vase la pression est maintenue constante (d'une atmosphère). La vitesse maximale dans la section étroite de l'orifice grandira alors progressivement. Pour une certaine valeur de la pression extérieure, qu'on peut déterminer d'après la formule (105.5), la vitesse d'écoulement atteindra la vitesse du son et toute la section de l'orifice sera occupée par la tranche gazeuse se déplaçant à la vitesse acoustique.

Toute modification de la pression à l'extérieur se répercutera sur l'écoulement au sein du vase au cas où cette variation se ressent de façon quelconque à l'intérieur du vase. La variation de pression dans le gaz se propage à la vitesse du son et, par conséquent, cette variation ne peut pénétrer à l'intérieur du vase par la région où les particules se déplacent avec la vitesse acoustique. Donc l'abaissement ultérieur de la pression à l'extérieur n'élèvera pas la vitesse d'écoulement dans l'orifice. Le flux d'air aura dans l'orifice une pression déterminée, supérieure à la pression environnante. Un courant de vitesse du son « bouche » l'orifice. Cette conclusion se confirme par l'analyse des conditions d'existence de l'écoulement du gaz comprimé en régime permanent le long d'un filet fluide de section variable.

Soit en régime permanent l'écoulement d'un gaz comprimé le long d'un filet de section S, que l'on considérera comme une fonction de la coordonnée x dirigée le long du filet suivant l'écoulement. Dans ce cas la condition de constance de l'écoulement volumique en régime permanent le long du filet s'écrira ainsi :

$$\rho v S = \text{const}, \tag{122.1}$$

où toutes les grandeurs ne sont fonction que de x. Avec le passage de la section de coordonnée x à la section de coordonnée $x + dx$ toutes les grandeurs changent, mais entre les différentielles de ces grandeurs on aura la relation

$$\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} = 0, \tag{122.2}$$

qu'on obtient après la dérivation de l'expression (122.1). D'après la seconde loi de la dynamique

$$-dp = \rho v\, dv, \tag{122.3}$$

où dp est l'accroissement de la pression au cours du passage de x à $x + dx$. Maintenant considérons la relation connue du § 120 de la vitesse du son

$$dp = c^2 d\rho\,; \tag{122.4}$$

portons-la dans (122.3) et il vient

$$\rho v\, dv = -c^2\, d\rho,$$

ou

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v\, dv}{c^2}. \tag{122.5}$$

Portant cette expression dans (122.2), on obtient le lien entre la section droite du filet et la vitesse d'écoulement :

$$\frac{dS}{S} = \frac{dv}{v}\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right). \tag{122.6}$$

Cette formule fournit la dépendance entre la variation de la section du filet dS et la variation de la vitesse v; elle montre de même le rôle de principe du rapport de la vitesse d'écoulement à la vitesse du son c.

Si le filet est étranglé le long de l'écoulement, ou dS est négatif, alors d'après (122.6) $dv > 0$, à condition naturellement que $\frac{v}{c} < 1$. Cela signifie que dans un filet étranglé la vitesse v ne peut s'accroître le long de l'écoulement que jusqu'à une certaine valeur qui ne dépasse pas la valeur de la vitesse du son c. Pour une valeur positive de dv, en cas d'accroissement de la vitesse, la densité ρ diminue toujours,

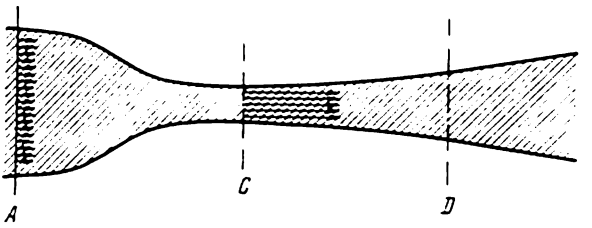


Fig. 343

comme cela s'ensuit de la condition (122.5). *Dans un filet étranglé la vitesse d'écoulement croît, tandis que la densité et la pression chutent le long du courant, toutefois la vitesse ne peut dépasser la vitesse du son c.* Sur la base de raisonnements élémentaires on a abouti à la même conclusion qu'antérieurement.

Si le filet s'élargit ($dS > 0$) et la vitesse d'écoulement à l'origine du filet est inférieure à c, $dv < 0$ en vertu de (122.6). Cela veut dire que la vitesse d'écoulement *diminue* le long de l'écoulement, tandis que la pression et la densité *augmentent*, comme on le voit d'après (122.5). Si par contre dans un filet élargi la vitesse d'écoulement v est supérieure à la vitesse c, $dv > 0$ et la vitesse d'écoulement le long du filet *augmentera*, la pression et la densité *chutant*.

On a ici une situation complètement différente de celle de l'écoulement d'un fluide incompressible à vitesse inférieure à c. En effet, pour une vitesse d'écoulement inférieure à c dans une conduite qui s'élargit, la vitesse chutera, tandis que la pression et la densité augmenteront le long de l'écoulement. Pour un liquide incompressible $c \to \infty$, par suite, dans une conduite s'étranglant ou s'élargissant la variation de pression et de vitesse est qualitativement la même que dans un gaz si $v < c$.

Pour obtenir des vitesses supersoniques de l'écoulement dans un tube, il faut donc tout d'abord le rendre convergent, puis divergent (fig. 343). Pour un gradient de pression correspondant, la vitesse d'écoulement entre les sections A et C croîtra jusqu'à la vitesse du

son, puis de la section C à la section D elle croîtra le long de l'écoulement en restant supérieure à la vitesse du son. La section du tube doit être choisie de façon que les dépenses en pression pour l'obtention de la vitesse donnée soient minimales. Si le tube a un divergent incompatible, il pourra alors se former dans la zone de vitesse supersonique des « sauts » (*ondes explosives*), immobiles par rapport aux parois du tube, et après le saut la vitesse chutera. On ne s'arrêtera pas sur les causes de formation des sauts.

Pour des essais de maquettes en écoulement supersonique, on construit des souffleries supersoniques dont la section est à peu près celle montrée à la figure 343, la maquette se disposant dans la zone de section D. Autour de la maquette se forment des ondes de choc de la même façon qu'au cours du vol à la vitesse supersonique dans l'air libre.

TROISIÈME PARTIE

OSCILLATIONS ET ONDES. ÉLÉMENTS D'ACOUSTIQUE. FONDEMENTS DE LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

CHAPITRE XIV

OSCILLATIONS

§ 123. PHÉNOMÈNES PÉRIODIQUES

Parmi les phénomènes de la Nature un intérêt spécial présentent les phénomènes périodiques: la récurrence des jours et des nuits, la révolution de la Lune autour de la Terre, le mouvement des planètes, etc. Il en est de même dans la vie courante et en technique: oscillations du balancier d'une horloge; la rotation des organes de différentes machines, etc., ce n'est au fond que l'exploitation de phénomènes périodiques.

Dans un phénomène périodique, la variation d'une grandeur quelconque se répète sous la même forme après un temps déterminé,

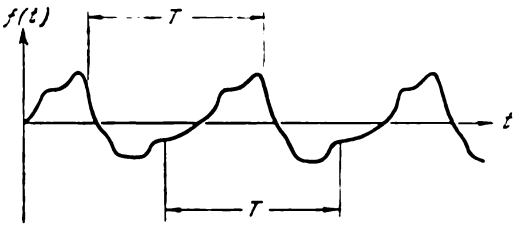


Fig. 344

appelé période. La définition mathématique d'une grandeur périodique est la suivante: si $f(t)$ est une fonction périodique de t de période T, alors pour tout t, la fonction $f(t+T)=f(t)$. Le graphique d'une grandeur variant périodiquement est répété exactement après l'écoulement de la période (fig. 344). On rencontre souvent des phénomènes non périodiques qui rappellent les phénomènes de récurrence; par exemple, les oscillations pendulaires d'une bille suspendue à un fil, les oscillations d'une branche d'arbre écartée vers le bas, etc. Tous ces phénomènes ne sont pas périodiques, car

leurs oscillations décroissent progressivement en grandeur dans le temps. Ces phénomènes, comme nombre de phénomènes analogues, ont reçu une dénomination plus générale de *mouvements oscillatoires*, dont les vibrations périodiques ne constituent qu'un cas particulier.

Si les vibrations sont transmises de proche en proche d'une particule à une autre, comme par exemple les oscillations de la surface d'eau déclenchées par la chute d'une pierre sont transmises aux particules d'eau voisines, l'ensemble des oscillations de toutes les particules est appelé *phénomène ondulatoire*.

Parmi les oscillations variées qu'on rencontre dans la Nature un rôle essentiel et très important est joué par des *oscillations harmoniques*.

§ 124. OSCILLATIONS HARMONIQUES

Les oscillations harmoniques sont des phénomènes périodiques où la variation de la grandeur observée s'effectue suivant la loi du sinus (ou du cosinus). Par exemple, la projection du point se déplaçant uniformément suivant une circonférence sur une droite située dans le plan du mouvement du point (fig. 345) varie dans le temps

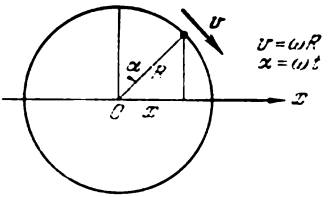


Fig. 345

suivant la loi sinusoïdale. Si la circonférence a pour rayon R et ω est la vitesse angulaire de rotation du point, la projection x est égale à

$$x = R \sin \alpha = R \sin \omega t. \qquad (124.1)$$

La période de variation de x est évidemment

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \qquad (124.2)$$

après le temps T, qui est le temps d'une rotation du point, tout le phénomène se répète de façon identique. Donc T est la *période des oscillations harmoniques* et ω est la *fréquence circulaire* (ou *cyclique*) *des oscillations harmoniques*, ou *pulsation*. Le nombre de passages dans l'unité de temps est appelé *fréquence des oscillations*,

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

La fréquence ν est mesurée en *Hertz* (Hz), dont la dimension est 1/s. Si le corps effectue N vibrations par seconde, la fréquence de ses vibrations est $\nu = N$ Hz.

Le mouvement harmonique se rencontre fréquemment dans le cas de mouvement uniforme sur une circonférence. Mais, par contre, le mouvement du piston d'une machine à vapeur (ou d'un moteur à combustion interne), pendant la rotation uniforme du volant, n'est plus un mouvement harmonique pur, ils ne s'en rapprocheront qu'à des conditions déterminées.

On n'a donné qu'une description cinématique du mouvement harmonique. Abordons maintenant les conditions physiques des mouvements harmoniques.

Suspendons à un fil une petite masse, comme c'est montré à la figure 346, et, après l'avoir écartée de sa position d'équilibre, lâchons-la. La masse tendra vers la position d'équilibre avec une accélération imprimée par la tension du fil N et la pesanteur $P = mg$. Ayant atteint la position d'équilibre O, où l'accélération s'annule, la masse franchira par inertie la position d'équilibre et continuera son chemin cette fois freinée par la force qui l'avait accélérée. Puis, elle s'arrête pour rebrousser chemin, c'est ainsi que sont amorcés les *mouvements propres* du pendule. Ces mouvements sont dits *propres*, car au cours des oscillations la masse n'est soumise qu'à l'action des forces déterminées par le mécanisme physique du pendule même et non d'autres corps.

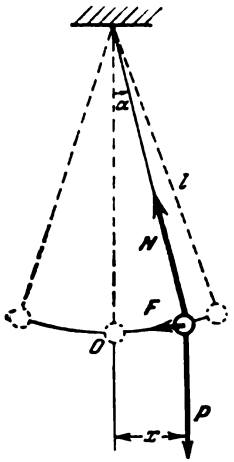


Fig. 346

Avec le temps, les oscillations du pendule diminueront, c'est-à-dire *s'amortiront*. Cela est dû à ce que l'énergie initiale communiquée à la masse du pendule par l'écartement manuel, se transforme progressivement en chaleur du fait des frottements. Les oscillations du pendule ne seront ni harmoniques ni périodiques, mais si on diminue les frottements ces oscillations se rapprocheront *très près* des oscillations harmoniques.

Pour se représenter de façon plus claire les lois des oscillations du pendule, examinons d'abord un cas limite, celui des oscillations du pendule sans frottements qui seront évidemment périodiques. Etudions des petites oscillations propres d'un tel pendule [1].

Désignons par α l'angle d'écartement du pendule. Il nous faut trouver comment il variera dans le temps. La force agissant sur la masse m est composée de deux forces : la pesanteur $P = mg$, dirigée d'aplomb vers le bas, et la tension du fil N, dirigée le long du fil vers le point de suspension (voir fig. 346). Si l'angle d'écart α reste

[1] Si les dimensions de la masse sont très petites et elle peut être assimilée à un point matériel, tandis que le fil est considéré comme impondérable, ce pendule est dit *mathématique*.

tout le temps petit, l'arc de la trajectoire de la masse peut de façon approchée être confondu avec une droite. L'écartement de la masse de la position d'équilibre sera noté par x; alors pour des α petits, on peut approximativement considérer que

$$x \approx l\alpha, \tag{124.3}$$

où l est la longueur du pendule du point de suspension au centre de gravité de la masse. La force F agissant le long de l'arc est égale à $P \sin \alpha$, ou pour un α petit

$$F \approx mg\alpha. \tag{124.4}$$

Dans ce cas l'équation du mouvement de la masse sera

$$m\ddot{x} = -F. \tag{124.5}$$

On a placé devant F le signe moins, car la force F est dirigée dans le sens opposé de celui de la coordonnée de l'écartement x. Si dans (124.4) on remplace α par x/l, l'équation (124.5) devient:

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{l}, \tag{124.6}$$

ou, simplifiant par m, on obtient en définitive:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0. \tag{124.7}$$

Le mouvement à la masse est imprimé par l'action de la force $F = mg\frac{x}{l}$ (voir (124.6)), dont la grandeur varie proportionnellement à l'écartement de la masse (x) de la position d'équilibre ($x = 0$), cette force étant toujours dirigée vers la position d'équilibre. Aussi appelle-t-on la force F *force de rappel*.

La solution de l'équation (124.7) est facile à trouver. Elle est

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \varphi\right), \tag{124.8}$$

où A et φ sont, pour l'instant, des grandeurs constantes arbitraires. Démontrons que (124.8) satisfait à l'équation (124.7). En effet, en dérivant x deux fois, il vient

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \varphi\right) = -\frac{g}{l}x. \tag{124.9}$$

L'égalité (124.9) coïncide entièrement avec l'équation (124.7). Désignons

$$\frac{g}{l} = \omega^2 \tag{124.10}$$

et écrivons le mouvement de la masse (124.8) sous la forme :

$$x = A \sin (\omega t + \varphi). \tag{124.11}$$

On a donc trouvé que x varie dans le temps suivant la loi sinusoïdale. La grandeur A, correspondant à l'écartement maximal de la position d'équilibre, est dite *amplitude* des oscillations harmoniques. La grandeur de l'amplitude est fonction de l'écart initial et de la secousse reçue, après lesquels se déclenchent les oscillations du pendule. La grandeur située sous le signe du sinus $\omega t + \varphi$ est appelée *phase*. La phase croît proportionnellement au temps. La grandeur φ est la *phase initiale*, ou la phase à l'instant $t = 0$; elle est fonction de l'écartement et de la vitesse à l'instant où l'on commence à compter le temps t.

Les oscillations suivent un cours périodique, le phénomène se répétant après la *période des oscillations propres* T. Il est évident que le déplacement de la masse x et sa vitesse $\dot{x}$ seront les mêmes, si la phase $\omega t + \varphi$ varie de la grandeur 2π. La phase augmente de 2π quand le temps varie de la durée de la période T. Donc

$$2\pi = \sqrt{\frac{g}{l}}\, T :$$

d'où la période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{124.12}$$

Soulignons qu'après une période le pendule repasse par la même position et acquiert la même vitesse. La période des oscillations est proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule l, ce qui se vérifie facilement par l'expérience. Un pendule de longueur quatre fois plus grande possède une période deux fois plus grande. La période du pendule est indépendante de la masse du pendule [1] et n'est pas liée à l'amplitude des oscillations. Cette dernière assertion n'est vraie que pour de petits angles d'écart. Les oscillations d'amplitude 2° ont pratiquement la même période que les oscillations d'amplitude 4°, et pour la précision habituelle de mesure de la période (jusqu'à 0,2 %) cela est vrai pour des oscillations où l'écartement du pendule ne dépasse pas 10°.

Pour de grands écarts du pendule, l'équation approchée (124.6) n'est plus vérifiée. L'équation des oscillations s'écrit dans ce cas ainsi :

$$ml^2 \ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha, \tag{124.13}$$

qui est l'équation d'une rotation autour d'un axe horizontal passant par le point de suspension. Le mouvement du pendule pour de grands angles d'écart sera périodique, mais *non harmonique*, la période des oscillations dépendant de l'amplitude.

[1] Dans le cas où les dimensions de la masse sont très faibles devant celles de l.

La fréquence des oscillations du pendule pour de petits angles d'écart, ou la *fréquence propre*, est d'après (124.12)

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{124.14}$$

et la grandeur $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ est appelée *fréquence circulaire propre*, ou *pulsation propre*. La confrontation de (124.10) et de (124.14) montre que la pulsation du pendule est

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{124.15}$$

La période et la fréquence des oscillations d'un pendule mathématique, pour de petits angles d'écart, dépend de sa longueur l et de g (accélération de la pesanteur du lieu donné).

Les oscillations propres d'un pendule composé, c'est-à-dire d'un corps pesant pivotant librement autour d'un certain axe, se dérouleront de la même façon que les oscillations du pendule simple examiné plus haut. Soit un corps A (fig. 347) pivotant librement autour d'un axe horizontal O perpendiculaire au plan du dessin. La distance du centre des masses à l'axe est a; l'écart du corps de sa position d'équilibre de l'angle α engendre alors un moment de rappel de la force de pesanteur qui est égal à

$$mga \sin \alpha,$$

où m est la masse du corps.

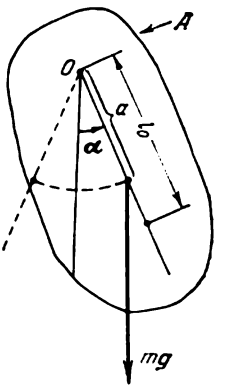


Fig. 347

Au cours des oscillations seul ce moment agira sur le corps et par suite, suivant la seconde loi de la dynamique, pour un corps en rotation

$$I\ddot{\alpha} = -mga \sin \alpha,$$

où I est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe horizontal passant par le point O perpendiculairement au dessin. Pour de petits angles d'écart $\sin \alpha \approx \alpha$; alors

$$I\ddot{\alpha} + mga\,\alpha = 0,$$

ou

$$\ddot{\alpha} + \frac{mga}{I}\alpha = 0. \tag{124.16}$$

Par sa forme cette équation coïncide avec l'équation (124.7). Donc α variera de façon harmonique avec la pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}}, \tag{124.17}$$

qu'on obtient facilement en comparant (124.16), (124.7) et (124.15). Donc, le pendule simple dont la longueur est

$$l_0 = \frac{I}{ma}, \tag{124.18}$$

aura la même pulsation que le pendule composé. Le point situé à la distance l_0 de l'axe de rotation, sur la ligne passant par le centre des masses, s'appelle *centre d'oscillation du pendule composé*. Si l'axe de rotation est placé au centre d'oscillation le pendule oscillera avec la même pulsation.

On peut s'en convaincre par le calcul, en se souvenant de la formule de Huygens-Steiner qui donne le moment d'inertie $I = I_0 + ma^2$ (voir (59.16)) et en écrivant l'expression (124.18) ainsi :

$$l_0 = \frac{I_0}{ma} + a, \tag{124.19}$$

où I_0 est le moment d'inertie du corps par rapport à un axe parallèle passant par le centre des masses du corps. De (124.19) il découle :

$$a = \frac{I_0}{m(l_0 - a)}; \tag{124.20}$$

le centre d'oscillation du pendule retourné d'après (124.19) sera situé à la distance

$$l_0' = \frac{I_0}{m(l_0 - a)} + l_0 - a. \tag{124.21}$$

En s'appuyant sur (124.20), on trouve que $l_0 = l_0'$.

La formule (124.19) montre également que si $\frac{I_0}{ma}$ est infiniment petit par rapport à a le pendule composé se rapproche du pendule simple pour lequel $I_0 = 0$.

Connaissant avec précision la longueur l_0 et déterminant la période des oscillations avec une montre, il est possible de mesurer g pour un lieu donné. C'est par cette méthode qu'ont été effectuées les mesures les plus précises de la pesanteur et déterminées ses variations en différents points de la surface terrestre. Au moyen de ces mesures de g, on détermine les variations locales de la densité de l'écorce terrestre et, sur cette base, on apprécie les roches gisant en profondeur (prospection gravimétrique des minéraux).

Etudions maintenant les *oscillations propres d'un solide suspendu à un ressort élastique* (fig. 348, *a*). Après l'écart du solide de la position d'équilibre, il accomplira des oscillations harmoniques dans le sens vertical, si le ressort élastique subit des déformations proportionnelles à l'allongement du ressort. La force de déformation F du ressort est représentée sur le graphique en fonction de la grandeur de l'allongement Δl par la droite $F = k\Delta l$ (fig. 348, *b*). Sous l'action

de la force mg le ressort s'allonge de la grandeur Δl_0, ou en état d'équilibre le ressort aura la déformation Δl_0. L'écart du solide de la position d'équilibre sera désigné par x, l'écart vers le bas étant considéré comme positif. Pour un écart du solide de la grandeur x,

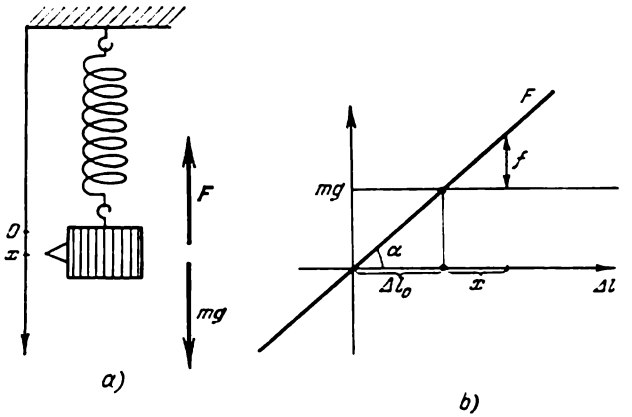


Fig. 348

ce dernier sera soumis à la force de rappel $f = kx$, égale à la différence entre la force de déformation et la pesanteur.

L'équation du mouvement du solide de masse m sera à peu près la même que celle des petites oscillations du pendule, à savoir:

$$m\ddot{x} = -f = -kx, \tag{124.22}$$

où k est le coefficient de rigidité (voir § 31). La solution de l'équation (124.22) est également un mouvement harmonique:

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi\right). \tag{124.23}$$

La période des oscillations est

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{124.24}$$

et la pulsation propre

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{124.25}$$

La pulsation est égale à la racine carrée du rapport du coefficient de rigidité k à la masse du solide m. Avec l'élévation de la rigidité du ressort, la pulsation augmente et avec l'accroissement de la masse, la pulsation propre diminue. Notons que la pesanteur n'exerce aucune influence sur le mode des oscillations du solide sur le ressort, la période des oscillations ne variera pas si le ressort est placé

horizontalement, les déplacements du solide s'effectuant sans frottement.

Le solide suspendu à un ressort oscillera donc de façon identique en tout point de la surface terrestre et, même si on le transporte sur une autre planète, etc. Le mode des oscillations propres est indépendant de la pesanteur constante qui agit sur le corps et n'est fonction que de la force de rappel variable du ressort.

§ 125. OSCILLATIONS PROPRES ET VARIATION DE L'ÉNERGIE AU COURS DES OSCILLATIONS

Confrontant les exemples étudiés (oscillations des pendules simple et composé pour des petits écarts, oscillations du solide suspendu à un ressort), comme des exemples analogues, il est possible d'en tirer une conclusion : les *oscillations harmoniques propres* s'effectuent

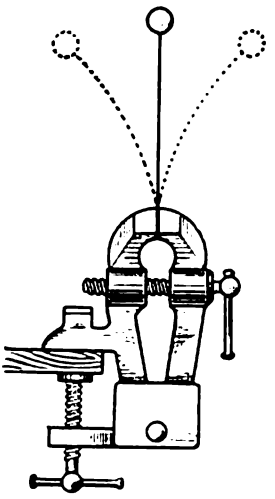


Fig. 349

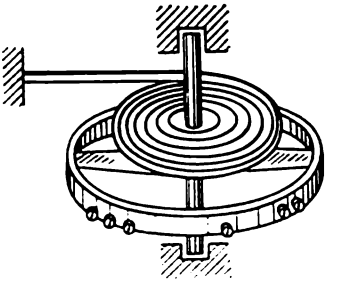


Fig. 350

toujours autour de la position d'équilibre stable, quand la force de rappel est *proportionnelle* à l'écart du corps oscillant de la position d'équilibre.

Les oscillations propres ou libres se rencontrent fort souvent; outre les exemples cités, on peut encore mentionner les oscillations d'un aéromètre plongé dans un liquide, les vibrations d'une masse fixée à une tige serrée dans un étau (fig. 349), les oscillations du pendule à ressort d'une montre de poche (fig. 350), etc.

Les oscillations harmoniques libres se déclenchent après que l'équilibre du corps soit rompu, à la suite qu'on lui ait communiqué

au moyen d'une certaine impulsion une vitesse initiale, ou après qu'on ait réalisé l'un et l'autre simultanément, c'est-à-dire une fois que l'*état d'équilibre* est rompu. Si le système est sans frottement, les oscillations une fois déclenchées se prolongeront aussi longtemps que l'on veut. Autrement dit, à l'instant origine, au système, qui se trouvait en état d'équilibre, a été communiquée une réserve d'énergie qui, en l'absence de frottement, se conserve invariable dans le système sous forme d'énergie d'oscillations.

Donc, selon la loi de conservation de l'énergie, au cas d'oscillations harmoniques l'*énergie totale* reste constante, mais les énergies

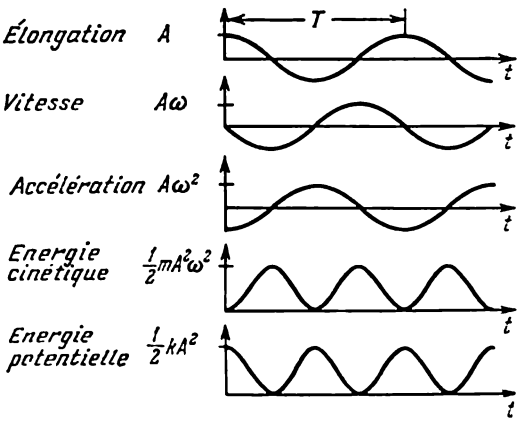


Fig 351

cinétique et potentielle, chacune de son côté, effectuent des oscillations dans le temps. A l'instant où le corps oscillant atteint sa position extrême et a une vitesse nulle, toute l'énergie est *potentielle*, l'énergie cinétique étant nulle. Quand le corps passe par la position d'équilibre, toute l'énergie est *cinétique*, l'énergie potentielle s'annulant (évidemment, s'il est connu d'avance que l'énergie potentielle dans la position d'équilibre est supposée nulle). Comme le corps, durant la période des oscillations, repasse deux fois par la position d'équilibre, la période des oscillations de l'énergie cinétique est deux fois moindre que celle des oscillations du corps. Une période d'oscillation identique possède, également, l'énergie potentielle. On a représenté sur la figure 351 les variations dans le temps de toutes les grandeurs caractéristiques de l'oscillation.

La loi de conservation de l'énergie permet de façon simple d'obtenir la pulsation propre (ou la période) des oscillations. Soit un corps de masse m en oscillation harmonique

$$x = A \sin \omega t.$$

La vitesse est alors

$$\dot{x} = \omega A \cos \omega t.$$

La vitesse prend la valeur maximale, égale à ωA (valeur de l'amplitude de la vitesse), aux instants où le corps passe par la position d'équilibre. L'énergie totale à cet instant est égale à l'énergie cinétique, ou

$$E_{\text{tot}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \qquad (125.1)$$

Après un quart de période, quand le corps atteint sa position extrême ($x = A$ et la vitesse $\dot{x} = 0$), l'énergie totale sera égale à l'énergie potentielle. Dans des oscillations horizontales du corps attaché au ressort, l'énergie potentielle sera [1] $\frac{kx^2}{2}$, et par suite,

$$E_{\text{tot}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}. \qquad (125.2)$$

Comparant (125.1) et (125.2), on obtient la formule (124.25) définissant la pulsation propre : $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Une telle détermination de la pulsation des oscillations sur la base de la confrontation des énergies cinétique et potentielle fournit une méthode qui s'avère la plus simple. Montrons-le sur des exemples.

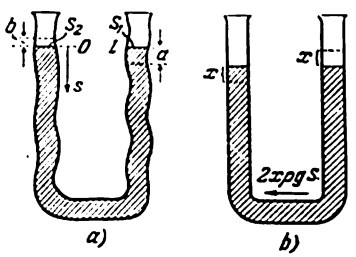


Fig. 352

Exemple 1. Trouver la pulsation des oscillations d'un liquide dans des vases communicants de forme irrégulière (fig. 352, *a*). Dans des vases de forme cylindrique à section constante (fig. 352, *b*) la pulsation propre des oscillations s'obtient très simplement. L'écart des niveaux du liquide de la position d'équilibre d'une grandeur x engendre l'action de la pesanteur sur le liquide de la part de la portion non équilibrée $2x\rho\, gS$ et cette force de rappel met en mouvement toute la masse du liquide $\rho\, Sl$, où l est la longueur de la colonne entière du liquide dans le vase, ρ la densité du liquide et S la section droite du vase. Comme toutes les particules liquides subissent un même déplacement x, l'équation du mouvement du liquide prend la forme

$$\rho\, S l \ddot{x} = -2x\rho\, gS\,;$$

simplifiant par ρS, il vient

$$\ddot{x} + \frac{2g}{l} x = 0. \qquad (125.3)$$

D'où l'on tire la pulsation qui est

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}. \qquad (125.4)$$

[1] L'expression de l'énergie potentielle d'un ressort déformé, voir au § 31.

Mais si les vases communicants sont de forme irrégulière, le déplacement des différentes particules n'est plus le même au cours des oscillations, ne peut-on établir l'équation (125.3) aussi simplement.

Pour l'analyse des oscillations libres dans des vases communicants de forme irrégulière (voir fig. 352, *a*), il vaut mieux utiliser la loi de conservation de l'énergie, en supposant que toute la masse du liquide subit de très petites oscillations harmoniques de pulsation unique ω, la grandeur du déplacement étant fonction de la section transversale du vase. Aux endroits où le vase s'élargit le déplacement est plus grand qu'aux endroits où il se rétrécit. Supposons que la section transversale S du filet est une fonction connue de la distance s le long de l'axe du filet liquide. La forme du filet liquide est définie par la fonction $S(s)$. Le long de tout le segment l occupé par le liquide la masse du liquide versé est $m = \int \rho\, S ds$, où ρ est la densité du liquide. Les oscillations sont si faibles que la section droite du filet sur une double amplitude des oscillations peut être considérée comme constante. Donc, si S_1 et S_2 sont les sections des surfaces libres, respectivement des tubes droit et gauche, on a

$$S_1 a = S_2 b, \tag{125.5}$$

où a est l'amplitude des oscillations dans le coude droit et b, dans le coude gauche. Supposons que le zéro de la coordonnée s soit choisi dans le plan de la surface libre du tube de gauche, tandis que la surface libre dans le coude de droite se trouve toujours pour la coordonnée $s = l$ en équilibre. Dans ce cas A, qui est l'amplitude des oscillations dans la section de coordonnée s et d'aire $S(s)$, s'obtient de la condition

$$aS_1 = AS;$$

d'où l'on tire que l'amplitude des oscillations de la vitesse dans la section de coordonnée s est

$$v = \omega A = \omega a \frac{S_1}{S}.$$

L'énergie cinétique du liquide, à l'instant où les particules liquides dépassent la position d'équilibre, est égale à l'énergie totale:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}} = \int_0^l \frac{\rho S\, ds v^2}{2} = \frac{\rho \omega^2 a^2 S_1^2}{2} \int_0^l \frac{ds}{S}. \tag{125.6}$$

Au bout d'un quart de période, toute l'énergie devient potentielle et égale au travail qu'il faut dépenser pour élever le volume du liquide $S_1 a = S_2 b$ à la hauteur

$$\frac{a+b}{2}$$

(voir fig. 352, *a*). En effet, l'écart du liquide de l'état d'équilibre peut se concevoir ainsi: toutes les particules sont restées à leurs places et seul le volume $S_1 a$ a pris la place de $S_2 b$. Donc, l'énergie potentielle est

$$E_{\text{pot}} = \rho S_1 a \frac{a+b}{2} g;$$

d'après (125.5) $b = \frac{S_1}{S_2} a$, donc

$$E_{\text{pot}} = \frac{\rho S_1 a^2 g}{2} \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right), \tag{125.7}$$

Egalant (125.6) et (125.7), il vient

$$\frac{\rho\omega^2 a^2 S_1^2}{2}\int_0^l \frac{ds}{S}=\frac{\rho S_1 a^2 g}{2}\left(1+\frac{S_1}{S_2}\right),$$

ou

$$\omega^2=\frac{g\left(1+\frac{S_1}{S_2}\right)}{S_1\int_0^l \frac{ds}{S}}; \tag{125.8}$$

pour S = const cette expression prend la forme ordinaire de la formule (125.4) donnant la pulsation des oscillations dans un vase à section constante.

Exemple 2. Trouver la pulsation propre des oscillations d'un corps suspendu à un ressort élastique pesant. Si le poids du ressort est de l'ordre de celui du corps (voir fig. 348, *a*), la période des oscillations libres ne peut plus être déterminée d'après la formule (124.24), qui a été déduite en supposant la masse du ressort nulle. Une valeur plus précise de la période pour un ressort homogène peut se déterminer sur la base de la loi de conservation de l'énergie. Supposons que le corps effectue des petites oscillations libres de pulsation ω et d'amplitude a; chaque boucle du ressort, se trouvant en état de repos à la distance y du point de suspension, possède alors une amplitude d'oscillation

$$A=\frac{y}{l}a,$$

où l est la longueur du ressort entier en état de repos. Soit N le nombre de boucles du ressort, l'amplitude de l'i-ème boucle (le compte se fait à partir du point de suspension) est alors

$$A_i=\frac{ia}{N}.$$

L'énergie cinétique du ressort, quand le corps dépasse la position d'équilibre est

$$E^0_{\text{cin}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_{\text{res}}}{N}\omega^2 A_i^2=$$

$$=\frac{m_{\text{res}}}{2N}\frac{\omega^2 a^2}{N^2}\sum_{i=1}^{N} i^2=\frac{m_{\text{res}}\omega^2 a^2}{2N^3}\,\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, \tag{125.9}$$

où m_{res} est la masse du ressort.

Si $N \gg 1$,

$$E^0_{\text{cin}}\approx\frac{1}{2}\frac{m_{\text{res}}}{3}\omega^2 a^2,$$

et toute l'énergie cinétique, c'est-à-dire l'énergie du corps et du ressort, sera

$$E_{\text{cin}}=\frac{1}{2}ma^2\omega^2+\frac{1}{2}\frac{m_{\text{res}}}{3}a^2\omega^2=\frac{1}{2}\left(m+\frac{m_{\text{res}}}{3}\right)a^2\omega^2.$$

L'énergie potentielle au moment de l'extension maximale est

$$E_{\text{pot}}=\frac{ka^2}{2},$$

où k est le coefficient de rigidité du ressort. De l'égalité $E_{pot} = E_{cin}$, on tire

$$ka^2 = \left(m + \frac{m_{res}}{3}\right) a^2\omega^2,$$

ou

$$\omega^2 = \frac{k}{m + \frac{m_{res}}{3}}. \tag{125.10}$$

Donc, pour une détermination plus précise de la période d'oscillation du corps suspendu à un ressort, il faut ajouter à la masse du corps encore 1/3 de la masse du ressort. Il va de soi que si la masse du ressort est très petite par rapport à la masse du corps, cette nouvelle détermination ne se traduira pas par un nouveau résultat. Si le nombre de boucles du ressort est faible, il faut, pour la détermination de la pulsation, se servir de la formule (125.9).

Il est toujours plus facile de déterminer la pulsation par la méthode de comparaison des énergies, si au cours des oscillations les amplitudes des différents points ne sont pas les mêmes, tout en étant liées par une relation déterminée qui permet de trouver de façon univoque les amplitudes de tous les autres points connaissant l'amplitude d'un point.

Comme on le verra par la suite, la grandeur de la pulsation propre du système accomplissant ses propres oscillations harmoniques joue un rôle essentiel dans nombre de phénomènes ; il faut donc toujours la déterminer de façon correcte.

§ 126. OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES

Comme il découle des expériences les plus simples avec les oscillations harmoniques (oscillations du pendule, oscillations de l'aéromètre flottant dans un liquide, etc.), les oscillations amorcées à la suite d'une secousse s'affaiblissent peu à peu et s'amortissent. En fin de compte le corps oscillant atteint un état de repos. C'est la conséquence du fait que dans tout mouvement de corps quelconque apparaissent des forces de frottement, et l'énergie mécanique communiquée par l'ébranlement initial des vibrations se transforme peu à peu en chaleur.

Les forces de frottement sont liées de façon compliquée à la vitesse, mais pour des oscillations, dont la vitesse est petite en valeur absolue, on peut estimer avec un degré de précision suffisant que les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse du mouvement (voir § 39). Par suite l'équation du mouvement dans les oscillations du corps lié à un ressort, décrites au § 124, aura la forme:

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}, \tag{126.1}$$

où $h\dot{x}$ est la force de frottement et h le coefficient de frottement qui est une grandeur constante. La solution de (126.1) peut s'écrire

sous la forme

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_1 t + \varphi), \tag{126.2}$$

où A et φ sont des constantes dépendant des conditions initiales

$$\delta = \frac{h}{2m} \tag{126.3}$$

et

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}. \tag{126.4}$$

Le mouvement se présente comme un produit d'une fonction exponentielle (amortie) $e^{-\delta t}$ par une fonction périodique $\cos(\omega_1 t + \varphi)$, dont la période est

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

Cette grandeur est quelquefois appelée *pseudo-période des oscillations amorties* (126.2).

Le mouvement est une oscillation « sinusoïdale amortie », comme c'est montré sur la figure 353. Les oscillations s'affaiblissent peu

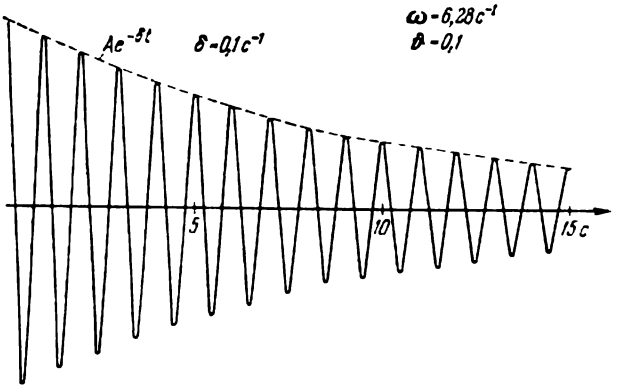


Fig. 353

à peu dans le temps et l'enveloppe du graphique des oscillations ne sort pas des limites des courbes $\pm Ae^{-\delta t}$. Le coefficient $\delta = \frac{h}{2m}$, caractérisant la rapidité de l'amortissement dans le temps, est appelé *coefficient d'amortissement*. Il est défini par le rapport du coefficient de frottement à la double grandeur de la masse oscillante.

Prenons des pendules dont les sphères sont de même volume, mais de masse différente (par exemple, des sphères en plomb et en liège) et enregistrons le temps mis à la diminution de l'amplitude d'un nombre déterminé de fois. La masse de la sphère en plomb étant d'environ 50 fois plus grande que celle de la sphère en liège, le coefficient d'amortissement de cette dernière sera environ 50 fois supérieur au coefficient de la sphère en plomb. Le temps mis à l'amor-

tissement des oscillations, par exemple de deux fois, sera donc pour la sphère en plomb de 50 fois plus grand que pour le pendule avec une sphère en liège.

Tous les phénomènes du type (126.2) s'amorcent à un certain moment et durent théoriquement très longtemps. C'est pourquoi, pour permettre d'évaluer la durée de ces phénomènes, on a introduit par convention la grandeur $\tau = \frac{1}{\delta}$ dont la dimension est celle du temps et qu'on a appelée *temps de relaxation*. Durant la relaxation τ l'écartement de la position d'équilibre diminuera dans le système de $e \approx 2{,}73$ fois. Le temps de relaxation est conventionnellement appelé « durée » de ce phénomène.

Par lui-même, le coefficient d'amortissement δ (de même que le temps de relaxation) ne caractérise pas l'oscillateur. Suivant la période, durant le même temps τ, des oscillateurs différents effectuent un nombre différent d'oscillations. Aussi pour définir l'amortissement d'un système en fonction du nombre d'oscillations utilise-t-on non pas le coefficient d'amortissement, mais le *décrément* (ou le décrément logarithmique), qui est une grandeur sans dimension égale à

$$\vartheta = \frac{T}{\tau} = \delta T.$$

T est ici la pseudo-période de l'oscillation amortie.

L'inverse du décrément

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{\tau}{T} = N$$

indique le nombre d'oscillations effectué par l'oscillateur avant d'atteindre une amplitude de e fois inférieure, ou, comme il est conventionnellement admis, avant qu'il ne s'amortisse et ne reprenne la position d'équilibre. Supposons que le décrément est égal à 1/10, cela revient à dire qu'au bout de 10 oscillations leur amplitude décroîtra presque de trois fois.

On détermine le décrément expérimentalement de la façon suivante.

Si à un certain instant l'écart était x_1, après le temps T_1, égal à la pseudo-période, l'écart atteindra la grandeur

$$x_2 = x_1 e^{-\delta T_1}.$$

En effet,

$$x_1 = Ae^{-\delta t_1} \cos(\omega_1 t_1 + \varphi),$$

$$x_2 = Ae^{-\delta t_1 - \delta T_1} \cos(\omega_1 t_1 + \varphi + 2\pi) = x_1 e^{-\delta T_1},$$

car

$$\omega_1 (t_1 + T_1) = \omega_1 t_1 + \omega_1 T_1 = \omega_1 t_1 + 2\pi.$$

Puisque $\vartheta = \delta T_1$, le rapport des écarts est

$$\frac{x_2}{x_1} = e^{-\vartheta},$$

ou

$$\operatorname{Log} \frac{x_1}{x_2} = \vartheta. \tag{126.5}$$

C'est pour cette raison que la grandeur ϑ est appelée *décrément logarithmique*. Notons que chaque écart suivant du même côté se produit après le temps T_1 et, par suite, le *décrément est égal au logarithme naturel du rapport de grandeurs de deux écarts extrêmes consécutifs du même côté*.

Soit x_N l'écart s'étant produit après le temps NT_1, c'est-à-dire après N oscillations suivant l'écart x_1. En raisonnant comme plus haut, on obtient

$$\frac{x_N}{x_1} = e^{-N\vartheta}$$

et

$$\operatorname{Log} \frac{x_1}{x_N} = N\vartheta, \quad \text{ou} \quad \vartheta = \frac{1}{N} \operatorname{Log} \frac{x_1}{x_N}. \tag{126.6}$$

La courbe expérimentale de l'enregistrement des oscillations du pendule, composé d'une sphère suspendue à un fil, est donnée sur

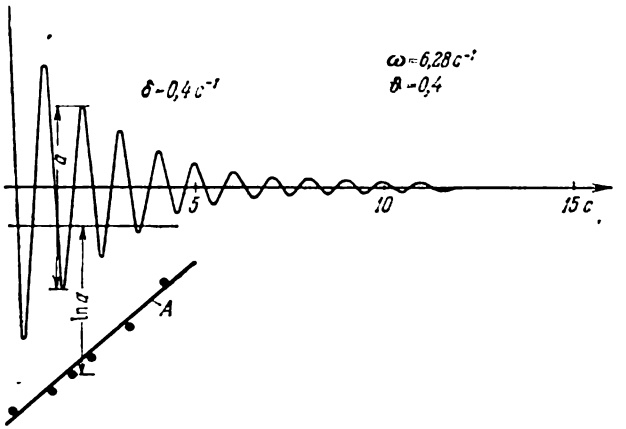


Fig. 354

la figure 353. Sur la base de ce graphique, on peut calculer le décrément d'amortissement; il est égal à 0,1. Le décrément d'amortissement du pendule de même longueur et dont la sphère possède un diamètre identique mais une masse quatre fois plus petite aura pour grandeur 0,4; la courbe enregistrant ses oscillations est donnée sur la figure 354. Les valeurs des coefficients d'amortissement sont indiquées sur les figures 353 et 354.

Les enregistrements des oscillations amorties nous permettent de justifier les hypothèses avancées dans la déduction de la formu-

le (126.2). Le plus simple est de procéder ainsi : sur le graphique enregistrant les oscillations, on porte pour chaque période sur l'axe des ordonnées des segments proportionnels aux logarithmes des grandeurs des amplitudes d'oscillations et on joint par une ligne les extrémités de ces segments. On a tracé, par exemple, pour les oscillations montrées à la figure 354 cette ligne logarithmique ;

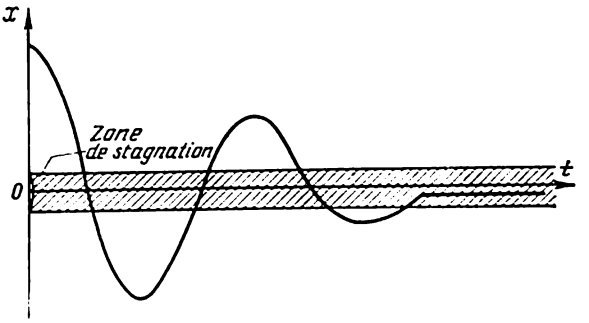


Fig. 355

c'est la droite A menée par les points marquant les extrêmités des segments portés vers le bas à partir d'une certaine origine.

Si tous les points de la ligne A sont alignés, on peut dire que les hypothèses théoriques, sur la base desquelles a été déduite la loi des oscillations amorties (126.2) sont vraies. La masse du corps oscillant reste constante, la proportionnalité de la force de rappel à l'écart de la position d'équilibre se vérifie facilement dans l'expérience ; généralement seul reste non éclairci le problème des frottements. Aussi, si les points de la ligne A ne se trouvent pas sur une même droite estime-t-on que durant les oscillations la force de frottement n'est pas proportionnelle à la vitesse et obéit à une autre loi beaucoup plus compliquée. Si les points sont alignés sur la droite A, on peut déterminer le décrément d'après son inclinaison par rapport à l'axe des x.

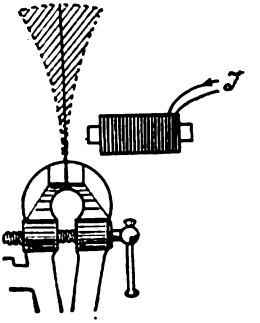


Fig. 356

Si au cours des oscillations il se produit un glissement d'un corps sur la surface non graissée d'un autre corps, la nature des oscillations est alors fortement influencée par la force du frottement sec. Le frottement sec est une force presque constante en grandeur et il est dirigé dans le sens opposé à la vitesse. On a montré sur la figure 355 la courbe enregistrant les oscillations au cas où le frottement sec surpasse le frottement visqueux qui est proportionnel à la vitesse. On a hachuré sur ce dessin la « zone de stagnation » ; l'écart

du corps dans la région de stagnation fait intervenir une force de rappel qui est inférieure à la force de frottement et, partant, cet écart dans la zone de stagnation n'amorce aucune oscillation, le corps reste au repos dans la position écartée.

§ 127. OSCILLATIONS FORCÉES ET RÉSONANCE

A la différence des oscillations libres, les *oscillations forcées* sont l'effet d'une action périodique extérieure. Par exemple, si on approche d'une lame serrée dans un étau (fig. 356) un électro-aimant dont l'enroulement est alimenté par le courant alternatif J de fréquence déterminée, on observera alors directement (d'après le son émis ou d'après les oscillations sur un écran du rayon de lumière réfléchi par un miroir fixé sur la lame) l'existence des oscillations de la lame. Ces oscillations seront des oscillations forcées.

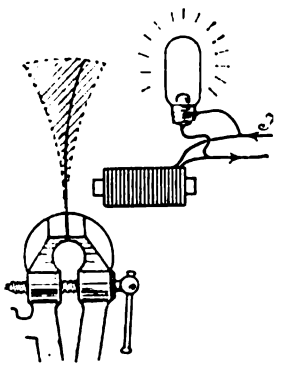


Fig. 357

Les oscillations forcées s'effectuent toujours avec la pulsation qui fait varier la force extérieure. Si on modifie la fréquence du courant alimentant l'électro-aimant, on modifie également la fréquence des oscillations de la lame. Il est facile de se convaincre au moyen d'un stroboscope que la fréquence des oscillations du courant est la même que celle de la lame vibrante.

Pour monter un stroboscope, il suffit de prendre une lampe au néon (ou une autre lampe à décharge) dont l'intensité de la lumière vibre en concordance avec les oscillations du courant électrique J qui l'alimente et, à la lumière de cette lampe, procéder à l'observation des vibrations de la lame (fig. 357). Comme la lame ne sera éclairée qu'une fois par période et chaque fois dans la même position, par suite de l'inertie de la perception visuelle, on verra la lame au repos et non pas en mouvement. Si les oscillations de la lame et du courant n'étaient pas synchrones, c'est-à-dire si elles s'effectuaient avec des fréquences différentes, on apercevrait une image floue de la lame, rappelant celle observée à la lumière ordinaire.

Les oscillations forcées se rencontrent souvent là où on se trouve en présence des organes de machines tournants ou animés de mouvements périodiques. Par exemple, le mouvement de rotation uniforme du volant (fig. 358) engendre toujours des variations forcées de l'arbre et des paliers supportant l'arbre tournant. En effet, il y a toujours un faible déséquilibre, c'est-à-dire que le centre de gravité O' du volant n'est pas situé exactement sur l'axe passant par le centre des

paliers. Il s'ensuit une force centrifuge [1] $F = m\rho\omega^2$ dont la projection, par exemple sur l'horizontale, engendre une force harmonique agissant sur l'arbre avec la fréquence égale à la fréquence des révolutions (ρ est ici la distance OO' entre le centre de gravité du volant et l'axe des paliers, m la masse du volant et ω la vitesse angulaire de rotation ou pulsation).

Les vibrations des fondations et des installations contiguës pendant le fonctionnement d'un moteur électrique constituent des

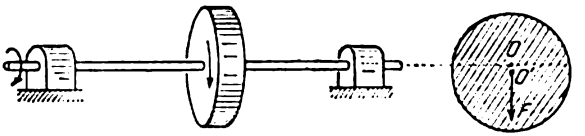


Fig. 358

oscillations forcées, engendrées par le déséquilibre du rotor du moteur. L'agitation provoquée par le fonctionnement du moteur à combustion interne, de la machine à vapeur est également des oscillations forcées. Le mouvement périodique de va-et-vient, tel le mouvement du piston dans un moteur à combustion interne, est toujours une source de force périodique entraînant des vibrations.

L'amplitude des oscillations forcées ne dépend pas seulement (et surtout) de la grandeur de la force agissante, mais aussi de sa pulsation. L'amplitude des oscillations forcées augmente fortement, quand la fréquence de la force extérieure est *proche* de celle des oscillations propres.

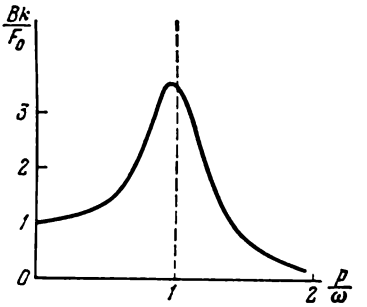


Fig. 359

Modifions par paliers la pulsation de la force extérieure en conservant l'amplitude de cette force invariable et chaque fois enregistrons l'amplitude des oscillations forcées. Portons les résultats de ces variations sur un graphique : sur l'axe des abscisses portons le rapport de l'action extérieure p à la pulsation ω des oscillations propres et sur l'axe des ordonnées, la grandeur sans dimension proportionnelle à l'amplitude B des oscillations forcées (voir § 128). Ce graphique porte le nom de *courbe de résonance* dont l'allure approximative est donnée à la figure 359.

[1] On appelle ici force centrifuge la force qui s'exerce sur l'arbre en s'opposant à la force centripète (selon la troisième loi de la dynamique).

Le phénomène d'accroissement rapide de l'amplitude des oscillations, dans les cas où la pulsation extérieure se rapproche de la pulsation propre, est appelé *résonance*. Posons un petit moteur électrique sur une planche encastrée à un bout dans le mur (fig. 360) et élevons progressivement la pulsation des rotations du moteur au moyen d'un rhéostat. Pour de faibles rotations, on constate que l'oscillation de la planche est insignifiante, elle n'est ressentie qu'au toucher en approchant doucement le doigt de la planche. Ensuite, pour un nombre de tours déterminé, l'amplitude des oscillations verticales de la planche augmente brusquement et devient sensible à l'œil. En continuant d'augmenter le nombre de tours du moteur,

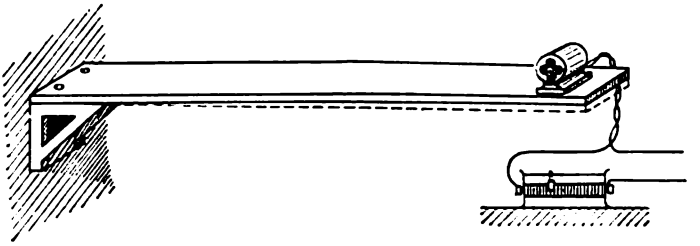


Fig. 360

on constate une diminution de l'amplitude des oscillations qui deviennent invisibles et seul un faible tremblotement est ressenti par le doigt. On marque le nombre de tours pour lequel il y a résonance. Puis, on arrête le moteur, on lui porte un coup de haut en bas, déclenchant ainsi les oscillations propres de la planche avec le moteur, et on constate que la fréquence de ces oscillations est proche de celle de la résonance.

Il faut noter que dans l'exemple décrit, l'amplitude de la force extérieure ne reste pas constante, mais croît proportionnellement au carré du nombre de tours par seconde, car la source de la force extérieure est une force centrifuge dont la grandeur croît proportionnellement au nombre de tours par seconde. Néanmoins, l'amplitude des vibrations de la planche chute brusquement avec l'augmentation de la pulsation de la rotation au-dessus de la pulsation propre, ou de résonance.

§ 128. DÉPENDANCE ENTRE L'AMPLITUDE DES OSCILLATIONS FORCÉES ET LA PULSATION

Quelle est donc la raison de cet accroissement de l'amplitude à la résonance?

En résonance, le système effectue en quelque sorte des oscillations propres, la force extérieure ne faisant qu'exciter le corps vibrant.

La force de rappel, en résonance comme au cas des oscillations propres, imprime à la masse l'accélération exigée, tandis que la force extérieure ne fait qu'équilibrer la force de frottement. Loin de la résonance, la force extérieure équilibre non pas seulement la force de frottement et, par suite, les vibrations sont plus faibles. Ainsi, par exemple, si la pulsation des oscillations de la force extérieure est très petite devant la pulsation propre, cette force extérieure sera pratiquement équilibrée par la force élastique du ressort, autrement dit la force extérieure détend et comprime le ressort en mesure avec ses propres variations. Mais l'image globale devient plus nette après l'étude théorique des oscillations imposées par une force extérieure harmonique.

Supposons que sur la masse d'un pendule agit dans le sens horizontal une force harmonique extérieure $F = F_0 \cos pt$, où F_0 est l'amplitude de la force, et p sa pulsation. Alors à la force de rappel $-mg\frac{x}{l}$ (voir (124.6)) et à la force de frottement $-h\dot{x}$ (voir (126.1)) s'ajoute encore la force F et l'équation du mouvement de la masse du pendule pour de petits angles de déviation prend la forme

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}x - h\dot{x} + F_0 \cos pt^1. \tag{128.1}$$

Si, comme auparavant, on désigne le coefficient d'amortissement $\frac{h}{2m}$ par δ et la pulsation propre $\sqrt{\frac{g}{l}}$ par ω, l'équation du mouvement prendra la forme

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\cos pt. \tag{128.2}$$

On constate par expérience que les oscillations du pendule s'effectuent avec la pulsation p. Supposons que les variations de l'élongation ont une amplitude B et une phase initiale φ. Les variations de l'élongation x peuvent s'écrire ainsi :

$$x = B\cos(pt + \varphi). \tag{128.3}$$

Il s'agit de trouver la grandeur des oscillations forcées B et ainsi que sa phase initiale φ. Portons (128.3) dans (128.2) en dérivant au préalable (128.3) ; il vient alors

$$B\{(\omega^2 - p^2)\cos(pt + \varphi) - 2p\delta\sin(pt + \varphi)\} = \frac{F_0}{m}\cos pt.$$

---

[1] Notons que cette équation est aussi vraie pour des oscillations forcées de la masse liée par l'intermédiaire d'un ressort, dont les oscillations propres sont traduites par l'équation (126.1), à cette différence qu'au lieu de la force de rappel $-\frac{mg}{l}x$ on aura dans l'équation de la masse la force de rappel du ressort $-kx$.

Transformons cette expression suivant les règles trigonométriques connues :

$$\left\{B\left[(\omega^2-p^2)\cos\varphi-2p\delta\sin\varphi\right]-\frac{F}{m_0}\right\}\cos pt+$$
$$+B\left[-(\omega^2-p^2)\sin\varphi-2p\delta\cos\varphi\right]\sin pt=0. \qquad (128.4)$$

Cette expression est la somme de deux termes harmoniques :

$$a\cos pt+b\sin pt=0, \qquad (128.5)$$

où a et b sont des grandeurs constantes dans le temps. Il est évident que la dernière égalité n'est satisfaite pour tout t que dans le cas où les deux grandeurs a et b sont nulles. Il s'ensuit donc de (128.4) :

$$B\left[(\omega^2-p^2)\cos\varphi-2\delta p\sin\varphi\right]=\frac{F_0}{m}, \qquad (128.6)$$
$$(\omega^2-p^2)\sin\varphi+2\delta p\cos\varphi=0.$$

Ces deux équations permettent de déterminer B et φ. La grandeur de la phase φ s'obtient aussitôt de la seconde équation :

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{2\delta p}{p^2-\omega^2}. \qquad (128.7)$$

Divisons la première équation de (128.6) par B, puis multiplions-la par $\sin\varphi$, ensuite multiplions la seconde équation par $\cos\varphi$; en soustrayant l'une de l'autre, il vient

$$\frac{F_0}{mB}\sin\varphi=-2\delta p. \qquad (128.8)$$

Portant $\sin\varphi=-\frac{2\delta pmB}{F_0}$ dans la seconde équation de (128.6), il vient alors

$$\cos\varphi=\frac{mB}{F_0}(\omega^2-p^2). \qquad (128.9)$$

Elevons au carré les égalités (128.8) et (128.9) et additionnons-les

$$\frac{m^2B^2}{F_0^2}(\omega^2-p^2)^2+\frac{4\delta^2p^2m^2B^2}{F_0^2}=1. \qquad (128.10)$$

Transformant cette dernière égalité, on obtient l'expression définitive de l'amplitude des oscillations forcées :

$$B=\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4\delta^2p^2}}. \qquad (128.11)$$

Cette formule montre que l'amplitude des oscillations forcées est toujours proportionnelle à l'amplitude de la force appliquée F_0, de plus il y a une dépendance compliquée de la pulsation. Si la grandeur de l'amortissement est petite (δ est petit par rapport à ω)

la racine carrée du dénominateur de (128.11) aura un minimum quelque part près de la valeur $p = \omega$ et, par suite, pour des pulsations p proches de ω l'amplitude des oscillations B prendra une valeur maximale.

Si la masse est soumise à une force constante F_0, elle s'écartera de la position d'équilibre de la grandeur B_{st}. L'élongation B_{st} s'obtient de l'égalité

$$\frac{mg}{l} B_{st} = F_0,$$

ou

$$B_{st} = \frac{F_0 l}{mg}. \tag{128.12}$$

On aboutit au même résultat pour $p = 0$ à partir de la formule (128.11), si l'on se souvient que la pulsation propre du pendule est $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Pour $p \to \infty$, c'est-à-dire pour une pulsation très grande, l'amplitude des oscillations tend vers zéro.

Examinons en détail comment varie en fonction de la pulsation p le rapport entre les différentes forces intervenant dans des oscillations forcées; cela nous permettra d'éclaircir les raisons de la variation de l'amplitude d'oscillations avec la variation de la pulsation.

L'équation (128.1) exprime que le produit de « la masse par l'accélération » est égal à la somme de trois forces: force de rappel, force de frottement et force extérieure. Pour des oscillations forcées, les trois forces effectuent des oscillations harmoniques de pulsation p.

Récrivons la relation fondamentale entre les forces (128.4) ainsi:

$$\underbrace{mB(\omega^2 - p^2)\cos(pt + \varphi)}_{\text{« force conservative »}} - \underbrace{2\delta pmB \sin(pt + \varphi)}_{\text{force de frottement}} = \underbrace{F_0 \cos pt}_{\text{force extérieure}}. \tag{128.13}$$

La force de rappel $\left(\frac{mg}{l} B \cos(pt + \varphi)\right.$, qui peut s'écrire sous la forme $m\omega^2 B \cos(pt + \varphi)$, car $\left.\omega^2 = \frac{g}{l}\right)$ plus le produit de la masse du corps par l'accélération $(m\ddot{x} = -mp^2 B \cos(pt + \varphi))$ sera appelée « force conservative ». Il est facile de vérifier que le travail de cette force durant la période est nul. Le second terme est la force de frottement. Donc l'équation (128.12) montre que la force extérieure F est équilibrée par la force de frottement et la force conservative.

Pour de très petites pulsations ($p \to 0$) la force de frottement et le produit de la masse par l'accélération sont très petits et, par suite, la force extérieure $F_0 \cos pt$ n'est équilibrée que par la force de rappel $mB\omega^2 \cos(pt + \varphi)$ et donc $\varphi = 0$. Aux petites pulsations, la

force extérieure est en phase avec l'élongation et le système oscille de façon comme si seule agissait la force de rappel, tandis que la masse et la force de frottement avaient disparu.

A de très grandes pulsations ($p \to \infty$) le rôle prépondérant revient au second terme de la force conservative $-mBp^2\cos(pt + \varphi)$. Le produit de la masse par l'accélération dépassera de beaucoup la force de rappel et la force de frottement. Seule la force extérieure détermine l'accélération, et, par suite, on peut écrire approximativement

$$-mBp^2 \cos(pt + \varphi) \approx F_0 \cos pt. \qquad (128.14)$$

D'où $\varphi \approx 180°$, et $B \approx \frac{F_0}{mp^2}$. Le même résultat est fourni par (128.11) pour $p \gg \omega$ et $p \gg \delta$. A une grande pulsation des oscillations, l'élongation et la force se trouvent en opposition de phase, et les oscillations s'effectuent comme si la force extérieure était appliquée à la masse libre m. A des grandes pulsations le rôle principal est joué par la masse et aux petites, par la force de rappel.

Quelle est alors la situation pour des pulsations moyennes de la force extérieure? Il est évident que pour $p = \omega$, la force conservative, c'est-à-dire le premier terme de (128.13), est toujours nulle et la force extérieure n'est équilibrée que par la force de frottement:

$$-hpB \sin(pt + \varphi) = F_0 \cos pt. \qquad (128.15)$$

Cette égalité n'est vérifiée (pour tout t) que pour $\varphi = -90°$, ou $x = B\cos(pt - 90°)$. Les oscillations de l'élongation pour $p = \omega$, en résonance, retardent toujours des oscillations de la force de 90°. En résonance, le rôle primordial revient à la force de frottement. Donc si l'on avait ignoré ce fait en éliminant la force de frottement et en posant $h = 0$, on aurait abouti à la conclusion: l'amplitude des oscillations B pour $p = \omega$ doit être égale à l'infini, ce qui est physiquement impossible. (Cela se déduit aussi bien de la formule (128.11) que de l'égalité (128.13) en posant $h = \delta = 0$ et $p = \omega$.) Toutefois, pour un frottement suffisamment faible, l'amplitude des oscillations en résonance sera très grande. D'après (128.13) pour $p = \omega$

$$B_{\text{rés}} = \frac{F_0}{2\delta m\omega} = \frac{F_0}{h\omega}. \qquad (128.16)$$

Aussi pour une faible valeur de h, l'amplitude d'oscillations en résonance peut-elle être très grande. Les oscillations de résonance de grande amplitude peuvent être très dangereuses pour les parties vibrantes des machines ou des constructions et provoquer quelquefois leur destruction.

On peut citer des exemples, quand des machines de très grande valeur étaient détruites par des oscillations de résonance, aussi les ingénieurs calculent-ils les pulsations propres des différents organes

de la machine de manière à éviter la résonance. Il est de même interdit aux pelotons de soldats de traverser les ponts au pas cadensé, afin de ne pas engendrer de résonance : on a déjà enregistré des cas de coïncidence de la fréquence des pas avec la fréquence propre du pont ayant entraîné sa destruction.

Le travail de la force extérieure durant la période des oscillations forcées est toujours égal au travail des forces de frottement durant le même temps ; le travail des autres forces est nul. Pendant les oscillations forcées permanentes le travail de la force extérieure est dépensé en chaleur.

L'amplitude des oscillations à des basses pulsations d'après (128.12) est approximativement égale à

$$B \approx B_{st} = \frac{F_0 l}{mg} = \frac{F_0}{k_0}, \qquad (128.17)$$

elle est déterminée par l'amplitude de la force extérieure F_0 comme par le coefficient de la force de rappel $k_0 = \frac{mg}{l}$ et ne dépend pas de la force de frottement. Dans des oscillations forcées du corps sur un ressort, la rigidité du ressort $k = k_0$[1] ne dépend pas de la masse m et, par suite, pour des basses pulsations l'amplitude B est indépendante de m.

A de hautes pulsations, l'amplitude des oscillations, d'après (128.14) est approximativement égale à

$$B \approx \frac{F_0}{mp^2}, \qquad (128.18)$$

c'est-à-dire est inversement proportionnelle à p^2 ; l'amplitude des oscillations dépend de la pulsation et de la masse et est presque indépendante de la force de rappel et du frottement.

En résonance, comme il a été mentionné (voir (128.16)), l'amplitude dépend du coefficient de frottement h et de la pulsation propre ω, elle est en raison inverse de $h\omega$.

Il est nécessaire de rappeler encore une fois que *l'amplitude des oscillations est toujours proportionnelle à l'amplitude de la force agissante.*

De la formule (128.7) il suit que le déphasage varie avec la pulsation à peu près de la façon montrée sur la figure 361. Pour des basses pulsations, l'élongation est en phase avec la force, en résonance, les oscillations de l'élongation retardent en phase de la force de 90°, à de très grandes pulsations, les oscillations de l'élongation et la force sont en opposition de phase. Tout cela s'accorde avec ce qui s'ensuit de l'étude du rôle de différentes forces intervenant dans les oscillations. Notons que tous les raisonnements ayant trait aux basses pulsations sont vrais quand $p \ll \omega$, c'est-à-dire quand la

[1] Voir la note se rapportant à l'équation (128.1).

pulsation des oscillations est de beaucoup inférieure à la pulsation propre; c'est également vrai pour les hautes pulsations, quand $p \gg \omega$; autrement dit, tous les phénomènes de résonance sont régis par le rapport entre p et ω.

Avec la diminution du frottement ou du coefficient d'amortissement δ, le pic de résonance (voir fig. 359) devient plus aigu, l'amplitude croissant fortement au voisinage de la résonance; au cas d'un

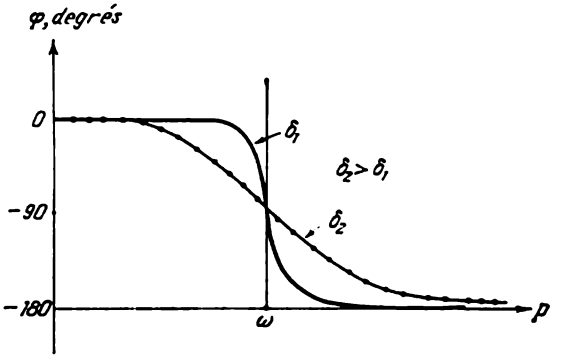


Fig. 361

faible amortissement la variation de phase des oscillations s'effectue également de façon brusque près de la pulsation de résonance (voir fig. 361).

On a étudié toutes les lois des oscillations forcées en s'appuyant sur l'exemple des oscillations du pendule. Il est évident qu'elles se justifieront pour tout système dont l'équation du mouvement peut être ramenée à la forme (128.2). Les oscillations du corps sur un ressort, de l'aéromètre plongé dans un liquide, du corps suspendu à un ressort (accomplissant des vibrations de torsion analogue au pendule de la montre de poche), etc. so ntdes exempl esd'oscillations forcées, si ces systèmes sont soumis à une force harmonique.

§ 129. VIBRATIONS DE L'ARBRE PORTANT UN DISQUE

Dans nombre de machines (par exemple, la turbine à vapeur le volant, le ventilateur, etc.) on a un arbre sur lequel tourne un disque; un modèle simple de disque tournant sur un arbre est représenté sur la figure 362. Sur une tringle verticale est monté un disque de rayon pas trop grand; le disque est toujours un peu déséquilibré, c'est-à-dire que son centre des masses ne se trouve pas sur l'axe de l'arbre. Dans l'exemple donné le déséquilibre est accentué par une petite masse m'. Si l'on frappe la tringle d'un coup dirigé perpendiculairement, on engendrera des oscillations propres, dont la pulsation ω est fonction de la rigidité à la flexion de la tringle et de la masse du disque M. Soit kx la force élas-

tique de rappel due à l'écart de côté de la tige de la grandeur x; dans ce cas la pulsation des oscillations propres du disque entraînées par la flexion de la tringle sera

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}. \tag{129.1}$$

Les vibrations propres s'effectuent en toute direction avec la même pulsation. Si l'on tire sur le disque, puis on le pousse de côté, le disque accomplira des oscillations harmoniques de pulsation ω dans deux directions, et son centre

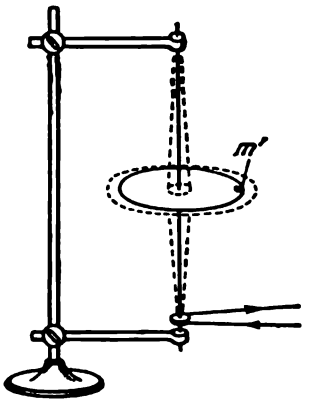


Fig. 362

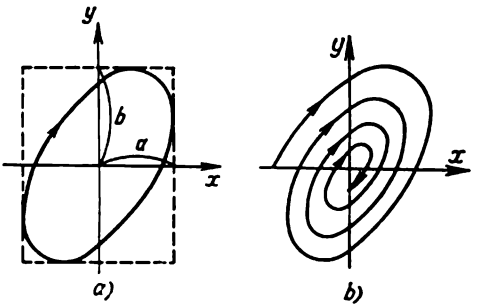


Fig. 363

se déplacera sur une ellipse (fig. 363). Le plan (x, y) est perpendiculaire à la tringle au repos, le centre du disque et l'axe de la tringle coïncident avec l'origine des coordonnées. Au cours des oscillations ce centre effectue des oscillations harmoniques le long de l'axe x:

$$x = a \cos \omega t, \tag{129.2}$$

ainsi que le long de l'axe y de même pulsation

$$y = b \cos (\omega t + \varphi). \tag{129.3}$$

Eliminons ωt et il vient

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \tag{129.4}$$

qui est l'équation de l'ellipse. Deux oscillations harmoniques de même pulsation dans deux directions mutuellement perpendiculaires constituent un mouvement suivant une ellipse inscrite dans un rectangle de côtés $2a$ et $2b$ (fig. 363, a). La forme de l'ellipse est fonction du déphasage entre les oscillations, c'est-à-dire de φ. Si $\varphi = 90°$ et $\varphi = 270°$ les axes principaux de l'ellipse coïncident avec les axes des coordonnées; si $\varphi = 0°$ et $\varphi = 180°$ l'ellipse dégénère en une droite qui suit la diagonale du rectangle de côtés $2a$ et $2b$. Si $a = b$ et $\varphi = 90°$ l'ellipse devient un cercle.

En réalité le mouvement ne se conformera pas exactement aux formules (129.2) et (129.3), car il y a toujours un amortissement et le mouvement du centre du disque se fera suivant une spirale proche de l'ellipse (fig. 363, b) ou dans le cas particulier, du cercle.

Notons à propos qu'une forme identique acquerra la trajectoire d'une masse suspendue par un fil (fig. 364), si elle est écartée de côté, puis est poussée dans la direction perpendiculaire à son plan ; c'est un pendule conique et son fil est situé sur la surface d'un cône. Les oscillations du pendule conique se composent de deux oscillations harmoniques dans deux directions mutuellement perpendiculaires avec la même pulsation.

Revenons maintenant aux oscillations forcées du disque tournant sur une tringle. Supposons un instant qu'il n'y ait pas d'oscillations, et le disque de masse M tourne à la vitesse angulaire p ; la force centrifuge (voir la référence p. 459)

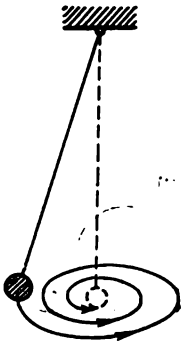


Fig. 364

$$F_c = MR_0p^2, \tag{129.5}$$

où R est la distance du centre de gravité à l'axe de rotation, agira alors sur l'axe du disque en tournant continûment avec la vitesse angulaire p. Supposons qu'à l'instant initial $t=0$ le centre de gravité se trouve sur l'axe y; alors, le long de l'axe x agira la force

$$F_c \sin pt$$

et le long de l'axe y

$$F_c \cos pt.$$

Sous l'action de chacune de ces forces il sera simultanément engendré deux oscillations du disque: le long de l'axe x et le long de l'axe y. Comme les amplitudes de ces forces sont les mêmes et les propriétés de la tringle dans des directions mutuellement perpendiculaires sont identiques, les oscillations forcées s'effectueront dans deux directions mutuellement perpendiculaires avec la même amplitude, c'est-à-dire sous l'action de la force centrifuge la tringle effectuera

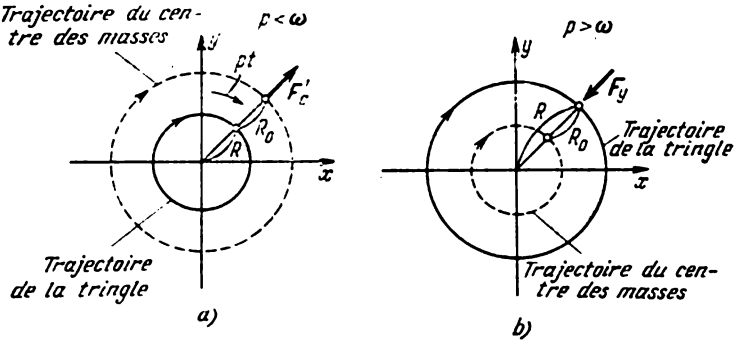


Fig. 365

des rotations circulaires avec la pulsation de ces rotations. Pour un nombre de tours par seconde très petit, l'écart du centre de gravité du disque durant les oscillations de la tringle dépassera celui de l'axe (ou du centre géométrique du disque) et le mouvement de l'axe se fera suivant un cercle, comme c'est montré sur la figure 365, *a*). La tringle fléchit et s'écarte de l'axe de rotation de la grandeur R, mais le centre de gravité du disque est situé à l'écart de l'origine des coordonnées, à peu près sur le même rayon. Le centre du disque s'écartera de l'axe

de rotation à cause de la flexion de la tringle, et, par suite, les forces centrifuges dépendront de cette flexion, ou de l'amplitude des oscillations de la tringle. Pour des pulsations très basses, quand la vitesse de rotation $p \ll \omega$, la tringle continuera à fléchir jusqu'à ce que la force centrifuge s'équilibre sous l'action de la force élastique de la tringle fléchie.

Pour une très grande vitesse de rotation de l'arbre, quand $p \gg \omega$, le mouvement de la tringle s'effectuera suivant un cercle, comme c'est montré sur la figure 365, *b*, mais maintenant l'écart de la tringle sera toujours plus grand que celui du centre du disque. La distance R_0 entre le centre de gravité et le centre géométrique du disque est généralement très petite; donc l'amplitude des oscillations de la tringle est faible; avec l'accroissement de la pulsation des rotations, le centre des masses se rapprochera de plus en plus de l'origine et l'amplitude des oscilltions de la tringle tendra vers R_0. Pour une grande vitesse de rotation, les oscillations de la tringle seront faibles, ce qui s'observe facilement pour une rapide rotation de l'installation montrée à la figure 362. En observant le disque à la lumière d'un éclairement stroboscopique synchrone, il est facile de se convaincre de la justesse de nos conclusions. En rendant R_0 plus grand, en augmentant m, on constate très bien que la tringle décrit un cercle autour du centre de gravité du disque.

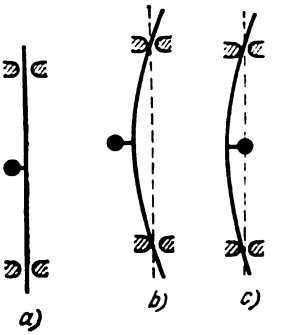


Fig. 366

Pour rendre les expériences encore plus sensibles, on peut procéder ainsi. Enlever le disque de la tringle et ajuster à la place une petite masse (fig. 366, *a*). Pour de petites vitesses de rotation, inférieures à la résonance, la masse tirera sur la tringle en la fléchissant (fig. 366, *b*). Pour de grandes vitesses de rotation, la tringle fléchit de façon que la masse se rapproche de l'axe de rotation (fig. 366,*c*). Plus la vitesse de rotation est grande, plus près se disposera la masse de l'axe de rotation passant par le centre des paliers.

En résonance, quand la vitesse angulaire p est proche de la pulsation propre ω, on voit s'amorcer les oscillations de la résonance qui, si elles ne sont pas limitées, atteignent rapidement une telle amplitude que la tringle se brise. Si, par contre, on augmente assez rapidement le nombre de tours par seconde, sans traîner dans la zone de résonance, la tringle tressautera un peu, se tranquillisera puis accomplira des oscillations très faibles avec un $p \gg \omega$, comme on l'a déjà dit.

L'amplitude des oscillations du disque est facile à calculer en posant que la rotation est antérieure ou postérieure à la résonance.

Supposons que le mouvement du disque s'effectue dans le système des coordonnées en rotation à la vitesse angulaire p. Le disque sera au repos dans ce système et son équilibre sera défini par l'équilibre entre la force centrifuge et la force élastique de déformation de la tringle.

Pour de petites vitesses de rotation, quand $p < \omega$, la force centrifuge

$$F'_c = Mp^2 (R + R_0)$$

(voir les notations sur fig. 365), tandis que la force de rappel de déformation est

$$F_é = kR.$$

L'égalité de ces forces fournit l'expression de l'amplitude des oscillations de la tringle sous la forme

$$R = \frac{R_0}{\frac{k}{Mp^2} - 1} = \frac{R_0}{\frac{\omega^2}{p^2} - 1},$$

où d'après (129.1) $\sqrt{\frac{k}{M}} = \omega$ est la pulsation propre des oscillations du disque sur la tige.

A de grandes vitesses de rotation, pour $p > \omega$ (pour les notations voir fig. 365) la force centrifuge est

$$F_c'' = Mp^2 (R - R_0),$$

tandis que la force élastique est de la forme obtenue pour $p < \omega$.

De l'égalité des forces on tire

$$R = \frac{R_0}{1 - \frac{k}{Mp^2}} = \frac{R_0}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}.$$

En résonance ($p = \omega$), on a une amplitude infinie; si dans les calculs on tient compte du frottement, on obtient une amplitude finie.

Les oscillations du disque sur une tringle décrite ici, constituaient autrefois un problème technique difficile à résoudre. A la fin du siècle dernier on a commencé à construire des turbines à vapeur qui, schématiquement, peuvent être simulées par un disque monté sur un arbre. Avec l'augmentation de la puissance et de la vitesse de rotation, on se heurta à des conséquences désastreuses. Les vibrations étaient telles qu'elles détruisaient la machine. On décida tout naturellement à rendre les arbres plus rigides, mais cela ne donna aucun résultat: les vibrations et les destructions continuaient, mais cette fois à des rotations supérieures de l'arbre. Il est bien évident que cela ne pouvait se passer autrement: l'augmentation de la rigidité de l'arbre ne faisait qu'augmenter la pulsation ω et la résonance se produisait pour une plus grande vitesse de rotation. Alors on proposa une solution correcte: rendre l'arbre plus fin, moins rigide et ne fonctionnant qu'à des vitesses de rotation pour lesquelles $p > \omega$. C'est beaucoup plus simple et moins onéreux, aussi adopta-t-on cette solution.

La vitesse de rotation de l'arbre correspondant à la pulsation propre est dite *critique*. Aujourd'hui toutes les machines sont calculées de façon qu'au cours du travail la vitesse de rotation critique de l'arbre ne soit pas atteinte et dans les notices d'exploitation on recommande, en cas d'emballement de la machine, de passer aussi vite que possible la zone des vitesses critiques de rotation, où des vibrations dangereuses de resonance peuvent se produire.

§ 130. PROCESSUS TRANSITOIRES ET OSCILLATIONS COMPLEXES. ANALYSE HARMONIQUE

On a examiné en détail les oscillations forcées stationnaires. A la variation de l'amplitude de la force extérieure, ou à la variation de sa pulsation, il apparaît toujours dans le référentiel sur lequel cette force agit, des oscillations propres amorties. Aussi c'est seulement qu'après un certain temps écoulé à la suite de la variation quelconque de la force harmonique extérieure que les oscillations dans le système sur lequel cette force agit deviendront harmoniques; au début les oscillations propres, en s'ajoutant aux oscillations forcées, engendreront un mouvement composé, appelé *phénomène transitoire*.

Sur la figure 367, *b* sont enregistrées les oscillations du pendule pour l'intervention de la force harmonique extérieure (fig. 367, *a*)

dont la pulsation est égale à la pulsation propre du pendule. C'est seulement après l'écoulement d'un certain temps, suivant l'application de la force que le pendule accomplira des oscillations forcées stationnaires harmoniques dont il a été constamment question aux paragraphes précédents. A la figure 367, *b* on a donné pour ce cas l'enregistrement du phénomène transitoire.

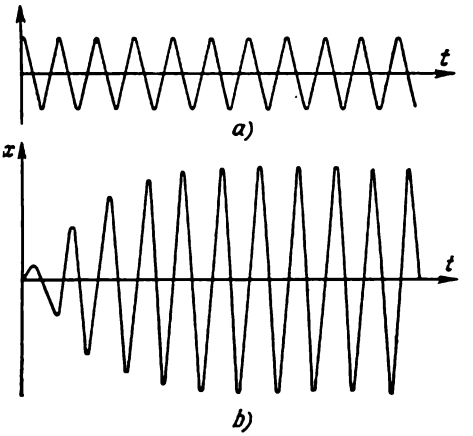


Fig. 367

Au début apparaissent des oscillations propres qui affaiblissent l'amplitude des oscillations forcées; mais après l'amortissement des oscillations propres, le pendule n'effectue que des oscillations forcées. Le phénomène transitoire durera d'autant plus longtemps que l'amortissement des oscillations propres est moins intense.

Si un système en oscillation, un pendule par exemple, est soumis non pas à une, mais à plusieurs forces harmoniques de pulsation variée, alors, comme le montre l'expérience, chacune de ces forces engendre des oscillations forcées de pulsation qui lui est propre. Par conséquent, l'oscillation résultante sera composée et non harmonique, le pendule effectuera simultanément plusieurs oscillations de pulsations différentes, correspondant aux pulsations des forces harmoniques extérieures, chaque force engendrant l'oscillation forcée déclenchée en l'absence des autres forces.

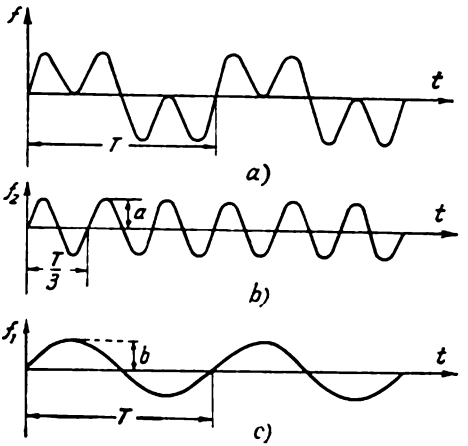


Fig. 368

On démontre en mathématique que toute fonction périodique de période T peut être représentée par une somme de fonctions harmoniques dont les périodes sont $\frac{T}{n}$, n parcourant toute la série des nombres naturels, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ainsi, par exemple, la force périodique représentée à la figure 368, *a* peut être remplacée par une somme de

deux forces harmoniques montrées sur la figure 368, *b* et *c*:

$$f = b \sin \frac{2\pi}{T} t + a \sin \frac{6\pi}{T} t. \qquad (130.1)$$

Les forces $f_1 = b \sin \frac{2\pi}{T} t$ et $f_2 = a \sin \frac{6\pi}{T} t$ sont appelées *forces harmoniques f*. L'harmonique f_1 dont la période coïncide avec la période de la force f est dite *fondamentale*. Sous l'action de chacune des harmoniques apparaîtront des oscillations harmoniques forcées: sous l'action de la force f_1, des oscillations de pulsation $p_1 = \frac{2\pi}{T}$, sous l'action de la force f_2, des oscillations de pulsation $p_2 = \frac{6\pi}{T}$.

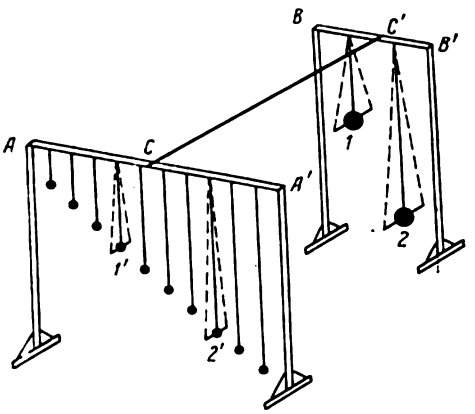


Fig. 369

Si la pulsation de l'une des harmoniques coïncide avec la pulsation propre, disons que la pulsation de l'harmonique $p_2 = \omega$, alors les oscillations provoquées par la force f_2 l'emporteront sur les oscillations engendrées par l'harmonique fondamentale. Le système sur lequel agit la force f constitue dans le cas considéré un résonateur, autrement dit un appareil qui sépare de l'oscillation composée f les oscillations correspondant à f_2 de pulsation égale à peu près à ω.

Plus la courbe de résonance est aiguë, moins intense sont les amortissements des oscillations propres du résonateur, plus rapprochées seront les oscillations de résonance des oscillations harmoniques et d'autant mieux le résonateur séparera les oscillations de pulsation proche de la sienne. Il est évident que les oscillations dues aux autres harmoniques se conserveront, mais pour un faible amortissement elles seront très minimes. Cette *propriété sélective du résonateur* est utilisée très fréquemment dans un grand nombre de dispositifs techniques.

Si l'on dispose d'un ensemble de résonateurs aux pulsations variées, soumis à l'action de forces composées aux pulsations différentes, on peut déterminer d'après les oscillations de ces résonateurs la composition de la force composée agissant sur le résonateur, analyser l'action complexe et en dégager les oscillations de pulsation déterminée.

Par exemple à une barre AA' est attachée une série de pendules légers de différente longueur (fig. 369). Au moyen d'une tringle légère

CC' le support *AA'* est réuni au support *BB'* auquel sont suspendus deux pendules lourds *1*, *2*. Balançons les pendules lourds; leurs oscillations se transmettront au support qui les soutient et par l'intermédiaire de la tringle *CC'* provoqueront des petites oscillations du support *AA'* auquel est suspendu le groupe de pendules. Au bout d'un certain temps, tous les pendules se mettront en mouvement et exécuteront des oscillations forcées. Mais l'amplitude des oscillations sera la plus grande pour les pendules *1'* et *2'* dont les pulsations sont proches des pulsations des pendules *1* et *2*.

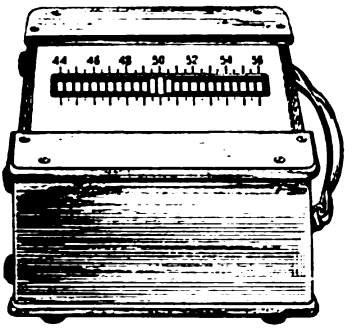


Fig. 370

L'action de la tringle *CC'* est à l'origine du balancement du support par deux pulsations égales aux pulsations propres des pendules lourds, et avec le support sont mis en mouvement les pendules qui y sont suspendus. Cette action est transmise à peu près de la même façon à tous les pendules qui tous oscillent avec deux pulsations, mais dans le pendule *2'* ce sont les oscillations de basse pulsation qui dominent, tandis que dans le pendule *1'* ce sont les oscillations de plus haute pulsation qui l'emportent. Supposons que le support *BB'* soit caché, alors sur la base des oscillations des pendules supportés par *AA'*, on pourrait apprécier les pulsations des oscillations de la tringle *CC'*. Le système de pendules (de résonateurs) constitue ici un analysateur harmonique de l'action complexe.

Ces propriétés du résonateur peuvent trouver application dans des appareils techniques destinés à mesurer et à analyser les oscillations.

Le fréquencemètre à lames vibrantes pour le courant alternatif (fig. 370) et le tachymètre à lames vibrantes sont des appareils construits sur la base du principe de résonance. Ils sont destinés: le premier à déterminer la fréquence du courant alternatif et le second, le nombre de tours de l'arbre par unité de temps. L'élément principal de ces appareils est un jeu de résonateurs aux pulsations propres différentes fixés sur un même support. Généralement une plaque (fig. 371) porte une série de lames (*a*, *b*, *c*, . . .) de différente longueur munies d'une petite masse à leur bout. Les dimensions et la matière des lames ainsi que des masses à leurs bouts sont choisies de façon que les pulsations propres de chacune d'elles correspondent à des pulsations données bien déterminées ω_1, ω_2, etc.

L'oscillation dont la pulsation ω_0 doit être mesurée provoque les oscillations de la plaque *D* sur laquelle sont fixées les lames, la lame dont la pulsation propre est la plus proche de la pulsation ω_0 effectuera donc des oscillations d'amplitude maximale, qu'on détermi-

nera facilement par la forme floue de la tête de la lame. Dans le fréquencemètre le courant électrique parcourt un électro-aimant qui provoque les oscillations de la plaque D, quant aux oscillations de la lame, elles sont visualisées sur la figure 370; en regard de chaque lame est marquée sa fréquence propre en Hertz. La fréquence mesurée du courant alternatif est donc dans le cas considéré de 50 Hz (50 oscillations par seconde). Dans un tachymètre la plaque D, située à l'intérieur de l'instrument, est reliée à l'axe du tachymètre (« la sonde »); les oscillations de cet axe sont transmises à la plaque D. En appuyant l'axe du tachymètre contre la machine dont

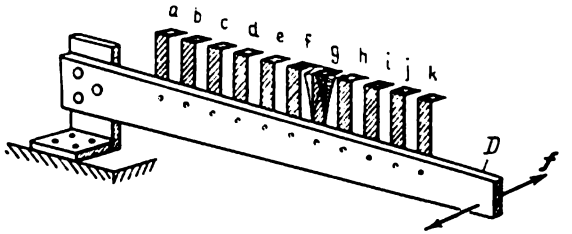


Fig. 371

l'arbre tourne à une vitesse déterminée, on oblige l'axe et la plaque D à osciller avec la fréquence du corps de la machine, qui est égale presque toujours au nombre de tours de l'arbre.

On peut visualiser de façon assez sensible le fonctionnement de cet instrument en réunissant la plaque avec les lames vibrantes à la

Fig. 372

monture d'un gyroscope. Si le gyroscope une fois lancé ralentit son mouvement, on peut observer comment l'une à la suite de l'autre chaque lame vibrante atteint l'amplitude maximum. De façon identique il est possible de suivre comment décroît dans le temps la vitesse de rotation du moteur.

Les phénomènes de résonance sont à la base d'un grand nombre d'appareils de mesure de la fréquence des oscillations. Ainsi sur la figure 372 on a représenté le montage schématique d'un fréquencemètre à lames vibrantes dont l'élément essentiel est une lame B portant une masse m à son bout, et qui est fixée à l'autre extrémité à l'armature C de l'appareil; à une certaine distance du point de fixation la lame est serrée entre deux butées A et A'. En contactant

avec le bâti de l'appareil le corps vibrant, dont on recherche la fréquence, on engendre des oscillations forcées de la lame. Ensuite on commence à déplacer les butées de serrage AA' le long de la lame jusqu'à la position pour laquelle les oscillations de la lame atteignent une amplitude maximale. La fréquence propre des oscillations pour la position donnée des butées AA' est connue d'après l'échelle du fréquencemètre à lames vibrantes. Elle correspond justement à la fréquence des oscillations mesurées.

Si l'oscillation complexe est composée d'oscillations harmoniques de différentes fréquences, l'appareil est capable de détecter toutes les fréquences quand elles ne sont pas trop rapprochées l'une de l'autre.

Dans tous les appareils de ce genre l'élément sensible essentiel est le « résonateur » dont la fréquence propre peut être modifiée facilement.

En acoustique, en optique, en radiotechnique et dans une série d'autres domaines, les résonateurs jouent un rôle énorme du fait de leurs propriétés sélectives.

§ 131. AUTO-OSCILLATIONS

A des conditions déterminées, on peut observer des oscillations périodiques constantes dans un système non soumis à des excitations périodiques extérieures. Par exemple, le vent souffle sur une corde avec une force constante ; si la corde est au repos, le vent n'entraîne que sa déviation latérale constante. Or, sous l'action d'un tel vent constant, on observe souvent des oscillations périodiques stationnaires de la corde de pulsation presque égale à sa pulsation propre.

On frotte régulièrement une corde de violon avec un archet, le frottement de l'archet sur la corde n'aurait dû faire qu'écarter la corde, or il est connu qu'on obtient ainsi des vibrations périodiques de la corde. Si, en l'absence du vent et de l'archet, on avait écarté la corde de sa position d'équilibre puis on l'avait lâchée, on aurait obtenu des oscillations propres qui au bout d'un certain temps se seraient arrêtées. Mais en présence du vent ou par suite du mouvement de l'archet les forces qui agissent sur la corde vibrante se modifient de la sorte qu'elles *entretiennent* les oscillations ; le travail de ces forces est dépensé à la compensation du travail des autres forces de frottement inévitablement engendrées au cours de l'oscillation de la corde. Les oscillations de la corde engendraient des conditions favorisant l'apparition de forces périodiques déterminées qui entretiennent ces oscillations ; en l'absence d'oscillations, l'impulsion extérieure à l'archet resterait constante.

Les systèmes au sein desquels apparaissent des oscillations périodiques en l'absence d'excitation périodique extérieure donnée sont appelés

systèmes auto-oscillatoires et le phénomène lui-même est dénommé auto-oscillation.

En qualité d'exemple élémentaire d'auto-oscillations, étudions les auto-oscillations d'un pendule pivotant sur un arbre (fig. 373, *a*). Les forces de frottement du manchon du pendule contre l'arbre tournant agissent sur le pendule en engendrant un moment déterminé M_{fr} [1]. Envisageons le travail accompli par ce moment au cours des mouvements périodiques du pendule. Durant une demi-période, le travail du moment des frottements M_{fr} est égal à l'énergie soutirée

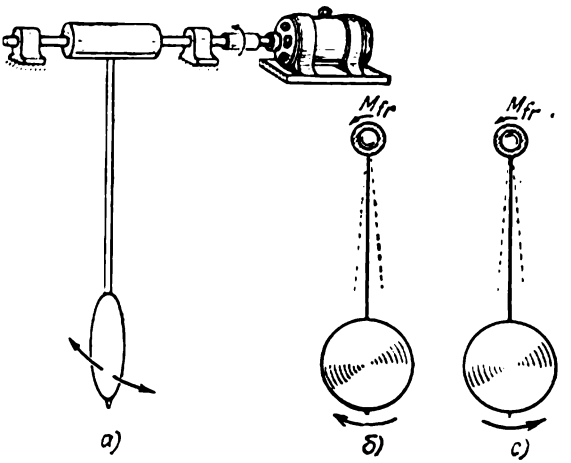


Fig. 373

au pendule, l'arbre et le pendule tournant dans des sens opposés (fig. 373, *b*) ; durant la seconde demi-période, quand le pendule et l'arbre tournent du même côté, le travail du moment des frottements M_{fr} s'ajoute à l'énergie du pendule (fig. 373, *c*). A certaines conditions, la force du frottement sec est presque indépendante de la vitesse de glissement ; le travail des frottements transmis par le pendule sera alors nul et le frottement dans cette suspension ne se traduit pas par un amortissement.

Si, par contre, la force de frottement de l'arbre contre le manchon du pendule est fonction de la vitesse du glissement, la situation est toute autre. Supposons que le frottement croît avec la vitesse de glissement ; le moment des frottements dans l'état montré à la figure 373, *b* sera alors plus grand que dans l'état de la figure 373, *c* ; l'action des frottements *soutire* donc durant la période de l'énergie au pendule et les oscillations de ce dernier s'amortiront plus vite. L'énergie des oscillations du pendule est dépensée à la suspension, et le frottement

[1] Il est admis que la vitesse de rotation de l'arbre est toujours supérieure en valeur absolue à la vitesse de rotation du pendule oscillant.

sur l'arbre en rotation ne fait qu'augmenter l'amortissement des oscillations.

La situation peut changer radicalement si la force de frottement *chute* avec l'augmentation de la vitesse de glissement. Avec un graissage modéré pour une gamme déterminée de variation de la vitesse de glissement, il est possible de réaliser ces conditions. La courbe type de dépendance du moment de frottement d'un pendule immobile de la vitesse de rotation de l'arbre est donnée à la figure 374.

Supposons qu'à la vitesse de rotation de l'arbre corresponde l'abscisse du point A ; l'énergie des oscillations du pendule croîtra alors durant la période, ce que confirment des raisonnements analogues à ceux avancés plus haut. Le pendule en oscillation recevra de l'arbre une certaine portion de l'énergie durant une période, et si cette portion est plus grande que l'énergie dépensée au frottement contre l'air, l'amplitude des oscillations du pendule *croîtra* dans le temps.

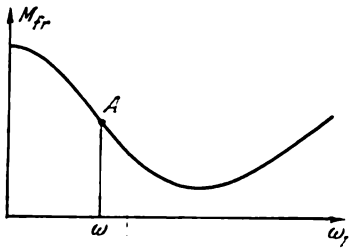


Fig. 374

On peut se représenter l'image des oscillations, en regardant les graphiques donnés à la figure 375. Le graphique *a* traduit les oscillations de l'angle de déviation du pendule φ dans le temps ; le graphique *b*, les variations de la vitesse de rotation du pendule $\dot{\varphi}$; le graphique *c*, les oscillations de la vitesse relative de rotation (vitesse de glissement) $\omega_1 = \omega - \dot{\varphi}$; elles s'effectuent autour de la vitesse de rotation constante de l'arbre ω ; le graphique *d* montre les oscillations du moment des frottements M_{fr} de l'arbre contre le manchon si le frottement chute avec l'augmentation de la vitesse de glissement, et le graphique *e*, les variations du moment des frottements contre l'air M_a ; ce moment est toujours en opposition de phase avec les oscillations φ. Il va de soi que si l'amplitude a_1 est supérieure à l'amplitude a_2, les oscillations croissent.

Avec l'augmentation de l'amplitude des oscillations du pendule, l'amplitude du moment des frottements sur l'arbre a_1 croît moins vite que l'amplitude du moment des frottements contre l'air a_2, et, pour une certaine valeur de l'amplitude des oscillations du pendule, elles s'égalisent ; le pendule effectuera alors des oscillations stationnaires, autrement dit des *auto-oscillations*.

L'arbre tournant du moteur communique au pendule l'énergie nécessaire à la compensation des pertes d'énergie sous forme de chaleur durant les auto-oscillations stationnaires. L'énergie est transmise du moteur au pendule par l'intermédiaire du frottement de glissement. De tous les raisonnements donnés il découle de façon évidente que la pulsation des auto-oscillations est définie par la pulsation pro-

pre des oscillations du pendule. L'expérience montre que dans d'autres cas également la pulsation des auto-oscillations est proche de la pulsation propre du résonateur faisant partie du système oscillant.

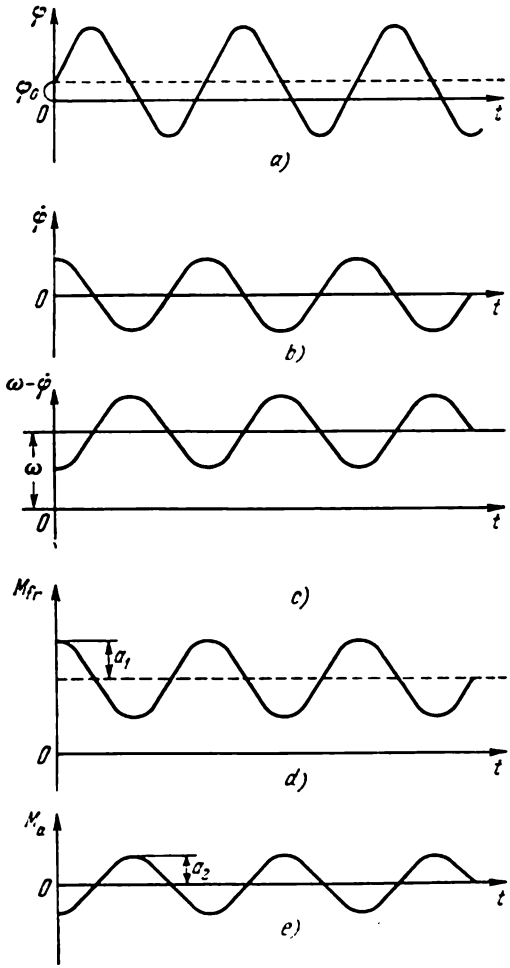


Fig. 375

Les systèmes auto-oscillants, effectuant des oscillations quasi harmoniques, se composent toujours d'un *résonateur* (d'un pendule) effectuant des oscillations et d'une source d'énergie qui les alimente (moteur) ; en oscillant, le résonateur agit sur la source d'énergie de manière à rendre la force imposée au résonateur périodique et lui permettre d'entretenir les oscillations au sein du résonateur. Il ap-

paraît toujours entre la source d'énergie et le résonateur une *force de réaction* qui entretient les oscillations de la force engendrée par la source d'énergie. Dans l'exemple donné les oscillations de la vitesse de glissement ont engendré une force de réaction qui se matérialise dans des oscillations de frottement sur l'arbre entretenant les oscillations du pendule. Pour l'amorçage des auto-oscillations, il faut une certaine (même très petite) secousse, car le phénomène décrit ne débute que quand le pendule est tiré de sa position d'équilibre et commence à osciller.

Les oscillations du pendule sur un arbre tournant constituent un exemple d'auto-oscillations quasi harmoniques. Mais les auto-oscillations peuvent être inharmoniques; par exemple, le grincement de la porte qu'on ouvre apparaît du fait d'auto-oscillations dues au frottement sec dans les crapaudines, etc. Un exemple type d'auto-oscillations inharmoniques de ce genre sont les auto-oscillations des sources *intermittentes*, connues déjà dans l'Antiquité.

Le principe de fonctionnement d'une telle source est montré à la figure 376. Dans la paroi du vase est introduit un siphon. Si l'on laisse couler de l'eau par le

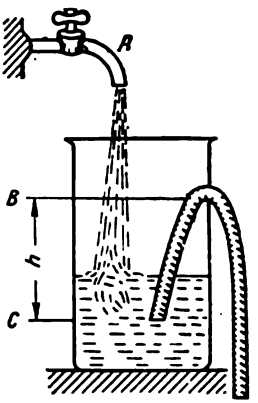


Fig. 376

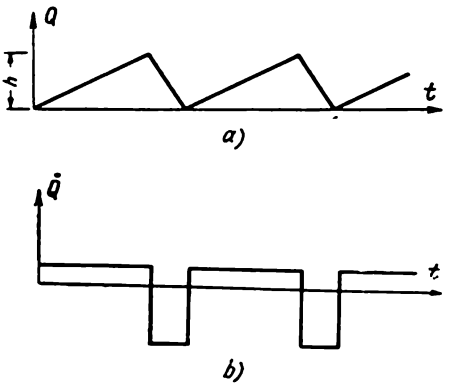


Fig. 377

robinet A avec un jet constant, on peut régler la vitesse d'écoulement de la sorte à faire apparaître des oscillations périodiques du niveau d'eau dans le vase. Supposons qu'il n'y avait pas au début de l'eau dans le vase. Ouvrons le robinet et le niveau d'eau dans le vase s'élèvera progressivement; une fois le niveau de la marque B atteint (voir fig. 376), l'eau commencera à s'écouler par le siphon, le courant entraînera l'air contenu dans le tube et l'eau remplira tout le siphon qui est suffisamment large; ensuite, l'eau s'écoulera par le tube, mais plus vite que le vase ne se remplit par le robinet, le niveau d'eau s'abaissera donc jusqu'à ce qu'il atteigne la marque C près du bout inférieur du siphon. L'air pénétrant dans le bout court du tube chassera l'eau qui y est contenue et l'écoulement s'arrêtera. Ensuite le phénomène décrit se renouvellera aussi longtemps que l'on veut: l'eau montera et s'abaissera périodiquement dans le vase à peu près de la manière montrée à la figure 377, *a*, elle sera périodiquement évacuée du vase par le tube, de la marque B à la marque C. La vitesse de variation du niveau est indiquée sur la figure 377, *b*.

Les graphiques montrent que les oscillations sont ici absolument inharmoniques. La vitesse du mouvement du niveau varie de façon particulièrement brusque aux moments d'« amorçage » et de « désamorçage » du siphon. Mais ces oscillations sont purement périodiques et sont entretenues par le courant régulier de l'eau s'écoulant du robinet. Le phénomène peut être décrit ainsi : à un

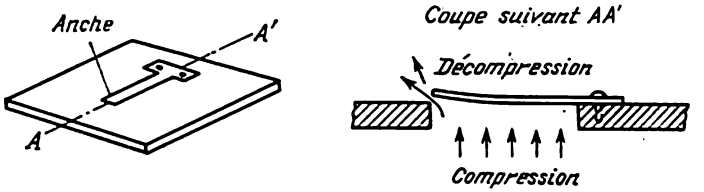


Fig. 378

certain niveau de l'eau dans le vase, ce dernier se trouve comme « percé » et l'eau commence à se vider jusqu'à ce que l'« orifice » ne se trouve bouché à ou certain abaissement du niveau. L'« orifice » se bouche et se débouche par

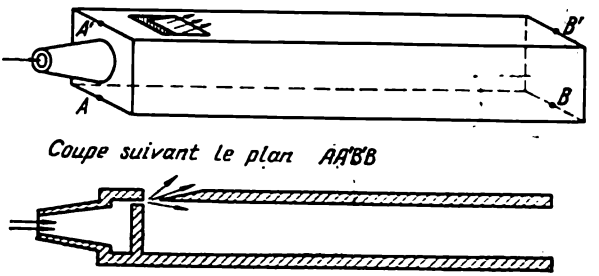


Fig. 379

l'eau remplissant le vase, c'est en cela que réside la « rétroaction ». Les variations du niveau d'eau modifient en quelque sorte les propriétés du vase.

Des auto-oscillations du même genre apparaissent au cas de glissement d'un corps suspendu à un ressort sur une surface sèche. Les auto-oscillations du niveau d'eau dans un vase ou d'une masse sur un ressort sont des oscillations *inharmoniques* et sont appelées *auto-oscillations discontinues*, car les graphiques du mouvement ou de la vitesse du mouvement sont des courbes dont l'aspect rappelle celles des fonctions discontinues.

Donnons encore quelques exemples d'auto-oscillations dues aux jets d'air ou de l'eau, puisque ces phénomènes se rencontrent très souvent dans la vie de tous les jours.

Le son produit par l'harmonica ou tout autre instrument de musique à anches est la conséquence des auto-oscillations de l'anche qui est une languette très fine située à la sortie de l'orifice du jet d'air (fig. 378).

Les vibrations de l'air dans les tuyaux d'orgues, les sifflets et autres instruments analogues sont déclenchées par des auto-oscillations entretenues par des jets d'air continus heurtant un biseau (fig. 379). Le rôle de résonateur est joué ici par l'air se trouvant dans le tuyau.

Le son aigu des vibrations d'une conduite d'eau mal fixée, qu'on entend pour une ouverture déterminée du robinet, est également la conséquence des auto-oscillations dues au courant d'eau traversant l'orifice du robinet.

Les oscillations du balancier d'une montre de poche ou d'une horloge sont des exemples types d'auto-oscillations.

§ 132. AUTO-OSCILLATIONS DU SYSTÈME À PLUSIEURS DEGRÉS DE LIBERTÉ

Aux paragraphes précédents on a examiné les oscillations d'un seul corps : d'une masse suspendue à un fil, ou d'un corps lié à un ressort, ou bien d'un corps plongé dans un liquide, etc. Si les oscillations concernaient un liquide contenu dans des vases communicants, les oscillations harmoniques d'une particule définissaient alors d'une *façon univoque* les oscillations de toutes les particules du liquide. Ces mouvements possèdent un *seul degré de liberté* ; il suffit de connaître les variations d'une seule grandeur pour définir complètement tout le processus du mouvement.

Or, supposons qu'on amorce des oscillations verticales de deux masses suspendues à des ressorts, l'une au-dessous de l'autre (fig. 380).

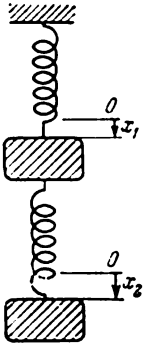


Fig. 380

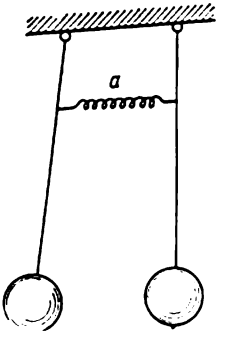


Fig. 381

Dans ce cas le ressort inférieur se déformera au cours des oscillations, et l'élongation de la masse supérieure x_1 n'est plus égale à l'élongation de la masse inférieure x_2. Durant les oscillations, deux grandeurs varient en même temps : x_1 et x_2. Faisons osciller, par exemple, seulement la masse inférieure, en lui communiquant au moyen d'une brusque secousse une certaine vitesse ; on constate qu'aussitôt la masse supérieure se met à osciller, le ressort intermédiaire en s'allongeant et en se rétrécissant communique un mouvement oscillatoire à la masse supérieure. Donc l'analyse des oscillations exige la prise en compte du mouvement simultané des deux masses, ce système ayant deux *degrés de liberté*.

De même, deux pendules liés par un léger ressort *a* (fig. 381) et ne pouvant osciller que dans le plan vertical passant par les points

de leur suspension constituent un système à deux degrés de liberté. Les oscillations de l'un des pendules sont régulièrement associées à celles de l'autre pendule.

Il est possible d'observer les oscillations de trois, quatre, etc. pendules liés par des ressorts; chaque groupe de trois, quatre, etc. pendules doit être envisagé comme un système unique à trois, quatre,

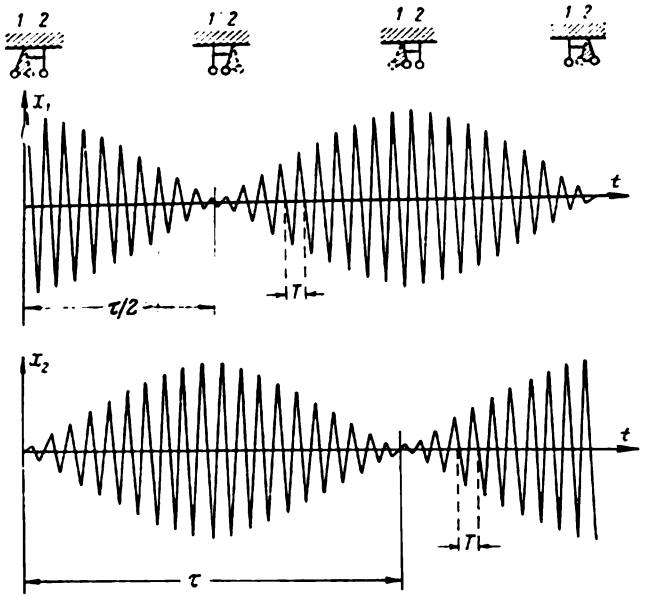


Fig. 382

etc. degrés de liberté, puisqu'en même temps seront en oscillation trois, quatre, etc. pendules.

Si l'on écarte dans un tel système un ou plusieurs pendules, on observera des oscillations assez compliquées de chacun des pendules. Et tout d'abord, en observant les oscillations durant un temps relativement court au cours duquel l'action des frottements ne s'est pas encore fait sentir, on constatera que les oscillations de chacun des pendules sont *inharmoniques*.

Examinons en détail les oscillations du système plus simple, celles de deux pendules identiques liés par un ressort (voir fig. 381). Ecartons l'un de ces pendules, en maintenant l'autre immobile. Ensuite, lâchons simultanément les deux pendules et enregistrons sur une même feuille les oscillations des deux pendules. L'aspect des oscillations peut se représenter au moyen du diagramme montré sur la figure 382.

Au début, le premier pendule oscille à peu près comme si le second pendule était maintenu fixe le ressort intermédiaire subissant des

allongements et des rétrécissements visibles ; la force du ressort exerce son action sur le second pendule qui commence progressivement à osciller. Comme l'énergie communiquée au premier pendule est partiellement transmise au second, l'amplitude des oscillations du premier pendule diminue progressivement, tandis que l'amplitude du second pendule croît.

Tout cela durera un certain temps $\tau/2$, jusqu'à ce que le premier pendule s'arrête et le second (si les pertes en frottement sont faibles) commence à osciller avec une amplitude presque égale à l'amplitude initiale du premier pendule. Ensuite le rôle des pendules est interverti : le second pendule met en mouvement le premier et le phénomène se répète complètement, car les pendules sont identiques. Les pendules effectueront des oscillations tantôt croissantes, tantôt décroissantes, en échangeant leur énergie au bout du temps τ. Ces oscillations sont appelées *battements* et le temps τ, la *période de battement*. L'énergie mécanique se transmettra presque complètement d'un des pendules à l'autre, jusqu'à sa transformation en chaleur, les pendules cessant alors leur mouvement.

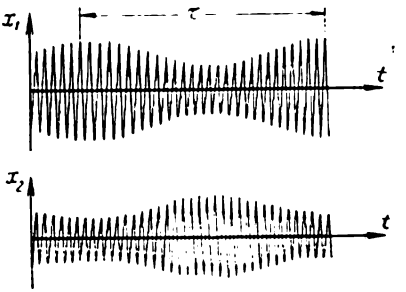


Fig. 383

Maintenant, écartons d'une façon quelconque les deux pendules et, après les avoir lâchés, enregistrons leurs oscillations. Dans ce cas l'amplitude des oscillations d'un des pendules ne restera de même pas constante : tantôt elle croîtra, tantôt elle décroîtra, le même phénomène s'observera également pour l'autre pendule comme précédemment, si l'amplitude du premier pendule croît, celle du second diminue obligatoirement. Mais maintenant l'amplitude des oscillations d'un des pendules ne diminue pas jusqu'à zéro, mais varie seulement d'un certain maximum jusqu'à un certain minimum, comme c'est schématiquement montré sur la figure 383. Quant au temps d'échange d'énergie, c'est-à-dire le temps durant lequel l'amplitude des oscillations passe du maximum au minimum, elle est égale à $\tau/2$, c'est-à-dire à la même grandeur. Quel que soit le mode d'excitation des pendules, la période de battements restera toujours la même ; seule varie, en fonction du mode d'excitation l'écart entre le maximum et le minimum de l'amplitude des oscillations des pendules.

Généralement parlant les oscillations de chaque pendule sont dans tous les cas inharmoniques. Chaque pendule effectue des oscillations qui semblent harmoniques, mais son amplitude varie périodiquement avec une même période de battements τ. La grandeur ou la profondeur des variations de l'amplitude au cours des battements dépend du mode d'excitation des oscillations. Il est évident qu'on peut tenter de choi-

sir un mode d'excitation rendant les battements très faibles et les oscillations proches des oscillations harmoniques.

En s'appuyant sur des considérations de symétrie des pendules il est possible d'indiquer deux de ces modes d'excitation, permettant d'aboutir à des oscillations purement harmoniques; le premier consiste à écarter identiquement les deux pendules du même côté et à les lâcher, le second revient à les écarter identiquement dans des sens opposés, puis à les lâcher. Dans le premier mode d'excitation les oscillations des deux pendules s'effectuent indépendamment du ressort, car ce dernier ne modifie pas sa longueur au cours des oscillations. Si le poids du ressort est infime, les pendules oscillent avec la période T_2 qu'est la période des oscillations propres du pendule oscillant seul.

Le second mode d'excitation des pendules entretient des oscillations en opposition de phase, le ressort s'allongeant et se comprimant périodiquement, tandis que son milieu reste au repos, et ce point peut être considéré comme fixe. Les deux pendules se trouvent dans des conditions identiques et accomplissent des oscillations harmoniques de période T_1. Il est facile de voir que la période T_1 est inférieure à T_2, car dans le second cas à la force de rappel du pendule s'ajoute la force de rappel du ressort.

Si, par contre, les écarts initiaux sont rendus un peu différents, on provoquera dans les deux pendules de petits battements.

§ 133. ANALYSE THÉORIQUE DES BATTEMENTS

Pour éclaircir la nature des battements, examinons le problème théorique de la composition de deux oscillations harmoniques de pulsation différente. Notons au préalable que la composition de deux oscillations harmoniques de même pulsation fournit toujours une oscillation harmonique de même pulsation.

En effet, soit un point oscillant par rapport à un repère $A \sin(\omega t + \varphi_1)$ suivant une certaine direction, tandis que ce repère effectue des oscillations $B \sin(\omega t + \varphi_2)$ dans la même direction. Les oscillations du point par rapport à un référentiel fixe seront alors

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_1) + B \sin(\omega t + \varphi_2) =$$
$$= (A \cos\varphi_1 + B \cos\varphi_2) \sin\omega t + (A \sin\varphi_1 + B \sin\varphi_2) \cos\omega t = C \sin(\omega t + \varphi), \quad (133.1)$$

où

$$C = \sqrt{(A \cos\varphi_1 + B \cos\varphi_2)^2 + (A \sin\varphi_1 + B \sin\varphi_2)^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A \sin\varphi_1 + B \sin\varphi_2}{A \cos\varphi_1 + B \cos\varphi_2}.$$

L'oscillation obtenue par la composition de deux oscillations harmoniques de même direction mais de pulsation différente présente un autre aspect et n'est plus harmonique. Soit

$$x_1 = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2 = B \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

L'oscillation résultante sommée sera alors:

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) =$$
$$= A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + (B - A) \sin(\omega_2 t + \varphi_2) =$$
$$= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) +$$
$$+ (B - A) \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \qquad (133.2)$$

Le premier terme n'est pas une oscillation harmonique, étant le produit de deux facteurs harmoniques dont l'un a pour pulsation $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ et l'autre la pulsation $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$. Si les pulsations ω_1 et ω_2 ne diffèrent pas trop l'une de l'autre, la pulsation $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ sera à peu près du même ordre que ω_1 (ou ω_2), mais la pulsation $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ sera devant ω_1 (ou ω_2) très petite. Dans ce cas le premier terme de l'oscillation résultante (133.2) peut être assimilé à une oscillation quasi harmonique de pulsation ω_1 (ou ω_2) dont l'amplitude est égale à $2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$, c'est-à-dire qu'elle varie lentement dans le temps. Le diagramme de ces oscillations coïncidera exactement avec celui représenté sur la figure 382 pour le premier pendule et elles peuvent être appelées « battements purs », la période des battements étant évidemment égale à

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}. \qquad (133.3)$$

Le second terme de l'oscillation résultante (133.2) est une oscillation harmonique de pulsation ω_2. La composition des battements purs aux oscillations harmoniques fournit une image de battements dont l'amplitude des oscillations varie avec la période de battements τ, mais n'atteint jamais zéro; le diagramme de ces oscillations est donné sur la figure 383. L'addition de deux oscillations de même amplitude $A = B$ fournit un battement pur, tandis que si $A \neq B$, on obtient des battements ordinaires à fréquence $\nu_b = \frac{1}{\tau}$ qui d'après (133.3) est toujours égale à

$$\nu_b = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2,$$

où $\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$, $\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ sont les fréquences des oscillations harmoniques dont l'addition provoque le battement. *La fréquence des battements est égale à la différence des fréquences des oscillations composantes et ne dépend pas de leurs amplitudes et des phases initiales.*

Le temps s'écoulant entre deux passages successifs dans le même sens par le zéro est

$$T = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$$

(voir fig. 382) peut être appelé *petite période* des oscillations composées.

Le phénomène des battements peut se représenter également de façon parlante ainsi. Dans l'addition de deux oscillations harmoniques proches, s'effectuant dans la même direction, l'écartement maxi-

mal sera obtenu à l'instant t_1 quand les deux oscillations sont en phase; puis, avec le temps l'amplitude des oscillations résultantes diminue et à l'instant t_2, quand les oscillations additionnées sont en opposition de phase, les oscillations atteignent un minimum; ensuite, les oscillations croîtront de nouveau et à l'instant t_3, quand les composantes de l'oscillation se trouveront de nouveau en phase, l'amplitude des oscillations résultantes deviendra de nouveau maximale, etc.

La période de battements τ est évidemment égale à

$$t_3 - t_1 = \tau. \tag{133.4}$$

Supposons que la différence de phase à l'instant t_1 est égale à zéro, ou

$$\omega_1 t_1 + \varphi_1 - \omega_2 t_1 - \varphi_2 = 0; \tag{133.5}$$

alors à l'instant t_3 elle est égale à 2π, ou

$$\omega_1 t_3 + \varphi_1 - \omega_2 t_3 - \varphi_2 = 2\pi. \tag{133.6}$$

Soustrayant membre à membre (133.5) de (133.6), il vient

$$(\omega_1 - \omega_2)(t_3 - t_1) = 2\pi;$$

d'où, tenant compte de (133.4), on tire que la période de battements est:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}. \tag{133.7}$$

Confrontant les résultats de l'analyse théorique de la composition de deux oscillations harmoniques de pulsation différente, on aboutit à la conclusion que les oscillations propres de deux pendules sont composées de la somme de deux oscillations harmoniques, *la différence de pulsations (fréquences) de ces oscillations étant égale à la pulsation (fréquence) des battements.*

§ 134. PULSATIONS PROPRES DES PENDULES COUPLÉS

Les expériences montrent, tandis que les calculs théoriques le confirment que pour tout mode d'excitation les oscillations propres des pendules couplés constituent des battements de même nature [1]; ce qui veut dire que les oscillations de chacun d'eux se composent de la somme de deux oscillations harmoniques de pulsations

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} + \frac{\pi}{\tau}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T} - \frac{\pi}{\tau}.$$

Les pulsations ω_1 et ω_2 sont fonction des paramètres physiques des pendules: de leur longueur, de la masse des charges, de la rigidité du ressort et du point de sa fixation au pendule, mais *ne dépendent*

[1] La période de battements τ et la « petite période » T ont une même grandeur pour toutes conditions initiales.

pas des conditions initiales précédant les oscillations. C'est pourquoi les pulsations ω_1 et ω_2 sont appelées *pulsations propres* du système de deux pendules couplés. Le mode d'excitation ainsi que les conditions initiales ne déterminent que l'amplitude et la phase initiale de l'oscillation harmonique considérée du premier ou du second pendule.

Le mode d'excitation n'influence que la « profondeur » des battements; si l'amplitude des oscillations de l'une des pulsations est très petite, comparée à celle de l'autre pulsation, la « profondeur » des battements sera alors également très faible, les oscillations considérées étant très proches des oscillations harmoniques de grande amplitude.

Si les conditions initiales sont choisies de manière que les oscillations de chaque pendule ne s'effectuent qu'avec une seule pulsation (sans battements), la pulsation de ces oscillations est alors celle de l'une des pulsations propres, ω_1 ou ω_2. Aussi les oscillations harmoniques obtenues par écartement des pendules en phase (voir § 132) constituent-elles des oscillations propres de plus petite pulsation ω_2; les oscillations propres de grande pulsation ω_1 s'obtiennent en écartant les deux pendules en opposition de phase. Donc les oscillations propres de petite pulsation sont des oscillations harmoniques en *phase*, tandis que les oscillations propres de grande pulsation sont des oscillations harmoniques *en opposition de phase* des deux pendules.

Des études plus poussées montrent que toutes les oscillations propres des pendules, déclenchées pour des conditions initiales quelconques, se composent de la *somme* d'oscillations en phase des deux pendules de pulsation ω_2 et d'oscillations en opposition de phase de pulsation ω_1.

La justesse de cette assertion est confirmée par les raisonnements suivants. Supposons que le premier pendule ait subi un écart initial x_{10} et le second un écart x_{20}. On peut toujours choisir pour les deux pendules un écartement du même côté et un écartement b dans des sens différents de manière à obtenir en fin de compte les écarts donnés x_{10} et x_{20}. En effet, les grandeurs a et b s'obtiennent de façon univoque des équations

$$x_{10} = a - b, \qquad x_{20} = a + b,$$

ou

$$a = \frac{x_{10} + x_{20}}{2}, \qquad b = \frac{x_{20} - x_{10}}{2}.$$

Les écarts x_{10} et x_{20} sont considérés comme positifs au cas d'un écartement dans le même sens.

Un écartement des pendules du même côté de la grandeur a entraînera des oscillations propres en phase de pulsation ω_2, tandis qu'un écartement dans des sens opposés de la grandeur b produira des oscillations en opposition de phase de pulsation ω_1. L'addition de ces mouvements fournit justement l'oscillation résultante; les oscillations obtenues après l'écart des deux pendules de x_{10} et de x_{20} se composeront donc d'oscillations en phase de pulsation ω_2 et d'amplitude a et d'oscillations en opposition de phase de pulsation ω_1 et d'amplitude b. Tel est l'aspect général des oscillations propres de deux pendules identiques.

Si les pendules sont différents, pour toutes conditions initiales, les oscillations de chacun des pendules se composent de la somme de deux oscillations harmoniques de pulsations ω_1 et ω_2 qui sont les pulsations propres du système donné de pendules. Les oscillations pour lesquelles les deux pendules n'oscillent qu'avec l'une des pulsations propres peuvent également être déclenchées par un choix approprié des conditions initiales, toutefois pour des pendules de longueur différente il s'avère difficile de les déterminer au préalable sans des calculs théoriques.

§ 135. OSCILLATIONS PROPRES DE TROIS PENDULES COUPLÉS

Les oscillations propres de trois pendules couplés, ou d'*un système à trois degrés de liberté*, sont encore plus compliquées et constituent également une somme de trois oscillations harmoniques. Le système de trois pendules possède trois pulsations propres.

Les oscillations avec l'une des pulsations propres du système de trois pendules couplés identiques peuvent facilement s'observer expérimentalement. Dans ce cas également, si l'on parvient à choisir

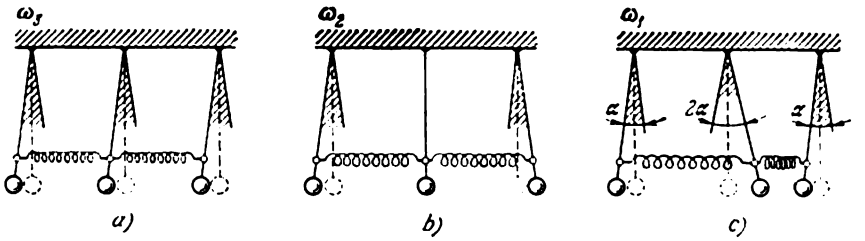


Fig. 384

de façon appropriée les conditions initiales, comme on l'a fait au cas de deux pendules, tous les pendules accompliront des oscillations harmoniques avec la *même* pulsation qui sera l'une des pulsations propres du système.

Sur la figure 384 on a indiqué les conditions initiales pour lesquelles se réalisent chacune des trois oscillations propres du système de pendules couplés aux pulsations propres $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$. Il est évident qu'aux conditions initiales des figures 384, *a* et *b*, on obtiendra des oscillations harmoniques des pendules [1] avec des pulsations ω_3 et ω_2.

Dans le premier cas tous les pendules oscillent en phase avec la pulsation de chacun des pendules avant le couplage, les ressorts n'intervenant pas dans les oscillations, car ils ne se déforment pas.

[1] L'amplitude des oscillations du pendule du milieu est dans le second cas égale à zéro ; on peut donc dire qu'il oscille avec la pulsation ω_2, mais avec une amplitude qui est nulle.

Dans le second cas, les pendules latéraux oscillent en opposition de phase ; comme les forces des ressorts agissant sur le pendule du milieu s'équilibrent, ce dernier n'oscille pas. La pulsation des oscillations dans le second cas est plus grande que dans le premier, car à la force de rappel [1] due aux pendules s'ajoute la force de déformation du ressort.

Le mécanisme de l'apparition des oscillations harmoniques dans le cas des conditions initiales représentées sur la figure 384, *c* ne saute pas aussitôt aux yeux. Mais il est possible de discerner que la force de rappel de chacun des pendules est proportionnelle à l'écart, le coefficient de proportionnalité restant le même. En effet, la force de rappel due au pendule du milieu est *deux fois* plus grande, car son écart est α, tandis que l'écart des pendules latéraux est seulement $1/2\alpha$; de même, la force de rappel due aux ressorts, agissant sur le pendule du milieu, est *deux fois* plus grande que celle qui s'exerce sur les pendules latéraux, car l'un des ressorts s'est allongé de la grandeur proportionnelle à $3/2\alpha$ et le second s'est comprimé de la même grandeur. Les masses des pendules sont identiques, de même sont également communs les coefficients des forces de rappel et, par conséquent, les périodes d'oscillations sont les mêmes. Il va de soi que $\omega_1 > \omega_2$, car les ressorts se déforment davantage dans le troisième cas d'oscillations (pour une même amplitude du pendule latéral) que dans le second. Les oscillations des trois pendules déclenchées après les conditions initiales représentées sur la figure 384 constituent des oscillations harmoniques accordées de tous les pendules à l'une des pulsations propres.

De même que pour deux pendules, toutes oscillations propres de trois pendules peuvent être réduites à une somme de trois oscillations dont chacune correspond à l'oscillation harmonique accordée avec l'une des pulsations propres. Chacune des ces oscillations accordées est dite de *mode normal* et correspond à une pulsation propre déterminée de tout le système couplé. Donc, pour résumer, on peut dire que *toutes oscillations propres du système constituent une somme de modes normaux d'oscillations.*

Une image absolument analogue offre les oscillations du système composé d'un grand nombre de pendules ou de corps oscillants différents. L'image complexe des oscillations propres déclenchées pour des conditions initiales quelconques se décompose en un ensemble d'oscillations harmoniques simples ou de modes. Le nombre de modes normaux, de même que celui de pulsations propres, est égal au nombre de degrés de liberté de tous les corps oscillants.

Notons en conclusion qu'on a étudié les oscillations des systèmes composés en négligeant les forces de frottement ou en les supposant très faibles. L'apparition de petits frottements n'introduira pen-

[1] La partie de la force de rappel due aux pendules est égale à $mg\,\alpha$, où α est l'angle d'écart et mg la force poids du pendule.

dant un certain laps de temps que de faibles modifications dans l'image des oscillations, mais avec le temps, les oscillations s'amortiront.

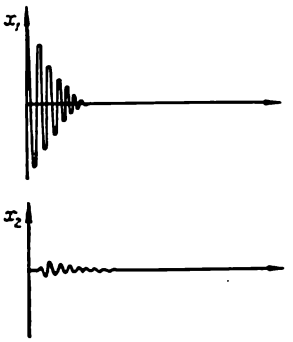


Fig. 385

La présence d'importants frottements, par contre, modifiera évidemment de façon radicale l'image des oscillations propres. Par exemple, avec un très faible ressort liant les pendules et un frottement sensible, l'image des oscillations de deux pendules peut prendre l'aspect montré sur la figure 385 ; les oscillations du premier pendule excité s'étoufferont avant qu'elles ne soient transmises de façon sensible au second pendule non excité (comp. avec fig. 382).

Pour des frottements très importants, les mouvements des pendules ne seront plus oscillatoires et, après l'écart de la position d'équilibre, le pendule écarté tendra lentement vers la position d'équilibre n'entraînant presque pas dans le mouvement les autres pendules, les pendules faiblement reliés au pendule excité conservant la position non écartée.

§ 136. OSCILLATIONS ENTRETENUES DANS DES SYSTÈMES COMPLEXES

Sous l'action d'une force harmonique extérieure F de pulsation p sollicitant l'un des pendules couplés (fig. 386), les deux pendules effectueront des oscillations harmoniques entretenues de pulsation p. Les amplitudes des oscillations de chacun des pendules, comme pour des oscillations forcées à un degré de liberté, dépendront de la pulsation, cette dépendance étant d'autant plus forte que l'amortissement est faible. Les *oscillations de résonance*, ou les oscillations des deux pendules avec une amplitude maximale, seront enregistrées quand l'une des pulsations propres des pendules couplés deviendra égale à la pulsation de la force extérieure. De façon analogue, pour un système de n pendules les oscillations de résonance s'observeront pour n valeurs de la pulsation de la force extérieure.

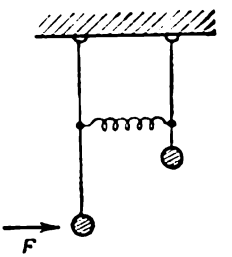


Fig. 386

La dépendance de l'amplitude des oscillations de l'un des pendules de la pulsation, l'amplitude de la force extérieure étant constante, est donnée à la figure 387, où l'on voit un pic de résonance au voisinage de chacune des pulsations propres ω_1 et ω_2. Un rôle important revient également au minimum caractéristique de l'amplitude des oscillations pour la pulsation notée n_1 ; il sera question de ce minimum

plus loin. La courbe de résonance a été tracée pour l'amplitude d'oscillation du pendule long sollicité par la force $F = a \cos pt$. A la résonance, quand $p = \omega_2$ (ou $p = \omega_1$), l'action de la force extérieure est équilibrée par les frottements. Si les frottements sont faibles et la force extérieure suffisamment petite, les oscillations forcées dans le système rappellent à la résonance le mode normal, car la pulsation des oscillations forcées est égale à la pulsation propre.

A la première résonance ($p = \omega_2$) la relation entre les amplitudes et les phases sera à peu près celle montrée à la figure 388, *a*. Les

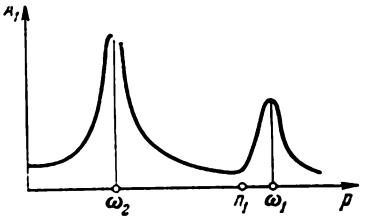


Fig. 387

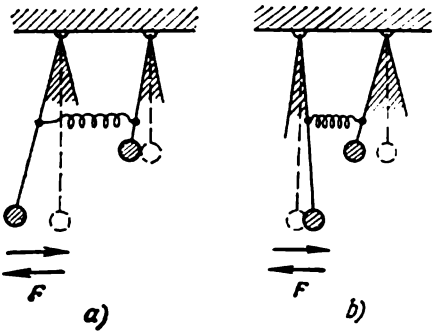


Fig. 388

deux pendules oscillent en phase, mais l'angle d'écart du pendule long est plus grand ; la pulsation ω_2 est voisine de la pulsation propre du seul pendule long qui oscille avec la pulsation proche de sa pulsation propre, en entraînant avec cette pulsation dans le mouvement le pendule court, dont la pulsation propre est de beaucoup plus grande ; la force du ressort [1] agit sur le pendule court en phase avec ses oscillations ; le ressort est le plus allongé dans la position montrée fig. 388, *a* et il sera comprimé au maximum dans une demi-période.

A la seconde résonance ($p = \omega_1$) les oscillations des pendules s'approcheront du mode normal de pulsation ω_1 ; l'image approchée en est donnée sur la figure 388, *b*. Ce seront des oscillations en opposition de phase de pulsation ω_1, voisine de la pulsation propre du pendule court. C'est maintenant le pendule court qui « pousse » le long et qui oscille avec une pulsation supérieure à sa pulsation propre ; et, par suite, la force du ressort et l'élongation du pendule long seront en opposition de phase. Sur la figure 388 les amplitudes de résonance paraissent minimes, mais pour une petite force F, à des pulsations différentes (autres que de résonance), les pendules restent pratiquement sur place.

Tous les phénomènes liés aux oscillations forcées de deux pendules sont facilement mis en valeur avec l'installation dont le schéma est

[1] Qui peut être considérée comme une force « extérieure » par rapport au pendule court.

donné fig. 389. Le ressort B doit être choisi suffisamment léger et doux, quant au rayon R de la manivelle il doit être de beaucoup supérieur au déplacement de l'autre bout du ressort durant les oscillations.

Un intérêt particulier présente le cas où la pulsation des oscillations $p = n_1$, pour laquelle l'amplitude des oscillations du pendule long est très petite. Ce phénomène est utilisé pour l'amortissement

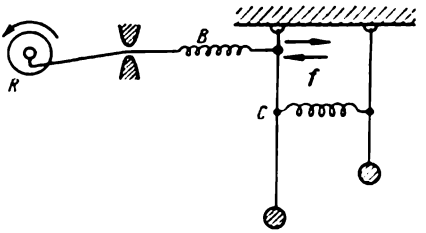


Fig. 389

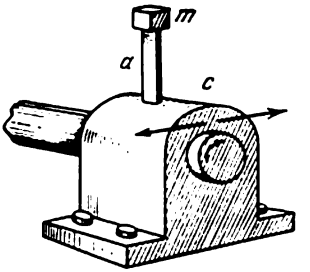


Fig. 390

des vibrations gênantes. L'expérience, comme le calcul, montrent que la pulsation n_1 est égale à la pulsation propre des oscillations du pendule court, le pendule long restant immobile. Pour une pulsation des oscillations forcées $p = n_1$, le pendule court oscille avec la pulsation propre n_1, de sorte que la force du ressort au point C (voir fig. 389) équilibre l'action de la force extérieure f et le pendule long est pratiquement immobile.

L'utilisation des oscillations couplées pour l'amortissement des vibrations n'est possible que dans les cas où les vibrations gênantes ont une pulsation constante. Ainsi, par exemple, pour éliminer les vibrations horizontales gênantes du palier c de la machine (fig. 390) fonctionnant au régime de n tours, on fixe sur le palier une plaque a ayant une masse m à son bout. La pulsation propre des oscillations de la masse sur la plaque est choisie égale à n. Au cours du fonctionnement de la machine la plaque oscille assez fortement, mais le palier, par contre, reste presque immobile et ses vibrations gênantes sont ainsi levées. Cette installation porte le nom *d'amortisseur dynamique.*

Les amortisseurs dynamiques, utilisés pour parer aux dangereuses vibrations de torsion des vilebrequins des moteurs à combustion interne, sont basés sur le même principe.

L'action d'une force périodique extérieure sur un système possédant plusieurs degrés de liberté et présentant une série de pulsations propres, sera, en général, accompagnée d'une résonance sur chacune de ces pulsations propres. Il faut donc, pour parer aux conséquences gênantes des résonances, éviter la coïncidence de la pulsation de la force extérieure avec chacune des pulsations propres. Cette exigence doit être remplie obligatoirement au cas où les frottements sont insignifiants. Si, par contre, les forces d'amortissement sont suffisantes, on peut ne pas redouter les résonances.

CHAPITRE XV

VIBRATIONS EN MILIEU CONTINU

§ 137. ONDES

On sait déjà (§ 120) que chaque variation de pression ou de densité du milieu continu se transmet à une vitesse déterminée aux particules voisines, entraînant des modifications analogues; dans le milieu se propage une onde de variations de pression (de densité, etc.). Les vibrations des particules de l'air amorcées par des vibrations des cordes vocales ou du diaphragme d'un haut-parleur se transmettent d'une particule de l'air à l'autre et une onde sonore se propage dans l'air.

L'onde sonore émanant d'un haut-parleur se propage dans un milieu homogène uniformément dans toutes les directions. A des distances suffisamment grandes de la source sonore, les points atteints à l'instant donné par l'ébranlement se disposent à peu près sur une sphère. Aussi ces ondes sont-elles dites *sphériques*. On appelle *surface d'onde* la surface dont toutes les particules d'un milieu homogène effectuent des mouvements identiques. Il est évident que la surface d'onde d'une onde sphérique est une sphère quelconque dont le centre est le siège d'une source de vibrations de dimensions infimes.

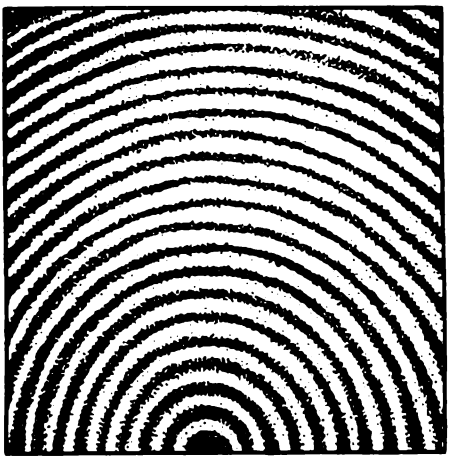


Fig. 391

Un exemple parlant de propagation d'une onde sont les rides bien connues se déplaçant à la surface d'un liquide. Les rides progressant à la surface de l'eau à partir du point de chute d'une pierre sont dites *circulaires*. Si un corps quelconque, le flotteur par exemple, est animé d'oscillations harmoniques de fréquence quelconque, il constituera une source à partir de laquelle se propageront des ondes circulaires régulières. Les crêtes et les creux de l'onde se propagent en cercles à la surface de l'eau (fig. 391); la ligne de l'onde dans ce cas est évidemment une circonférence.

La forme la plus simple du mouvement ondulatoire sont les ondes se propageant dans une seule direction, par exemple, les ondes qui se propagent dans l'air suivant l'axe du tuyau à partir d'un piston qui vibre (fig. 392). Les ondes de compressions et de dilatations voyagent à partir du piston dans une seule direction, toutes les particules de l'air qui participent au mouvement vibratoire se déplaçant

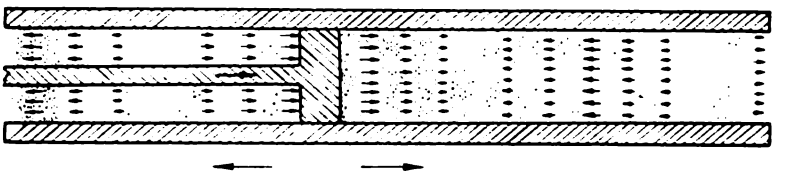


Fig. 392

-suivant l'axe du tuyau. Des ondes analogues suivant une seule direction peuvent être engendrées dans une tige élastique, si l'on frappe sur l'un de ses bouts. Les surfaces d'ondes sont dans ce cas des surfaces perpendiculaires à l'axe du tuyau ou de la tige ; c'est pourquoi ces ondes sont dites *planes*.

Les ondes dans lesquelles les particules sont animées d'oscillations suivant la direction de propagation des vibrations sont dites

Fig. 393

longitudinales (on a montré à la figure 392 un exemple de ces ondes). Les ondes dans lesquelles les particules effectuent des mouvements transversalement à la direction de propagation des ondes sont dites *transversales* (sur la figure 391 on a donné un exemple de ces ondes).

L'onde transversale peut se propager le long d'une ficelle tendue, d'un tube en caoutchouc, d'une corde, etc. (fig. 393). Si l'on frappe d'un coup sec un tube en caoutchouc tendu, on verra une bosse (un creux) courir à partir du point heurté le long du tube. Quand la bosse traverse une tranche quelconque du tube, les particules du tube effectuent alors des oscillations dans le sens transversal.

L'onde le long d'une corde constitue un mouvement ondulatoire élémentaire. Etudions en détail comment se propage une onde le long de la corde. La « bosse » se propage le long de la corde avec une certaine vitesse c qui est fonction des propriétés de la corde et de sa tension. Au cours de la propagation, l'onde ne modifie pas sa forme. La grandeur c est appelée *vitesse de propagation de l'onde* [1]. Il est nécessaire de distinguer la vitesse de propagation de l'onde c et la vitesse du mouvement de la particule considérée de la corde v. Si l'on considère l'onde progressant le long de la corde après un certain intervalle de temps très petit dt (fig. 394); le segment vertical $v\,dt$ marquera le déplacement du point considéré de la corde, tandis que le segment horizontal $c\,dt$ traduira le déplacement de l'onde durant le temps dt. La vitesse v du point de la corde varie dans le temps et dépend de la forme de l'onde, cette forme étant différente pour les

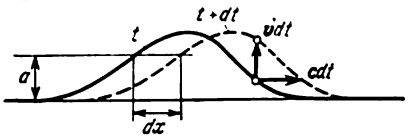


Fig. 394

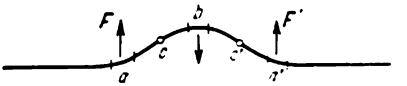


Fig. 395

divers points, tandis que la vitesse c est constante dans le temps et est la même en tout point de la corde. Si dx est la distance entre des points voisins de la corde, qui, après dt, ont le même écartement a de la position d'équilibre, il devient évident que $c = \frac{dx}{dt}$.

Supposons qu'à un certain instant la corde tendue ait la forme montrée sur la figure 395. L'aspect de la corde à l'instant donné traduit la forme de l'onde, mais n'indique pas la direction prise par le mouvement, l'onde pouvant progresser à droite comme à gauche; l'aspect de la corde n'autorise qu'à conclure que les éléments a et a' sont sollicités par une force dirigée vers le haut et l'élément b, par une force dirigée vers le bas. Ces forces sont dues à la tension et à la flexion de la corde; elles sont d'autant plus grandes que la flexion de la corde à l'endroit considéré est plus importante; aux points d'inflexion c, c' (voir fig. 395). les forces s'annulent. L'apparition de ces forces s'explique ainsi. Découpons en pensée une petite tranche de la corde (comme c'est représenté sur la figure 399), les bouts de laquelle, du côté des parties restantes de la corde, sont sollicités par des forces de tension T et T', normales à la section de la corde, leur résultante F étant dirigée à peu près perpendiculairement à la corde.

La flexion de la corde tendue détermine donc la direction et la grandeur de la force appliquée à une certaine tranche de la corde,

[1] Plus précisément, vitesse de propagation de la forme del'onde.

mais sur cette base on ne peut rien conclure sur le sens pris par la tranche donnée de la corde, la force ne permettant d'apprécier que le mode de variation de la vitesse du mouvement de la particule de la corde dans le sens transversal.

Mais si l'on connaît les vitesses de mouvement des points de la corde au moment donné, il devient alors possible de déterminer le sens du mouvement de l'onde.

Supposons que les vitesses de mouvement des points de la corde sont telles que c'est indiqué sur la figure 396, *a*. Dans ce cas la force F'

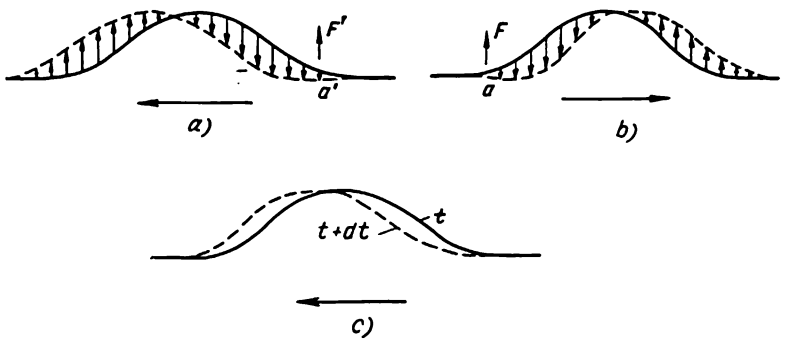


Fig. 396

s'exerçant sur la particule a' tendra à l'arrêter en diminuant sa vitesse. Il devient évident que cette répartition des vitesses correspond à une onde progressant vers la gauche.

Si l'on connaît les vitesses des points isolés de la corde à l'instant t, on peut établir leur position à l'instant suivant $t + dt$. Sur la figure 396, *c* on a tracé cette position pour l'onde donnée à la figure 396, *a*. Il est également possible d'établir l'inverse : quelles seront les vitesses de mouvement de différents points de la corde à l'instant donné, si l'onde de flexion de la corde progresse dans une direction donnée sans varier sa forme. Sur la figure 396, *b* on a indiqué les vitesses des particules de la corde pour l'onde se déplaçant vers la droite. Si, en écartant la corde au lieu donné, on imprime à la corde au moyen d'un choc des vitesses correspondantes, un mouvement ondulatoire voyagerait du point ébranlé dans une direction bien déterminée.

Le lien entre l'onde des déplacements et l'onde des vitesses est facile à établir en recourant à l'onde des déplacements de forme trapézoïdale. Sur la figure 397, *a* on a montré deux états de la corde pour l'onde progressant vers la droite ; aux instants t (courbe en trait plein) et $t + dt$ (courbe en pointillé) le point *c* de la corde passe à la position *a* et le point *d* à la position *b*. Les segments *ca* et *db* sont évidemment proportionnels aux vitesses, tous les points de la corde sur les

flancs avant et arrière de l'onde (fronts d'onde) progressant à une même vitesse constante, car ces flancs sont rectilignes. La vitesse varie par saut à l'instant de la traversée de l'inflexion d'onde : à

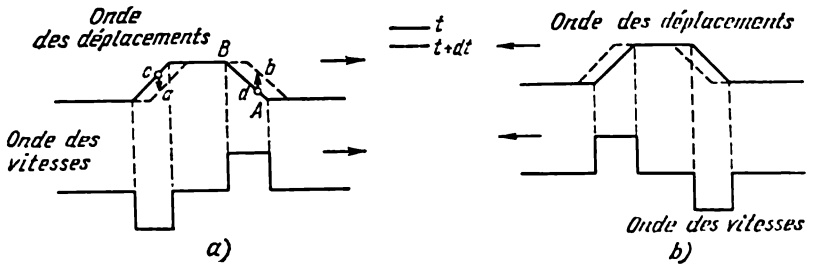


Fig. 397

l'instant t au point A la vitesse croît par saut et au point B elle décroît jusqu'à zéro, etc. L'onde voyageant vers la gauche est donnée sur la figure 397, *b*.

Une onde de forme quelconque se propageant sans distorsion le long d'une corde peut toujours se représenter sous l'aspect général suivant :

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{137.1}$$

où $y(x, t)$ est l'écart à l'instant t de la particule de la corde, ayant le long de cette dernière comme coordonnée x. L'écartement y est

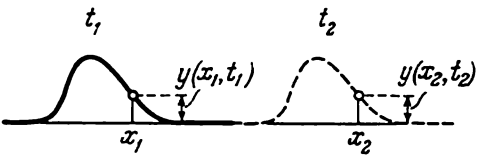


Fig. 398

une fonction de deux variables : x et t ; la fonction du binôme $t - \frac{x}{c}$ fournit la forme de la corde pour un certain instant t comme fonction de x. On peut montrer qu'une onde de forme quelconque représentée par la fonction f se propage avec la vitesse c.

Supposons qu'à l'instant t_1 l'onde a l'aspect montré sur la figure 398 en trait plein. A l'instant t_2 sans varier de forme l'onde se déplacera à droite (courbe en pointillé). De plus, la particule de coordonnée x_2 se déplacera de la grandeur $y(x_2, t_2) = y(x_1, t_1)$, équivalente à la grandeur du déplacement de la particule de coordonnée $x_1 < x_2$ à l'instant antérieur $t_1 < t_2$. Il est évident que les arguments de la

fonction $y(x, t)$ doivent dans ce cas être identiques :

$$t_1 - \frac{x_1}{c} = t_2 - \frac{x_2}{c}.$$

D'où il s'ensuit que

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1),$$

autrement dit l'onde s'est déplacée à la vitesse c dans la direction des valeurs positives de x, si $x_2 > x_1$.

L'expression générale de l'onde (137.1) convient à toute onde plane se propageant dans la direction de l'axe des x au cas, où les particules de coordonnée x s'écartent à l'instant t identiquement de la grandeur $y(x, t)$ de la position d'équilibre. D'une manière analogue on peut se convaincre que l'expression

$$y(x, t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

représente une onde se propageant à la vitesse c du côté des valeurs négatives de x.

La vitesse de mouvement de l'onde le long d'une corde tendue peut se déterminer en raisonnant de la façon suivante. Au cas de propagation de l'onde le long de la corde tendue, on voit se déplacer le long de la corde une bosse dont la forme reste invariable. Imaginons qu'on a enfilé sur la corde un tube en verre très fin modelé sur la forme de l'onde donnée, qui progresse le long de la corde à la vitesse de propagation de l'onde c; dans ce cas la corde ne sera soumise à aucune force de la part du tube. Maintenant imaginons la situation suivante : le tube reste en place, tandis que la corde tendue progresse dans le sens inverse à l'intérieur à la vitesse constante c; dans ce cas également aucune force n'agira sur le tube de la part de la corde ; en effet, l'onde voyage à droite le long de la corde mobile avec la même vitesse c tout en restant immobile dans l'espace. Si l'on brisait délicatement le tube, la « bosse » de l'onde resterait à la même place.

Ce schéma adopté, voyons pour quelle vitesse c le tube profilé ne pressera pas sur la corde tendue qui le traverse. Supposons que le rayon de l'arrondi du tube au lieu considéré soit R (fig. 399). Découpons en pensée un élément de la corde de longueur $R\,d\alpha$; à ses bouts sont appliquées des forces de tension de la corde T et T' de grandeur identique, mais agissant sous l'angle $\pi - d\alpha$. Si l'angle $d\alpha$ est petit, la résultante de ces forces sera

$$T d\alpha,$$

qui est dirigée vers le centre de courbure O. Comme la corde n'est soumise, par hypothèse, à aucune force de la part du tube, seule la force mentionnée engendre l'accélération centripète de l'élément se

déplaçant à la vitesse c sur le cercle de rayon R ou

$$T\,d\alpha = \rho R\,d\alpha \frac{c^2}{R}, \tag{137.2}$$

où $\rho R\,d\alpha$ est la masse de l'élément de la corde et ρ la masse de l'unité de longueur de la corde (« masse linéique » ou « densité linéaire »).

Après simplification, on obtient l'expression de la vitesse de propagation de l'onde :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{137.3}$$

La vitesse de propagation de l'onde est égale à la racine carrée du rapport de la tension T à la masse linéique de la corde ρ. Vérifions la

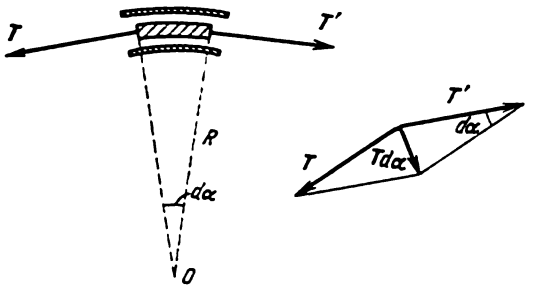


Fig. 399

correspondance des unités de la formule (137.3) :

$$[T] = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}, \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}}, \quad \left[\frac{T}{\rho}\right] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

Dans la déduction de la formule de la vitesse de propagation, on a admis que la corde était parfaitement élastique ; cela signifie qu'en état non tendu, comme pour une chaînette bien graissée, aucun effort n'est nécessaire à sa flexion. Au cas d'un fil d'acier rigide tendu l'action des forces de flexion est comparable à celle des forces de tension et, par suite, la propagation de l'onde suivant ce fil constitue déjà un phénomène complexe ; le mouvement ondulatoire se déformera dans le temps et, en général, les ébranlements de forme différente se propageront de façon diverse.

§ 138. ONDE ACOUSTIQUE PLANE SINUSOIDALE

L'onde se propageant dans l'air enfermé dans un tuyau et engendrée par un piston animé d'un mouvement de va-et-vient (voir fig. 392) est une onde acoustique plane, si la fréquence des vibrations du piston se trouve dans le domaine des fréquences acoustiques (de

l'ordre de 16 à 10 000 Hz) et les amplitudes des vibrations du piston sont très faibles. Quand le piston effectue des oscillations harmoniques de pulsation ω, il devient la source d'une onde plane sinusoïdale.

Soit un piston accomplissant des oscillations harmoniques $y_0(t) = A \cos \omega t$. Les particules de gaz contiguës au piston effectueront alors des déplacements analogues au piston.

Le déplacement des particules de gaz, se trouvant à l'état de repos à la distance x des particules contiguës au piston, s'effectuera avec un retard $\tau = x/c$ nécessaire à la propagation de l'onde à la distance x. On peut donc transcrire les oscillations des déplacements de ces particules sous la forme :

$$y(x, t) = A \cos \omega (t - \tau) = A \cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right). \qquad (138.1)$$

C'est l'*expression analytique de l'onde plane mobile de forme sinusoïdale* ; elle définit pour tout instant t l'écartement de la position d'équilibre de la particule gazeuse se trouvant au repos à la distance x de l'origine. L'écart (déplacement) $y(x, t)$ est une fonction de la coordonnée x de la particule au repos de même qu'une fonction du temps t. Toutes les particules effectuent des oscillations harmoniques d'amplitude A et de pulsation ω, mais la phase des oscillations des particules de coordonnées x variées est différente. Evidemment le *front* d'onde est un plan normal à l'axe des x. La fonction

$$y = A \cos \omega \left(t + \frac{x}{c}\right)$$

est une onde sinusoïdale progressant du côté des valeurs négatives des x.

Le diagramme des déplacements à l'instant $t = T/4$ de tous les points de l'onde sinusoïdale en progression (138.1) est donné à la figure 400, *a* ; le sens positif de l'axe y signifie que le déplacement du point de coordonnée x s'effectue dans la direction des x croissants.

Il est facile de voir qu'au point *a* se produit une compression maximale et au point *b* une dilatation maximale, car derrière le point *a* les particules se sont déplacées vers l'avant, tandis que devant ce point elles se sont déplacées vers l'arrière ; au voisinage du point *b* la situation est en tous points inverse (fig. 400, *b*). Aux points *c* et *d* il n'y a pas de variation de densité, car les particules voisines ont subi des déplacements presque identiques.

La vitesse la plus grande est acquise par les particules se trouvant aux points *a* et *b*, la vitesse des particules au point *a* étant dirigée vers l'avant et celle des particules du point *b*, vers l'arrière (fig. 400, *c*). L'onde des vitesses des particules prend la forme

$$v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right). \qquad (138.2)$$

Le diagramme des vitesses de cette onde pour l'instant t est donné à la figure 400, c.

La distance entre deux points voisins effectuant des oscillations *en phase* est appelée *longueur d'onde* λ. La différence de phases d'oscillations de points se trouvant à la distance s l'un de l'autre est égale à

$$\varphi_s = \frac{\omega s}{c} = \frac{2\pi s}{cT}, \tag{138.3}$$

où $T = 2\pi/\omega$ est la période des oscillations harmoniques d'une onde sinusoïdale. Dans ce cas les points voisins oscillant en phase auront pour différence de phase 2π, ou

$$\varphi_\lambda = 2\pi = \frac{\omega\lambda}{c} = \frac{2\pi\lambda}{cT}. \tag{138.4}$$

D'où on a pour la longueur d'onde

$$\lambda = cT. \tag{138.5}$$

En s'appuyant sur cette formule, on peut donner une définition quelque peu différente de la grandeur de la longueur d'onde ; la longueur

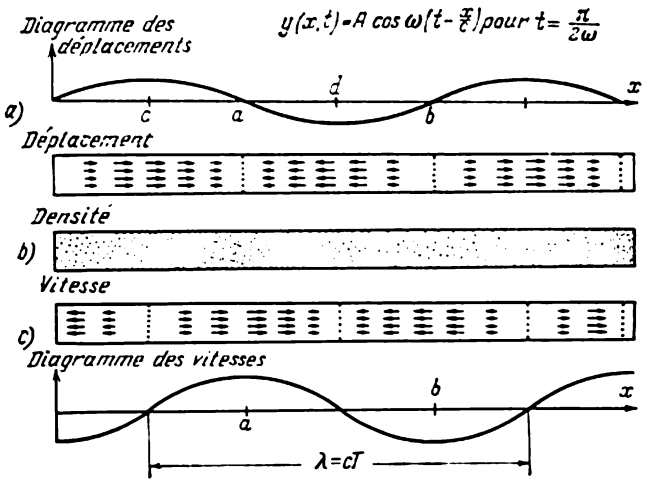


Fig. 400

d'onde est égale au chemin franchi par l'onde durant la période d'oscillation T. Il est évident que la distance entre deux condensations (ou dilatations) successives est égale à λ.

Des ondes sinusoïdales de déplacements et de vitesses identiques peuvent également se propager le long d'une longue corde tendue ; dans ce cas y (x, t) est l'écartement du point de coordonnée x dans la direction transversale à la corde à l'instant t.

En étudiant les processus pour le cas d'une onde acoustique (voir fig. 400), on a vu que l'onde de déplacements est toujours liée à l'onde de variations de densité, qui est évidemment reliée à l'onde de variations de pression, à l'onde de vitesses des particules, à l'onde des accélérations, etc; toutes ces grandeurs varient harmoniquement dans le temps (effectuent des oscillations), leurs mouvements oscillatoires se propageant dans l'espace à la vitesse c. Une situation analogue peut être suivie avec des ondes progressant le long d'une corde. On peut donc dire que le *mouvement ondulatoire constitue une propagation dans l'espace des variations de densité des particules du milieu ou de l'état de leur mouvement.*

Avec la propagation de l'état de mouvement, l'onde est le véhicule de l'énergie transmise par les particules du milieu des unes aux autres. On peut donc dire que le *mouvement ondulatoire est une des formes de distribution de l'énergie dans l'espace.*

§ 139. ÉNERGIE DE L'ONDE ACOUSTIQUE

Les particules oscillant au sein de l'onde sonore possèdent aussi bien une énergie cinétique qu'une énergie potentielle de déformation. Les particules se trouvant à l'instant donné aux endroits de condensation ou de dilatation maximale possèdent une énergie potentielle maximale de compression (ou d'extension) de même qu'une énergie cinétique maximale, car la vitesse du mouvement en ces endroits atteint la plus grande valeur (voir fig. 400, *c*), tandis que les particules se trouvant aux endroits de densité invariable sont démunies d'énergie cinétique comme d'énergie potentielle.

L'énergie cinétique des particules mobiles occupant l'unité de volume (densité de l'énergie cinétique) est

$$E_c = \frac{(\rho_0 + \rho)\, v^2}{2}, \tag{139.1}$$

ou

$$E_c \approx \frac{\rho_0 v^2}{2}, \tag{139.2}$$

où ρ_0 est la densité du milieu avant l'arrivée de l'onde, ρ la densité complémentaire due à la condensation au sein de l'onde et v la vitesse des particules. Habituellement il se produit au sein de l'onde de très faibles variations de densité et, on peut donc négliger la grandeur ρ devant ρ_0 dans la formule (139.1). La densité de l'énergie cinétique en tout point de l'onde harmonique peut être écrite ainsi:

$$E_c = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right), \tag{139.3}$$

si l'on porte dans (139.2) l'expression de l'onde de vitesses tirée de la formule (138.2).

Dans le but de déterminer l'énergie potentielle de compression en l'unité de volume, cherchons l'accroissement de la pression p. Soit p_0 la pression au repos. Les variations de la pression et du volume obéissent à la loi adiabatique (voir § 105)

$$(p_0+p)(V_0+V)^{\varkappa}=$$
$$=p_0V_0^{\varkappa}, \quad (139.4)$$

où V_0 est le volume de la particule au repos et V son accroissement dans l'onde. De (139.4) il s'ensuit que [1]

$$p=-\varkappa\frac{p_0}{V_0}V, \quad (139.5)$$

au cas où on néglige les termes de second ordre de petitesse par rapport aux grandeurs $\frac{p}{p_0}$ et $\frac{V}{V_0}$.

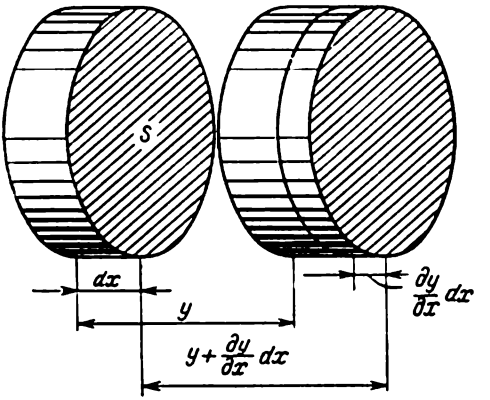


Fig. 401

Cherchons la variation du volume dans l'onde. Examinons le volume $S\,dx = V_0$, où S est l'aire de la section droite du tube. Par suite du déplacement des particules, ces dernières occupent le volume (fig. 401)

$$V_0+V=S\left(dx+\frac{\partial y}{\partial x}dx\right).$$

D'où

$$V=S\frac{\partial y}{\partial x}dx. \quad (139.6)$$

Portant (139.6) dans (139.5), on obtient la variation de pression au sein de l'onde:

$$p=-\varkappa\frac{p_0}{V_0}S\frac{\partial y}{\partial x}dx=-\varkappa\frac{p_0}{S\,dx}S\frac{\partial y}{\partial x}dx=-\varkappa p_0\frac{\partial y}{\partial x}. \quad (139.7)$$

L'accroissement de la pression au lieu considéré de l'onde est proportionnel à la dérivée du déplacement y en coordonnée x, mais de signe contraire. En se souvenant que la vitesse du son dans le milieu est $c=\sqrt{\varkappa\frac{p_0}{\rho_0}}$ (voir § 120), on peut transcrire l'expression (139.7)

---

[1] Au cours de la transformation il faut considérer que pour $\frac{V}{V_0}$ petit

$$(V_0+V)^{\varkappa}=V_0^{\varkappa}\left(1+\frac{V}{V_0}\right)^{\varkappa}\approx V_0^{\varkappa}\left(1+\varkappa\frac{V}{V_0}\right).$$

pour la pression p sous la forme

$$p = -\rho_0 c^2 \frac{\partial y}{\partial x}. \tag{139.8}$$

Donc l'onde de pressions correspond à l'onde de déplacements (138.1) et a la forme

$$p(x, t) = -\rho_0 c^2 \frac{A\omega}{c} \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) =$$

$$= -\rho_0 A\omega c \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right), \tag{139.9}$$

autrement dit, les oscillations de la pression coïncident toujours en phase avec les oscillations de la vitesse des particules (comp. (138.2) et (139.9)). Aux endroits où à l'instant donné la densité de l'énergie cinétique est la plus grande, l'énergie potentielle de compression est aussi maximale.

L'énergie potentielle est égale au travail qu'il faut dépenser pour augmenter (ou diminuer) la pression de gaz de la grandeur maximale p ou diminuer (ou augmenter) le volume V_0 de la grandeur V. Pour une petite variation de la pression et du volume $\left(\frac{p}{p_0} \ll 1, \frac{V}{V_0} \ll 1\right)$, on peut toujours considérer la variation de la pression p proportionnelle à la variation du volume V d'après (139.5). Dans ce cas le travail de compression du volume V_0 est $-\frac{pV}{2}$[1]. Aussi peut-on transcrire l'énergie de l'unité de volume ainsi :

$$E_p = \frac{pV}{2V_0}. \tag{139.10}$$

En y portant la variation de volume selon (139.6) et la variation de pression selon (139.8), on obtient la densité de l'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2} \rho_0 c^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2, \tag{139.11}$$

Donc l'onde des variations de la densité de l'énergie potentielle est :

$$E_p = \frac{1}{2} \rho_0 c^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} A \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \rho_0 A^2 \omega^2 \sin^2\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right). \tag{139.12}$$

Comparant cette expression avec celle de la densité de l'énergie cinétique (139.3), on voit qu'à tout instant du temps, en chaque point

[1] En effet, la variation de pression $p = -aV$, où a est une constante. Le travail est alors égal à $-\int_0^p p\,dV = \frac{1}{a}\int_0^p p\,dp = \frac{p^2}{2a} = -\frac{pV}{2}$.

de l'onde sonore mobile, les densités d'énergie potentielle et cinétique de la particule sont les *mêmes*. Et, par suite, la densité de l'énergie totale de l'onde est

$$E = E_c + E_p = \rho_0 A^2 \omega^2 \sin^2 \left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right). \qquad (139.13)$$

Durant un temps très petit Δt le mouvement ondulatoire se propage sur un tronçon $c\,\Delta t$; donc à travers l'unité d'aire du plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde passera une énergie

$$\Delta U_é = Ec\Delta t. \qquad (139.14)$$

Le rapport de la grandeur de l'énergie ayant traversé durant le temps Δt l'unité d'aire à l'intervalle de temps Δt est appelé *flux énergétique*. Dans le cas considéré le flux énergétique est

$$U_é = \frac{\Delta U_é}{\Delta t} = Ec = \rho_0 A^2 \omega^2 c \sin^2 \left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right). \qquad (139.15)$$

On représente le flux énergétique au moyen d'un vecteur indiquant le sens de propagation et la grandeur de l'énergie traversant en l'unité de temps l'unité d'aire. Ce vecteur est appelé *vecteur d'Oumov*.

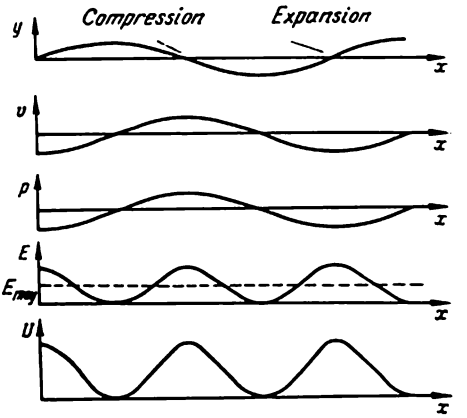


Fig. 402

Sur la figure 402 on a donné les graphiques de l'onde de déplacements, de vitesses, de pressions ainsi que la distribution de la densité d'énergie et de son flux suivant la direction de propagation de l'onde. Sur les diagrammes de la figure 402, on voit que la densité moyenne [1] de l'énergie totale est égale à la moitié de la valeur maximale de la densité d'énergie (139.13) ou

$$E_{moy} = \frac{1}{2} \rho_0 A^2 \omega^2. \qquad (139.16)$$

[1] On appelle densité moyenne soit la densité moyenne dans le temps au point donné $x = \text{const}$, soit la densité moyenne en x pour $t = \text{const}$; la première se calcule d'après la formule $E^T_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T E\,dt$ pour $x = \text{const}$ et la seconde d'après $E^x_{moy} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda E\,dx$ pour $t = \text{const}$, où $\lambda = cT$ est la longueur d'onde. Il est évident que $E^x_{moy} = E^T_{moy} = E_{moy}$.

Et par suite, la densité moyenne de l'énergie est égale à la valeur maximale de la densité cinétique (ou potentielle) d'énergie.

On a analysé le mouvement des particules et la propagation de l'énergie au sein d'une onde plane parcourant un tuyau ; le diamètre du tuyau est arbitraire et, par suite, tout ce qui vient d'être dit s'applique à *toute* onde sonore mobile harmonique.

§ 140. ONDES PLANES DANS UN GAZ ET UN MILIEU HOMOGÈNE ÉLASTIQUE

Le front d'onde d'une onde plane est un plan normal à la direction de la propagation de l'onde. Dans un tube cylindrique se propage une onde plane. On a envisagé le cas d'ondes sinusoïdales, mais on peut y rencontrer des ondes planes quelconques, comme le long d'une corde. Cherchons l'équation générale à laquelle satisfait toute onde plane (137.1) dans un milieu gazeux.

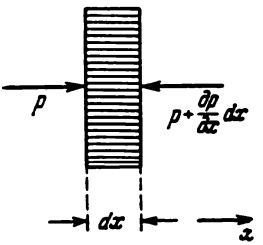


Fig. 403

Soit un petit cylindre de gaz de longueur dx (fig. 403). En appliquant la seconde loi dynamique, compte tenu des notations des §§ 138 et 139, écrivons l'égalité

$$pS-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)S=\rho_0 S\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

ou

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho_0\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \qquad (140.1)$$

En se souvenant de l'expression (139.8), on trouve que

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho_0 c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Comparant avec (140.1), il vient

$$c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (140.2)$$

qui est l'*équation d'onde* de l'onde plane dans un gaz. Il est facile de se convaincre que

$$y(x,\ t)=f\left(t\pm\frac{x}{c}\right)$$

est la solution de cette équation.

En effet,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}f'',\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=f'',$$

où f'' est la seconde dérivée de la fonction f par rapport à l'argument $t\pm\frac{x}{c}$.

La fonction f peut être toute fonction continue à argument propre et elle détermine la forme de l'onde se propageant sans distorsion à la vitesse constante c. Tous les points du plan du front d'onde correspondant à une certaine valeur de la coordonnée x possèdent à l'instant t le même déplacement y, la même pression p, la densité ρ, etc.

Les perturbations de déformation, de tensions, de déplacements peuvent également se propager en milieu constitué par un corps solide élastique et continu ou un espace occupé par une substance élastique isotrope et homogène.

Les lois de propagation des ondes élastiques de portée générale sont assez complexes, même dans un milieu homogène et isotrope. Si, pour une raison ou une autre, en un certain lieu apparaît une déformation hétérogène, des contraintes hétérogènes entraîneront alors des déformations et des déplacements des éléments voisins qui, à leur tour, se transmettront aux éléments environnants et le milieu sera le siège de propagation d'ondes élastiques.

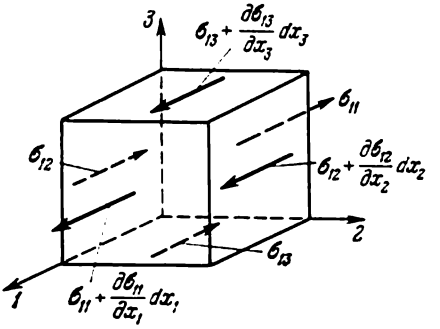


Fig. 404

Pour établir l'équation du mouvement de l'élément de volume dv, provoqué par l'action de contraintes hétérogènes, recherchons la force appliquée dans ce cas à un élément suffisamment petit $dv = dx_1\,dx_2\,dx_3$ à partir du milieu environnant. On admet que les contraintes en chaque point sont fonction des coordonnées x_1, x_2, x_3. Déterminons la composante de cette force le long de l'axe *1* (fig. 404) et écrivons tous les efforts sollicitant l'élément dv dans la direction de cet axe (voir § 85):

$$dF_1 = \left(\sigma_{11} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}\,dx_1\right) dx_2\,dx_3 - \sigma_{11}\,dx_2\,dx_3 +$$
$$+ \left(\sigma_{12} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}\,dx_2\right) dx_3\,dx_1 - \sigma_{12}\,dx_3\,dx_1 +$$
$$+ \left(\sigma_{13} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}\,dx_3\right) dx_1\,dx_2 - \sigma_{13}\,dx_1\,dx_2 =$$
$$= \left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}\right) dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

Donc la densité de la composante de la force le long de l'axe *1* sera

$$f_1 = \frac{dF_1}{dv} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}. \qquad (140.3)$$

De la même façon, on trouve

$$f_2 = \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}, \quad f_3 = \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}. \qquad (140.4)$$

Suivant la loi de la dynamique la force agissant sur le volume dv doit être égale à sa masse $\rho\,dv$ multipliée par l'accélération. Donc

$$f_1\,dv = \rho\,dv\,\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2}, \quad f_2\,dv = \rho\,dv\,\frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2}, \quad f_3\,dv = \rho\,dv\,\frac{\partial^2 s_3}{\partial t^2}, \qquad (140.5)$$

où ρ est la densité du milieu, s_1, s_2, s_3 les composantes du déplacement de la particule au point (x_1, x_2, x_3).

Pour trouver l'équation de l'onde de déplacement, il faut exprimer f_1, f_2, f_3 en fonction des composantes du déplacement s. Dans le cas général les équations (140.5) prennent une forme compliquée et leur analyse constitue un problème assez ardu. On n'examinera ici que le cas élémentaire d'onde plane. Ainsi par exemple, pour une onde plane se propageant suivant l'axe x_1 toutes les grandeurs

ne dépendront que de la coordonnée x_1 et du temps t et toutes les dérivées en x_2 et x_3 sont par conséquent nulles.

Alors il suit de (140.3) et (140.5):

$$f_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2}. \tag{140.6}$$

En se référant à (87.15): $\sigma_{11} = 2G\left(\varepsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu} 3\varepsilon\right)$, où $\varepsilon_1 = \frac{\partial s_1}{\partial x_1}$ et $3\varepsilon = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3}$. Donc

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 2G\left[\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x_1} + \frac{\mu}{1-2\mu}\frac{\partial}{\partial x_1}(3\varepsilon)\right] = 2G\left[\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} + \frac{\mu}{1-2\mu}\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2}\right].$$

Maintenant (140.6) peut s'écrire ainsi:

$$2G\left(1 + \frac{\mu}{1-2\mu}\right)\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2}; \tag{140.7}$$

c'est l'équation de la propagation de l'onde élastique longitudinale ou, tout simplement, l'*équation de l'onde plane longitudinale*, car le déplacement des particules s_1 au sein de l'onde se réalise le long de l'axe x_1, qui est la direction de propagation de l'onde. L'équation (140.7) prend la forme (140.2) et, par suite, la vitesse de propagation de l'onde de déplacements s_1 le long de l'axe x_1 est

$$c_1 = \sqrt{\frac{2G}{\rho}\left(1 + \frac{\mu}{1-2\mu}\right)} = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}. \tag{140.8}$$

La vitesse de l'onde est fonction de E, ρ et μ.

Pour les déplacements s_2 et s_3 le long des axes *2* et *3*, on peut, dans les mêmes conditions, écrire sur la base de (140.4) et (140.5) les équations suivantes:

$$f_2 = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2}, \qquad f_3 = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 s_3}{\partial t^2}. \tag{140.9}$$

De (87.6) on a $\sigma_{12} = G\gamma_{12} = G\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right)$. D'où on tire

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} = G\frac{\partial^2 s_2}{\partial x_1^2}.$$

En le portant dans l'équation (140.9), on obtient l'équation d'onde pour s_2:

$$G\frac{\partial^2 s_2}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2}. \tag{140.10}$$

De façon analogue pour s_3:

$$G\frac{\partial^2 s_3}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 s_3}{\partial t^2}.$$

La vitesse de propagation de ces ondes est

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\rho}}. \tag{140.11}$$

Ces ondes sont dites *transversales* ou de *cisaillement*; le déplacement s_2 (ou s_3) est ici normal à la direction de propagation de l'onde x_1.

Notons que pour des ondes longitudinales au sein d'une tige, la vitesse de propagation est

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (140.12)$$

En effet, si l'axe de la tige coïncide avec l'axe *1*, alors dans ce cas $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ et de l'équation générale (87.1) $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{33})]$ il suit:

$$\sigma_{11}=E\varepsilon_1, \quad \text{ou } \sigma_{11}=E\frac{\partial s_1}{\partial x_1}.$$

Donc l'équation (140.6) prend la forme:

$$E\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2}. \qquad (140.13)$$

La vitesse de propagation de ces ondes est inférieure à la vitesse des ondes longitudinales dans le milieu et supérieure à la vitesse des ondes de cisaillement dans le milieu. En effet,

$$\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \geqslant 1 > \frac{1}{2(1+\mu)}$$

$$\text{pour } \frac{1}{2} > \mu \geqslant 0. \qquad (140.14)$$

La dépendance des vitesses de propagation des ondes de la valeur du coefficient de Poisson μ est donnée à la figure 405. Pour tous ces cas les ondes sinusoïdales de toute pulsation se propagent avec la même vitesse. Cela signifie que pour ces ondes le milieu n'est pas *dispersif*, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de lien entre la vitesse de propagation et la pulsation.

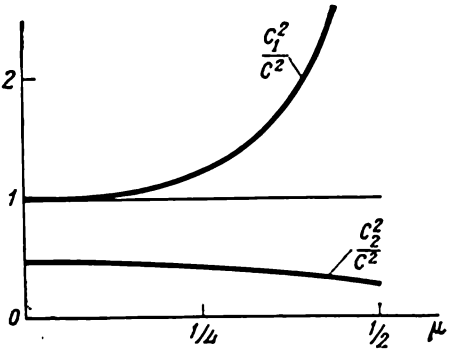


Fig. 405

Notons que les ondes planes dans l'espace infini examiné ici constituent en quelque sorte une abstraction. En réalité, ces ondes ne s'observent que soit dans un tuyau, soit dans une tige, soit dans une partie limitée de l'espace. Par exemple, les ondes planes longitudinales (ou transversales) s'observent dans une certaine zone au voisinage d'un piston rigide, entretenant des vibrations correspondantes, à peu près de la façon des ondes amorcées à la surface de l'eau par une plaque vibrante.

Dans les régions éloignées du piston, en s'écartant de la normale à sa surface, on ne rencontrera plus d'ondes planes et on y observera des vibrations ondulatoires plus complexes.

Dans un gaz, dans la région de l'espace éloignée de la source ponctuelle des ondes, les ondes peuvent être considérées comme planes si les dimensions de la région sont suffisamment petites devant la distance à la source. On peut approximativement y considérer les portions de l'onde sphérique comme à peu près planes.

§ 141. SUPERPOSITION D'ONDES (INTERFÉRENCE)

Si dans un milieu se propagent simultanément plusieurs ondes, les particules de ce milieu, comme le montre l'expérience, participent en même temps à plusieurs mouvements ondulatoires, les ondes so-

nores dans ce cas obéissant au *principe de superposition*. Le principe de superposition traduit le fait que chaque onde se propage dans le milieu *indépendamment* de l'existence d'autres ondes; chaque phénomène ondulatoire se réalise comme si les autres ondes n'existaient pas. Pour définir le mouvement de la particule du milieu, il est nécessaire de déterminer le mouvement de la particule au sein de chaque onde séparément et, ensuite, additionner tous ces mouvements.

Le phénomène de superposition de deux (ou de plusieurs) mouvements ondulatoires dans les conditions déterminées s'appelle *interférence*.

Examinons l'interférence de deux ondes sonores dans un tuyau. Supposons que dans le tuyau vibrent simultanément deux ondes de même pulsation se propageant dans des sens opposés. Posons que l'une des ondes de déplacements se propage dans le sens positif de l'axe x et est définie ainsi:

$$y_1 = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

et l'autre

$$y_2 = B\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

progresse à l'encontre de la première.

Quel sera le mouvement ondulatoire composé qui en résulte? Il est absolument évident que l'écart de chaque point de la position d'équilibre à l'instant t sera

$$y_1 + y_2 = y.$$

La seconde onde y_2 peut toujours se représenter comme la somme de deux ondes mobiles, à savoir:

$$y_2 = A\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + (B - A)\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right). \qquad (141.1)$$

Dans ce cas la vibration résultante $y(x, t)$ prend la forme:

$$y = y_1 + y_2 = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) +$$
$$+ A\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + (B - A)\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) =$$
$$= 2A\cos\frac{\omega x}{c}\cos\omega t + (B - A)\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right). \qquad (141.2)$$

Le mouvement ondulatoire résultant est composé de deux parties: *l'onde stationnaire*

$$2A\cos\frac{\omega x}{c}\cos\omega t \qquad (141.3)$$

et l'*onde mobile* (ou progressive)

$$(B - A)\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right). \qquad (141.4)$$

Pour $B = A$, c'est-à-dire quand deux ondes progressives se déplaçant dans des sens opposés ont les mêmes amplitudes, le mouvement ondulatoire résultant est une *onde stationnaire*. Le mouvement des particules dans une onde stationnaire peut être visualisé, si l'on additionne graphiquement après des mêmes laps de temps les élongations des particules de deux ondes progressives identiques, de la

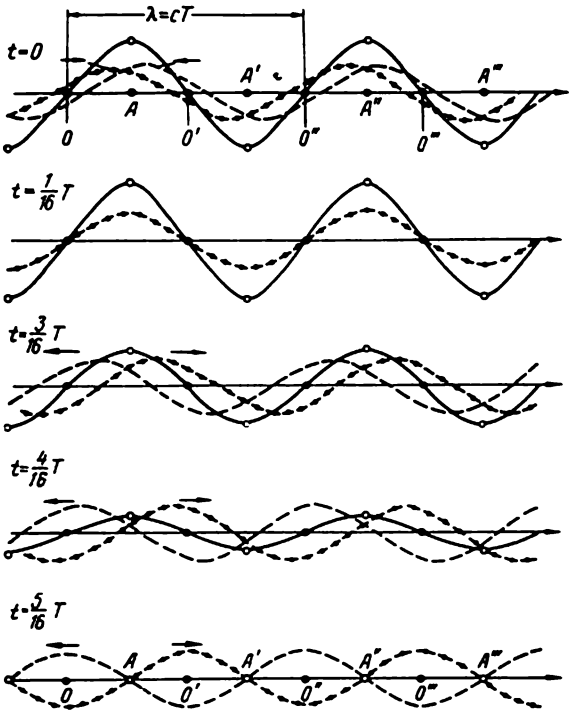


Fig. 406

manière réalisée à la figure 406, où en tireté est représentée l'onde voyageant vers la gauche, en pointillé l'onde voyageant vers la droite et en trait plein la position des particules dans l'onde stationnaire (pour mieux visualiser la construction de la figure 406, on a représenté l'onde dont la phase initiale est $-\pi/8$).

La formule (141.3) montre que toutes les particules de l'onde stationnaire vibrent soit en phase soit en opposition de phase, mais l'amplitude des vibrations de tous les points est, en général, différente ; c'est ce qu'on voit également sur la figure 406. Les particules aux points O, O', O'', . . ., sont toujours au repos ; ces points sont appelés *nœuds de l'onde stationnaire de déplacements*, leur amplitude étant nulle. Les nœuds se disposent à la distance égale à une demi-

onde $\frac{\lambda}{2}$ l'une de l'autre. Si l'on tient compte de ce que $\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega}$, l'expression de l'onde stationnaire (141.3) peut alors s'écrire ainsi :

$$2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t. \tag{141.5}$$

D'où il découle que les nœuds s'établissent au sein de l'onde donnée pour les valeurs de la coordonnée $x = \frac{2n+1}{2} \frac{\lambda}{2}$. Les particules au repos aux points A, A', A'', . . ., et marquées par de petits cercles réalisent des vibrations de plus grande amplitude ; ces points sont appelés *ventres de l'onde stationnaire de déplacements*. Les ventres correspondent aux points de coordonnées $x_n = n \frac{\lambda}{2}$, où n est un nombre entier, au cas où l'onde stationnaire répond à la formule (141.5).

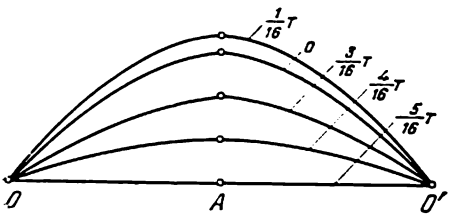


Fig. 407

Sur la figure 407, on a donné la position successive des particules entre deux nœuds $O - O'$ aux instants pour lesquels sont tracées les courbes de la figure 406. Toutes les particules se disposant entre deux nœuds voisins effectuent des vibrations harmoniques *en phase*. Elles atteignent en même temps les positions extrêmes et passent simultanément par la position du zéro, toutefois, l'*amplitude* des vibrations de toutes les particules est *différente*.

Comme les particules des nœuds sont immobiles, il n'y a pas de transfert d'énergie par les points nodaux, l'énergie ne se transmettant pas le long d'une onde stationnaire ; seules les particules entre les nœuds échangent leur énergie. Par conséquent, le mouvement dans une onde stationnaire n'est déjà plus, par essence, un mouvement ondulatoire, quoiqu'il soit dû à l'interférence de deux ondes progressives de même amplitude.

Si les amplitudes de deux ondes allant dans des sens opposés ne sont pas égales, le mouvement ondulatoire se composera d'une onde stationnaire (141.3) et d'une onde progressive (141.4) dont l'amplitude sera égale à la différence des amplitudes des ondes progressives de base. On appelle quelquefois la grandeur

$$k_\sigma = \frac{|A-B|}{B} \tag{141.6}$$

taux d'onde progressive. Si ce taux est différent de zéro l'énergie se transmet dans la direction de progression de l'onde de plus grande amplitude.

§ 142. RÉFLEXION DES ONDES

Les ondes stationnaires se forment habituellement par réflexion de l'onde progressive à la limite du milieu. L'onde, en atteignant la limite où les propriétés du milieu se modifient brusquement, se réfléchit et se superpose à l'onde incidente en formant avec elle des ondes stationnaires.

Etudions le mécanisme de réflexion des ondes sur l'exemple de la réflexion d'un ébranlement engendrant une déformation progressive le long d'un tuyau en caoutchouc tendu, d'une corde, d'une ficelle, etc.

On engendre le long du tuyau en caoutchouc tendu des ébranlements, comme cela a été montré sur la figure 393. Ces ébranlements atteignent le bout fixé du tuyau, se refléchissent et rebroussent chemin. L'expérience confirme que l'ébranlement réfléchi a la même forme que l'ébranlement incident, mais est de phase *opposée.* Si l'ébranlement incident présente une déformation vers le haut l'ébranlement réfléchi tournera sa déformation vers le bas, et inversement.

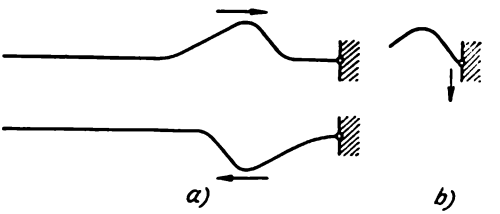


Fig. 408

Au moment de la réflexion de l'ébranlement la particule fixe du tuyau est sollicitée par une force perpendiculaire au tuyau. L'action de cette force non seulement impose un état de repos à la particule du tuyau située au point fixe, mais engendre également une onde réfléchie présentant un écartement de sens opposé (fig. 408, *a*).

En effet, si le tuyau est déformé vers le haut, la force émanant du point fixe agira alors vers le bas, ce qui correspond à une secousse dirigée vers le bas (fig. 408, *b*).

Le point fixe restant toujours immobile, l'énergie du mouvement ondulatoire ne peut donc être transmise au-delà du point fixe et, par suite, l'ébranlement réfléchi, selon le principe de conservation de l'énergie, doit prendre la forme de l'ébranlement incident. Les calculs théoriques le confirment. (On suppose évidemment que les pertes d'énergie dues à la déformation du tuyau (corde) peuvent être négligées.)

La forme de la déformation de la corde au moment de la réflexion de l'ébranlement est facile à trouver, si l'on imagine en pensée la situation suivante : l'ébranlement incident dépasse le point fixe sans distorsion, mais simultanément dans le sens inverse rebrousse chemin

un ébranlement non perturbé, de plus à chaque instant dans l'ébranlement incident l'écartement de la particule de la corde au point fixe est égal et opposé à l'écartement dans l'ébranlement réfléchi, la position réelle des points de la corde s'obtenant à tout instant par addition de ces deux ébranlements « imaginaires » [1].

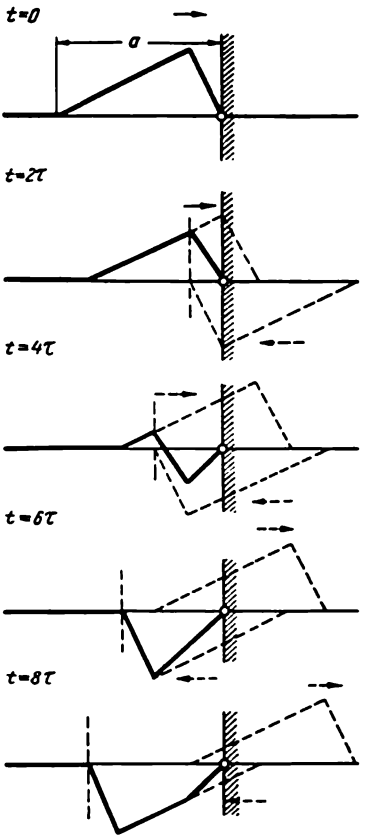


Fig. 409

Sur la figure 409 on a montré en tireté pour différents instants les ébranlements imaginaires incident et réfléchi et en trait plein, la position des points de la corde aux mêmes instants. La vitesse de l'onde est c, la longueur de l'ébranlement a, quant à sa forme elle est montrée après des laps de temps $2\tau = \frac{a}{5c}$.

Avant d'examiner la forme de la réflexion, notons que sur la figure 409 la forme de l'ébranlement est donnée pour le cas où la vitesse des particules est quatre fois plus grande sur la pente abrupte de l'onde, comparée à celle de la pente douce. Cela connu, on peut toujours, outre la forme de l'onde réfléchie, trouver les vitesses des particules de la corde en réflexion en faisant la somme géométrique des vitesses au sein des ébranlements incident et réfléchi. Ainsi, par exemple, on peut constater que le long de la section rectiligne de la corde contiguë au point fixe durant le temps s'écoulant de 2τ à 6τ, la vitesse est nulle. Les particules de la corde commenceront à acquérir sur cette section la vitesse nécessaire après $t = 6\tau$ et à partir de l'inflexion, vers le point fixe voyagera une autre déformation visible sur la corde à l'instant $t = 8\tau$. Cette déformation atteindra le point fixe pour $t = 10\tau$, quand commencera à rebrousser chemin l'onde réfléchie ayant atteint pleinement sa forme. Une étude minutieuse montre que la variation de la vitesse verticale de la particule se réalise aux instants de sa traversée par la déformation de l'on-

[1] Notons afin d'éviter une confusion que seules les parties de ces ondes situées au-delà du point fixe de la corde sont inexistantes, tandis que les ondes « imaginaires » précédant le point fixe existent en réalité et sont les composantes des ébranlements incident et réfléchi.

de, et à cet instant la particule reçoit une secousse qui est à l'origine de la variation de sa vitesse. En effet, ce n'est qu'à cet instant que les forces de tension agissant de deux côtés sur la particule de la corde engendreront une composante verticale. La force agissant sur la particule de la corde est proportionnelle à la variation (à la dérivée) de l'angle d'inclinaison du front d'onde au lieu considéré. Cette étude de la réflexion de l'ébranlement à partir d'une extrémité fixe montre qu'au cours de la réflexion la forme de l'ébranlement se déforme, mais que l'ébranlement réfléchi (qui rebrousse chemin) a le même aspect (forme) et que seule change sa phase.

Suivant le même principe s'effectue également la réflexion de l'onde sonore contre un mur immobile. Supposons que le long d'un tuyau se propage une onde sonore progressive sous forme d'un ébranlement, chaque particule subit une compression sous l'action de la

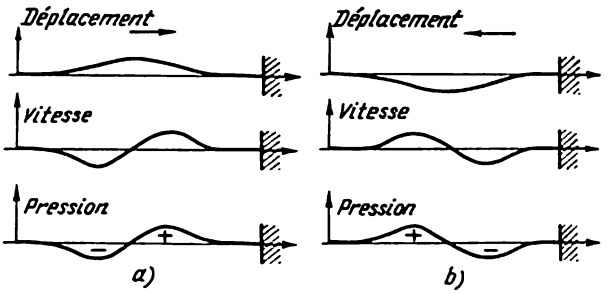


Fig. 410

particule qui la suit immédiatement, reçoit une certaine vitesse et transmet la même action à la particule voisine qui la précède, etc. Près du mur la situation est différente: les particules contiguës au mur sont comprimées, mais ne peuvent acquérir de vitesse et sont, par suite, plus comprimées que les autres particules et cette compression supplémentaire est la raison de l'onde réfléchie qui rebrousse chemin en changeant de phase. Sur la figure 410, *a* on a donné les diagrammes de différentes grandeurs de l'ébranlement progressant vers la droite : le diagramme de déplacements des particules, le diagramme de vitesses des particules et le diagramme de variation des pressions (ou des densités) et sur la figure 410, *b*, les diagrammes des mêmes grandeurs du même ébranlement après sa réflexion contre le mur immobile. Ces diagrammes montrent que devant l'onde on a toujours une condensation et que dans l'onde progressive la vitesse et la pression sont toujours en phase l'une avec l'autre.

La situation est toute différente pour une réflexion à la limite du milieu sur une extrémité libre. Ainsi, par exemple, l'onde sonore se propageant le long d'une tige d'acier élastique atteint son extrémité et rebrousse chemin, car la densité de l'air est très faible devant celle

de l'acier et le mouvement des particules de l'air environnant est sans influence sur le mouvement des particules de la tige. A l'extrémité libre de la tige les particules de l'acier se déplaceront presque identiquement à celles d'une tige placée dans le vide. L'énergie du mouvement de l'onde ne peut être transmise au-delà et, par suite, l'onde se réfléchira et rebroussera chemin.

La réflexion de l'onde transversale sur l'extrémité libre peut être suivie en réalisant l'expérience suivante (fig. 411). A l'extrémité d'un tuyau en caoutchouc on attache un fil suffisamment fin et léger dont le bout est maintenu fixe. On tend ensuite le tuyau et on observe les ébranlements provoqués par des secousses brusques du tuyau. On voit bien que les ébranlements se réfléchissent à l'endroit de la fixation du fil, d'où ils reviennent *en phase*, c'est-à-dire que l'ébranlement provoquant le déplacement des particules vers le bas, après réflexion,

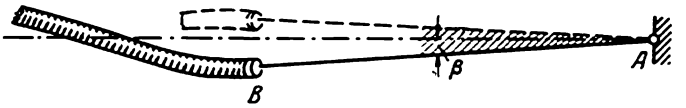


Fig. 411

engendre également un déplacement des particules vers le bas. L'extrémité du tuyau peut être considérée ici comme libre, car la densité linéaire du fil est de beaucoup inférieure à celle du tuyau, quant à la tension elle se conserve constante pour le tuyau comme pour le fil. Le fil ne peut donc recevoir qu'une très faible fraction de l'énergie transportée par l'onde et presque toute l'énergie revient à la source. L'extrémité du fil se déplacera comme si aucune force n'agissait sur lui dans le sens transversal : le fil à tout instant est une ligne droite joignant le point de fixation A à l'extrémité du tuyau B (fig. 411). L'angle d'inclinaison du fil β est infiniment petit devant celui formé par le tuyau parcouru par l'onde, on peut donc négliger la composante transversale de la tension du fil eu égard à la composante de flexion du tuyau.

L'onde réfléchie sur l'extrémité libre a la même phase que l'onde incidente. En effet, la particule de la tige d'acier se trouvant au bout libre ne peut être comprimée, car il n'y a pas de force qui puisse agir sur elle du côté de l'extrémité libre, aussi l'action subie de la part de la particule qui la précède lui imprime-t-elle une vitesse, le déplacement de cette particule devenant plus grand que celui des autres particules. Ce déplacement (qui sera de deux fois plus grand que dans l'onde incidente) engendrera l'*onde réfléchie* qui progressera à partir de l'extrémité libre. L'amplitude de l'onde réfléchie doit être égale à l'amplitude de l'onde incidente, ce qui découle du principe de conservation de l'énergie.

Les étapes successives de la réflexion de l'ébranlement de forme triangulaire sur l'extrémité libre d'une corde sont montrées sur la figure 412. L'extrémité libre subit un déplacement double à l'instant où le maximum de l'onde incidente l'atteint.

Comme il a été montré précédemment, deux ondes sinusoïdales de même pulsation et amplitude voyageant dans des directions opposées forment une *onde stationnaire*. Dans la réflexion d'une onde si-

nusoïdale voyageant le long d'un tuyau de l'extrémité fermée (ou libre) il se forme toujours dans le tuyau une onde stationnaire, si au cours de la réflexion il n'y a pas de perte d'énergie. C'est ainsi que dans un tuyau fermé aux deux bouts ou sur une corde aux extrémités fixes, il peut s'amorcer des vibrations harmoniques sous forme d'ondes stationnaires, le bout fermé du tuyau constituant un *nœud de l'onde de déplacement*; le même phénomène s'observe aux extrémités fixes de la corde.

Dans une onde stationnaire l'énergie ne se distribue pas le long de l'onde, car cette dernière ne peut être transmise par les sections du tuyau coïncidant avec les nœuds de l'onde de déplacements, les points de cette section étant constamment au repos et ne pouvant, par conséquent, transmettre le travail (l'énergie) d'une particule à l'autre. C'est seulement dans l'intervalle entre deux nœuds que l'énergie est échangée entre les particules au cours des vibrations.

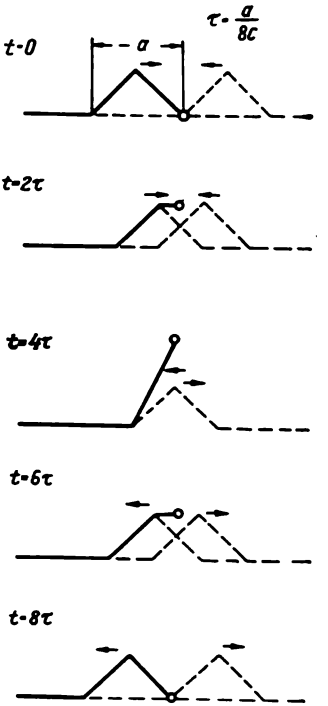


Fig. 412

En effet, à l'instant où les particules passent par la position d'équilibre $\left(\text{pour } t = \frac{5}{16}T, \text{ voir fig. 407}\right)$, elles ne possèdent toutes que de l'énergie cinétique, la vitesse la plus grande étant acquise par les particules équidistantes des nœuds; par suite l'énergie cinétique des particules (égale à l'énergie totale) est maximale au milieu et diminue progressivement vers les points nodaux. A l'instant où toutes les particules atteindront la position extrême $\left(\text{pour } t = \frac{1}{16}T\right)$, leur vitesse deviendra nulle et elles ne possèderont qu'une énergie potentielle de compression (ou de dilatation); les particules moyennes ne subiront pas de déformations, car au milieu entre les nœuds $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ et d'après la formule (139.6) la variation de pression est nulle; néanmoins les particules voisines des nœuds auront des déformations d'autant plus grandes qu'elles sont plus rapprochées des nœuds et, partant, à cet instant les particules proches des nœuds possèdent des réserves maximales d'énergie. Ainsi donc, dans une onde stationnaire, dans l'intervalle des nœuds, l'énergie voyage deux fois par période des extrémités vers le milieu de l'intervalle.

Dans une onde stationnaire, dans tout intervalle entre deux nœuds, les oscillations paraissent entretenues indépendamment des autres secteurs. Imaginons qu'aux endroits des sections *nodales* de l'onde stationnaire on ait placé dans le tuyau des parois rigides, les vibrations se réaliseront alors dans cette section du tuyau comme auparavant. Le même phénomène se reproduira pour une corde ; si l'on fixe la corde aux points nodaux de l'onde stationnaire, les vibrations continueront comme si la corde en ces endroits était libre.

§ 143. VIBRATIONS PROPRES DE LA CORDE ET DE L'AIR DANS UN TUYAU

Soit une corde tendue entre deux griffes fixes ou de l'air enfermé dans une colonne bouchée aux deux bouts. Si l'on provoque une « perturbation » initiale, qui rompra l'équilibre des particules de la corde on verra apparaître dans la corde des vibrations.

Portons un coup à la corde ou écartons-la en la lâchant ensuite ; comprimons brusquement avec un piston l'air contenu dans un tuyau puis lâchons-le et fixons le piston, etc. ; après toutes ces « perturbations » apparaîtront des vibrations qu'il est convenu d'appeler *oscillations propres de la corde* (ou oscillations propres de l'air dans un tuyau), car elles sont produites sous l'action de forces propres au système de particules oscillantes. Dans le cas général, autrement dit, après une « perturbation » quelconque, les oscillations auront un aspect assez compliqué : les particules de la corde seront animées d'oscillations périodiques complexes (si l'on néglige l'amortissement), toutes les particules vibrant de façon différente. La périodicité de ces oscillations devient évidente à la suite de raisonnements simples suivants.

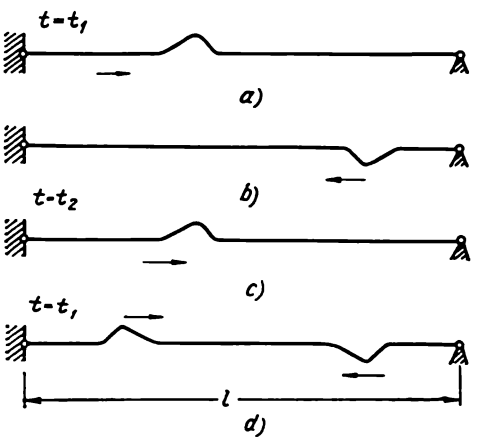


Fig. 413

Supposons que sur la corde après la perturbation apparaît un ébranlement qui voyage vers la droite. Sur la figure 413, *a* cet ébranlement est représenté pour l'instant t_1 ; après un certain temps l'ébranlement se réfléchira sur le point fixe (fig. 413, *b*) et reviendra en sens inverse, puis, après une seconde réflexion à l'instant $t = t_2$ (fig. 413, *c*), il reprendra la position initiale de l'instant $t = t_1$. Durant les intervalles de temps suivants, les particules accompliront

exactement les mêmes mouvements qu'au cours de l'intervalle de temps $t_2 - t_1$, etc. et, par suite, l'intervalle $t_2 - t_1 = T$ sera la période de vibrations de tous les points de la corde. Il est évident que le laps de temps $t_2 - t_1 = T$ est égal au temps que met l'ébranlement à parcourir la distance égale à $2l$, longueur double de la corde [1]. Donc si la vitesse de propagation de l'ébranlement est c, la période des vibrations propres de la corde sera

$$T = \frac{2l}{c}. \tag{143.1}$$

Si la « perturbation » ne se limite pas à un seul ébranlement, elle peut toujours se réduire à une somme d'ébranlements simples pour chacun desquels la conclusion sur la période des vibrations est vraie.

Il faut seulement insister sur une remarque essentielle ; la période établie suivant la formule (143.1) sera la période de vibration maximale. Il est facile de s'imaginer des perturbations initiales appropriées pour lesquelles la période de vibrations serait de deux, de trois, de quatre fois, etc. inférieure à T. En effet, supposons qu'à l'époque initiale la perturbation ait engendré deux ébranlements progressant le long de la corde qui à l'instant $t = t_1$ occupent la position montrée à la figure 413, *d*. Les ébranlements de même forme et situés à la même distance des extrémités possèdent des phases et des sens opposés. Il est facile de s'assurer que dans ce cas la période de vibrations de chaque particule est $1/2\ T$. Il est de même facile de trouver la position initiale des ébranlements pour laquelle la période de vibrations soit de $1/3\ T$, $1/4\ T$, etc.

Notons que dans le cas général les oscillations propres des particules de la corde (ou des particules de l'air dans un tuyau) seront *périodiques*, *mais non pas harmoniques*, c'est-à-dire que les vibrations de chaque particule dans le temps ne se réaliseront pas généralement suivant la loi du sinus (ou du cosinus).

Cependant, à la suite d'une certaine perturbation initiale la corde peut effectuer des vibrations *harmoniques* propres. Supposons que tous les tronçons de la corde aient été écartés de la position d'équilibre suivant la loi « sinusoïdale », comme c'est montré à la figure 414, *a*, puis lâchées. Quel sera le mouvement des particules de la corde? Il sera identique au mouvement de l'onde stationnaire de la même corde de longueur d'onde $\lambda = 2l$.

En effet, soit une corde suffisamment longue, dont la tension et la densité sont égales à la tension et à la densité d'une corde courte aux bouts fixes. Si sur la corde longue se forment des ondes stationnaires dont la distance nodale est exactement égale à la longueur l de la corde courte et l'élongation maximale y coïncide avec l'élon-

[1] Soulignons que ces raisonnements ne sont justifiés que si l'ébranlement ne change pas de forme au cours de ses voyages aller et retour.

gation initiale de la corde courte, le mouvement de la corde entre les nœuds sera identique à celui de la corde courte puisqu'ils s'effectuent sous l'action des mêmes forces et dans des conditions initiales identiques. Aussi la vibration de chaque particule de la corde sera-t-elle

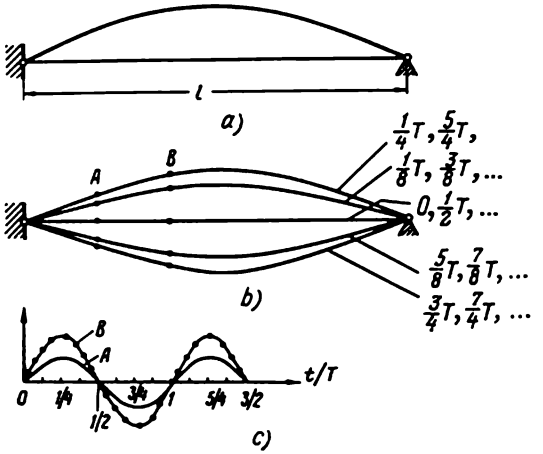


Fig. 414

harmonique, tous les points de la corde vibrant suivant la loi sinusoïdale en phase l'un avec l'autre (fig. 414, *b* et *c*).

Souvenons-nous de ce que la longueur de l'onde λ et la période des vibrations T sont liées à la vitesse de propagation de l'onde c par l'égalité suivante:

$$T = \frac{\lambda}{c}. \tag{143.2}$$

La période des vibrations et la longueur d'onde sont indépendantes de l'amplitude de l'onde, la période des vibrations propres ne dépendant également pas de l'amplitude. Des conditions (143.1) et (143.2) on tire que la période maximale des vibrations propres de la corde donnée à la figure 414, *a* est

$$T_1 = \frac{\lambda}{c} = \frac{2l}{c}.$$

Des raisonnements analogues conduisent à ce qu'après l'écartement intial de la corde, montré à la figure 415, *a*, cette dernière effectuera des vibrations harmoniques propres de période

$$T_2 = \frac{l}{c},$$

car dans ce cas $\lambda = l$.

Tandis qu'à partir de la position montrée à la figure 415, *b*, la corde effectuera des vibrations harmoniques propres de période

$$T_3 = \frac{2l}{3c},$$

car $\lambda = 2/3\ l$.

Donc la corde aux extrémités fixes peut accomplir des vibrations harmoniques propres de périodes différentes :

$$T_1 = \frac{2l}{c}, \quad T_2 = \frac{2l}{2c}, \quad T_3 = \frac{2l}{3c}, \ \ldots, \ T_n = \frac{2l}{nc}, \ \ldots, \tag{143.3}$$

suivant la position initiale. La corde possède une infinité de *périodes propres* ou une infinité de *pulsations propres*

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} = \frac{2\pi}{2l} nc = \frac{\pi nc}{l}, \tag{143.4}$$

où $n = 1, 2, 3, \ldots$ La vibration de pulsation propre ω_n quelconque acquiert à tout instant une *forme* déterminée. La forme des vibrations propres dans le cas considéré est une sinusoïde dont n demi-longueurs occupent la longueur de la corde.

Si, par contre, la perturbation est réalisée d'une autre manière, en frappant la corde ou en l'écartant de la position d'équilibre, on engendrera plusieurs vibrations propres de pulsations différentes et le mouvement résultant sera complexe, mais composé de vibrations harmoniques propres.

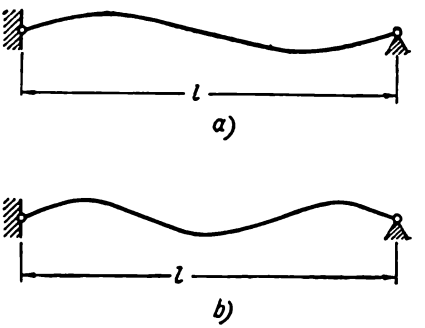


Fig. 415

Il est difficile d'observer des vibrations propres de la corde à une seule pulsation, car elles s'étouffent relativement vite (dans le temps). Il est, par conséquent, plus simple d'observer les vibrations propres d'une corde en régime d'*auto-oscillations*. Comme il a été déjà indiqué plus haut (voir § 131), les auto-oscillations se réalisent presque toujours à la pulsation proche de la pulsation propre. Aussi leur forme est-elle proche de celle des vibrations propres.

La forme des vibrations propres d'un cordon en caoutchouc tendu peut être visualisée au moyen de l'expérience suivante. Les auto-oscillations d'un cordon en caoutchouc tendu (généralement d'un tube en caoutchouc de diamètre de 3 à 5 mm) de plusieurs mètres de longueur sont engendrées au moyen d'un jet d'air projeté d'une petite buse [1] de diamètre de 1 à 2 mm (fig. 416). Si le jet est dirigé perpendiculairement au cordon, de manière qu'en position d'équilibre le cor-

[1] La source du jet d'air peut être un aspirateur ménager ou une machine soufflante.

don ne soit pas heurté de plein front par le jet, le cordon se met à vibrer à l'une de ses pulsations propres. En touchant légèrement avec la main l'endroit du nœud, on peut obliger le cordon à vibrer à toute pulsation propre. Pratiquement on arrive à obtenir successivement sur un long cordon des vibrations stables de pulsations propres allant

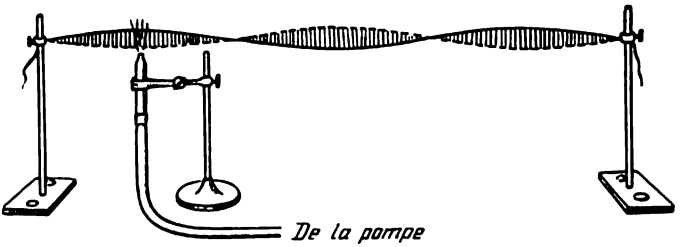


Fig. 416

de la première à la septième. La démonstration de vibrations du cordon est particulièrement illustrative en projection de l'ombre.

De façon identique il est possible d'exciter des vibrations propres d'une corde de violon à l'aide de l'archet : en appuyant légèrement et régulièrement de façon appropriée l'endroit choisi et en tournant légèrement avec le doigt le nœud du ton voulu, on peut, après

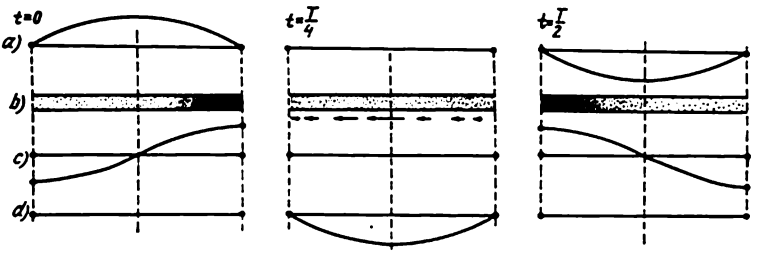


Fig. 417

un certain entraînement, imposer différentes vibrations propres à la corde. Il est difficile d'en observer la forme, mais on peut déterminer la pulsation simplement d'après la hauteur du son émis par la corde vibrante.

Les vibrations propres de la colonne d'air (ou d'un autre gaz), enfermée dans un tuyau sont absolument identiques aux vibrations propres de la corde, avec la seule différence que dans la corde les particules sont soumises à des vibrations transversales (perpendiculaires à la direction de la propagation des ondes) et dans le gaz les particules effectuent des vibrations longitudinales (le long de la direction de la propagation des ondes).

Sur la figure 417 on a donné les diagrammes des vibrations propres dans un tuyau fermé aux deux bouts, de pulsation propre inférieure

$\omega = \frac{\pi c}{l}$. On a établi sur la figure des diagrammes pour quatre grandeurs : a) de l'élongation des particules, b) de densité, c) de variation de pression et d) de vitesse, pour trois instants différents de la même période de vibration. Pour $t = 0$ toutes les particules ont une vitesse nulle et un écartement extrême à droite de la position d'équilibre ; après un quart de période, pour $t = T/4$, toutes les particules ont une vitesse maximale à gauche, mais la pression et la densité sont les mêmes pour toutes les particules se trouvant en position d'équilibre ; pour $T/2$ toutes les particules ont un écartement maximal à gauche, etc.

Les vibrations de pulsation inférieure $\omega_1 = \frac{\pi c}{l}$ (le premier ton) se présentent sous forme de condensations alternées soit vers l'une, soit vers l'autre extrémité. La compression à l'un des bouts pour $t = 0$ (voir fig. 417) s'égalise, en provoquant un mouvement des particules du côté de la dilatation ; à l'instant $t = T/4$ la compression disparaît, la densité devient régulière, mais les particules sont animées de la plus grande vitesse ; en se déplaçant plus loin « par inertie », les particules compriment de nouveau le gaz à l'autre bout ($t = T/2$), etc.

Les particules se trouvant aux *nœuds* de déplacement (aux extrémités du tuyau) ne vibrent pas et leur vitesse est toujours nulle, mais elles se trouvent aux *ventres* de pression et de densité en subissant des variations maximales de pression et de densité, tandis que les particules subissant des écartements maximaux de la position d'équilibre au cours des vibrations ou les particules se trouvant aux *ventres* de déplacement (au milieu du tuyau) n'éprouvent aucune variation de pression et de densité, car elles sont situées au *nœud* des vibrations de pression et de densité.

A l'instant $t = 0$ toutes les particules ne possèdent qu'une énergie potentielle de compression, le maximum d'énergie étant détenu par les particules des extrémités du tuyau. Après un quart de période, pour $t = T/4$, toutes les particules n'ont qu'une énergie cinétique ; la densité des particules est celle de l'état d'équilibre, l'énergie potentielle de compression est nulle et l'énergie cinétique maximale n'est détenue que par les particules du milieu du tuyau. Dans l'intervalle de ces deux instants les particules possèdent de l'énergie cinétique comme de l'énergie potentielle et durant ce laps de temps l'énergie voyage des extrémités (des ventres de pression) vers le milieu (les ventres de déplacement).

On peut produire dans un tuyau des vibrations propres de différentes périodes ; par exemple, dans un tuyau fermé aux deux bouts on ne peut obtenir que des vibrations propres pour lesquelles chaque fois sur la longueur du tuyau se dispose un nombre entier de demi-ondes. Si la première vibration comporte deux nœuds de déplacement, la seconde en aura trois, etc. L'aspect des vibrations entre deux nœuds

consécutifs de toute vibration propre sera identique à celui du premier ton (voir fig. 417).

Les vibrations propres d'un tuyau ouvert à l'un des bouts présentent un aspect différent. Les diagrammes de réparation des déplacements à l'instant de l'écartement maximal sont donnés à la figure 418, celui du haut représente la première vibration propre, et celui du bas, la seconde. Dans ce cas à l'extrémité libre du tuyau on aura toujours un ventre de déplacement, car la longueur du tuyau ne contient qu'un nombre entier impair de quarts de longueur d'onde. Les pulsations propres des vibrations de l'air dans un tel tuyau sont dans le rapport mutuel d'une série naturelle de nombres entiers impairs : 1, 3, 5, 7, . . .

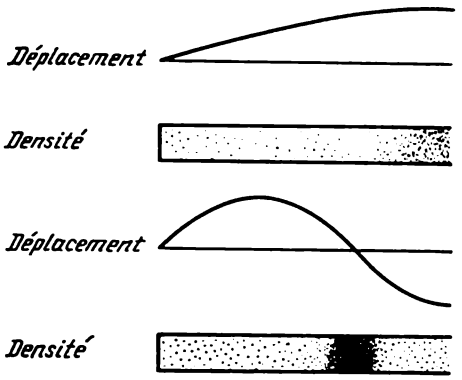


Fig. 418

Formulons la loi générale des vibrations propres. Si le système en vibration possède un degré de liberté (pendule, etc.), il accomplit des vibrations propres d'*une* pulsation. Le système à deux degrés de liberté (deux pendules accouplés) possèdent *deux* pulsations propres. Une corde qui possède une infinité de particules a un nombre infini de degrés de liberté et, par suite, un nombre *infini* de pulsations propres : ω_1, ω_2, . . . Donc, *le nombre de pulsations propres est égal au nombre de degrés de liberté.*

CHAPITRE XVI

ÉLÉMENTS D'ACOUSTIQUE

§ 144. GÉNÉRALITÉS

La perception du son est le résultat de l'action des vibrations mécaniques sur l'appareil auditif de l'homme. L'oreille humaine perçoit les vibrations de fréquence et d'intensité déterminées, c'est pourquoi les vibrations dont la fréquence se trouve dans les limites de 16 à 20 000 Hz et qui sont perçues par l'oreille sont dites *sonores* ou *acoustiques*.

Tout corps effectuant des vibrations mécaniques de fréquence comprise dans la limite indiquée devient une source du son. C'est ainsi, par exemple, que la vibration d'une corde, d'une membrane, d'une plaquette, etc, engendre des vibrations longitudinales dans le milieu environnant. Le son peut avoir pour source non seulement un corps solide, mais également un corps gazeux ou liquide, par exemple, le sifflet d'une locomotive, le tuyau d'un orgue, l'appareil vocal de l'homme, le robinet de distribution d'eau (son « chant »), etc. La source du son sont ici les vibrations du gaz ou du liquide enfermés dans un certain volume ou s'écoulant suivant certaines conduites. La source du son, en engendrant au voisinage des vibrations déterminées de densité (ou de pression), provoque également des vibrations des particules du milieu environnant qui se propagent sous forme d'ondes, en général, dans toutes les directions.

Les règles de propagation d'ondes sonores à partir de la source donnée sont fonction de la nature de la source elle-même, ainsi que des propriétés du milieu environnant. Si les dimensions de la source sont faibles, comparées à la longueur de l'onde sonore émise λ (rappelons que $\lambda = cT$, où c est la vitesse du son dans le milieu et T la période de vibrations), une telle source peut alors être considérée comme « ponctuelle » : si cette source se trouve dans un milieu homogène il en émanera alors des *ondes sphériques*.

Voyons, par exemple, quelle sera l'onde émise par le son du sifflet d'une locomotive dont la fréquence est de 350 Hz? Pour cette fréquence, dans l'air, la longueur d'onde est à peu près de 1 m, et les dimensions de l'orifice du sifflet de la locomotive de l'ordre de 1 cm, on peut donc considérer approximativement l'onde se propageant à partir du sifflet comme une onde sphérique d'une source ponctuelle. Il est évident que la présence de la Terre et des organes de la locomotive modifie la forme sphérique de l'onde, mais vers le

haut et latéralement la forme de l'onde peut être approximativement considérée (si l'air est calme) comme constituant des secteurs sphériques.

Si les dimensions de la source sont grandes comparées à celles de l'onde, la forme de l'onde propagée devient plus compliquée ; elle peut être obtenue en utilisant le principe de Fresnel-Huygens. D'après ce principe, chaque petit élément de la surface d'onde est la source d'une *onde sphérique élémentaire* et la position de la surface d'onde à l'instant suivant coïncide avec l'enveloppe des ondes élémentaires, obtenue par leur interférence. Si la surface du corps vibrant est un plan dont tous les points vibrent en phase, et si les dimensions de ce plan sont grandes comparées à la longueur de l'onde, l'onde émise sera plane et dirigée perpendiculairement au plan qui ne subit des distorsions que sur ses marges et à une certaine distance de ces dernières par suite de l'interférence des ondes élémentaires.

§ 145. RÉFLEXION DES ONDES SONORES SUR UN OBSTACLE

Les ondes sonores se réfléchissent à la limite de deux milieux différents, où les propriétés mécaniques se modifient brusquement. Par exemple, au cours du passage de l'onde de l'air dans l'eau (ou inversement) une grande partie de l'énergie se réfléchit et seule une petite fraction de l'énergie passe dans l'autre milieu.

Les ondes sonores se réfléchissent également dans l'air sur des corps solides, par exemple, sur la surface de la Terre, phénomène bien connu de chacun de l'observation de l'*écho*. Dans la réflexion des ondes sonores un rôle essentiel est joué par les variations de la densité du milieu ρ et la vitesse du son c, plus précisément par la variation de la grandeur ρc. Plus la variation de la grandeur ρc est grande, lors du passage d'un milieu à un autre, plus grande est l'énergie de l'onde sonore réfléchie à la limite de deux milieux.

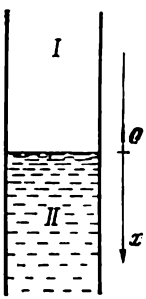


Fig. 419

Appliquons les lois de réflexion des ondes sonores au cas le plus simple de l'incidence normale de l'onde plane sur la frontière de séparation de deux milieux. Soit un long tuyau traversé suivant son axe par une onde plane, qu'on suppose rempli de diverses substances (fig. 419).

Posons que la source se trouve dans un milieu I et qu'il en émane une onde de déplacement $y_1 = a_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda_1}\right)$, où a_1 est l'amplitude, x la coordonnée suivant l'axe du tuyau, ω et λ_1 la pulsation et la longueur d'onde. De la frontière de séparation des milieux revien-

dra en sens inverse l'onde réfléchie $y_2 = a_2 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda_1} + \varphi_1\right)$ et dans le second milieu, au delà de la frontière de séparation, voyagera l'onde traversante $y_3 = a_3 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda_3} + \varphi_2\right)$. A la frontière de séparation, posons pour $x = 0$, doivent être satisfaites les conditions de continuité du déplacement

$$y_1 + y_2 = y_3 \tag{145.1}$$

ainsi que l'égalité des pressions

$$p_1 + p_2 = p_3 \tag{145.2}$$

pour tout instant t. Dans ces formules p_1 est la variation de pression dans l'onde incidente, p_2 et p_3 respectivement dans l'onde réfléchie et traversante. En vertu de la condition (145.1) (pour $x = 0$) l'égalité suivante doit être satisfaite :

$$a_1 \cos \omega t + a_2 \cos(\omega t + \varphi_1) = a_3 \cos(\omega t + \varphi_2). \tag{145.3}$$

Souvenons-nous (voir (139.7)) de ce que la pression dans une onde plane $p = -\varkappa p_0 \frac{\partial y}{\partial x}$ ($\varkappa$ est ici l'indice adiabatique) ; en y portant l'expression pour le déplacement, il vient

$$p_1 = -\varkappa_1 p_0 a_1 \frac{2\pi}{\lambda_1} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda_1}\right),$$

on obtient de même des expressions analogues pour p_2 et p_3. Portant ces expressions dans la condition (145.2), il vient

$$\frac{\varkappa_1}{\lambda_1}\{-a_1 \sin \omega t + a_2 \sin(\omega t + \varphi_1\} = -\frac{\varkappa_2}{\lambda_2} a_3 \sin(\omega t + \varphi_2). \tag{145.4}$$

Les égalités (145.3) et (145.4) doivent être satisfaites pour toute valeur de t ; dégageons donc dans chaque égalité les termes avec $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$ et égalons les coefficients associés à zéro. On obtient ainsi quatre équations pour les quatre grandeurs inconnues a_1, a_2, φ_1 et φ_2 :

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 \cos\varphi_1 = a_3 \cos\varphi_2, \quad a_2 \sin\varphi_1 = a_3 \sin\varphi_2, \\ -a_1 + a_2 \cos\varphi_1 = -\frac{\lambda_1 \varkappa_2}{\lambda_2 \varkappa_1} a_3 \cos\varphi_2, \quad a_2 \sin\varphi_1 = \\ = -\frac{\lambda_1 \varkappa_2}{\lambda_2 \varkappa_1} a_3 \sin\varphi_2. \end{aligned}\right\} \tag{145.5}$$

Résolvons ces équations. Soustrayant la quatrième de la seconde, on obtient

$$a_3(1 + \Delta)\sin\varphi_2 = 0, \text{ où } \Delta = \frac{\lambda_1 \varkappa_2}{\lambda_2 \varkappa_1} \neq 0 \quad \text{et } \Delta > 0.$$

Cela pris en considération, on voit que la dernière égalité ne peut être satisfaite que pour $\varphi_2 = k\pi$, où $k = 0, 1, 2, \ldots$ Prenant la se-

conde équation et, tenant compte de ce que $a_3 \neq 0$, on trouve que $\varphi_1 = m\pi$, où $m = 0, 1, 2, \ldots$ Soustrayant la troisième équation de la première, on obtient $2a_1 = a_3 (1 + \Delta) \cos \varphi_2$. Comme $a_3 > 0$ et $\Delta > 0$, $\cos \varphi_2 = +1$, ou $\varphi_2 = 0, 2\pi, \ldots$ Donc l'amplitude de l'onde traversante est

$$a_3 = a_1 \frac{2}{1+\Delta}. \tag{145.6}$$

En la portant dans la première équation et, tenant compte de ce que $\cos \varphi_2 = +1$, il vient

$$a_2 \cos \varphi_1 = a_1 \frac{1-\Delta}{1+\Delta}. \tag{145.7}$$

D'après ce qui précède, $\cos \varphi_1$ peut être égal à $+1$ ou -1. De la dernière égalité, étant donné que toutes les grandeurs sont positives, il vient

$$\text{pour } \Delta < 1 \quad \cos\varphi_1 = +1, \quad \varphi_1 = 0;$$
$$\text{pour } \Delta > 1 \quad \cos \varphi_1 = -1, \quad \varphi_1 = \pi.$$

Voyons maintenant les corollaires de ce calcul. La condition $\varphi_2 = 0, 2\pi, \ldots$ signifie que la phase de l'onde traversante est égale à la phase de l'onde incidente, la phase de l'onde traversante ne variant pas à la frontière. Les dernières égalités signifient que la phase de l'onde réfléchie ne peut être que zéro ou π, c'est-à-dire que l'onde réfléchie ne peut être qu'en phase ou en opposition de phase avec l'onde incidente suivant que Δ est supérieure ou inférieure à l'unité. La grandeur Δ traduit les propriétés physiques du milieu.

En se souvenant de ce que $c_1 = \sqrt{\frac{\varkappa_1 p_0}{\rho_1}}$, ou que $c_1^2 \rho_1 = \varkappa_1 p_0$, on peut l'écrire ainsi :

$$\Delta = \frac{\lambda_1 \varkappa_2}{\lambda_2 \varkappa_1} = \frac{c_1 \varkappa_2}{c_2 \varkappa_1} = \frac{c_1 \varkappa_2 p_0}{c_2 \varkappa_1 p_0} = \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}. \tag{145.8}$$

La grandeur ρc est appelée *résistance* (ou impédance) *d'onde acoustique du milieu*. La phase de l'onde réfléchie dépend du milieu dont la résistance d'onde est plus grande. Si la résistance d'onde du second milieu est plus faible, la réflexion s'effectue sans changement de phase ; et inversement, si la résistance d'onde du second milieu est plus grande, la réflexion de l'onde s'accompagne d'un renversement de phase.

Les amplitudes des ondes réfléchie et traversante dépendront du rapport des résistances d'onde du milieu (de la grandeur Δ). Ainsi, par exemple, pour l'air $\rho c \approx 43$ g/(cm^2·s) et pour l'eau $14{,}2 \cdot 10^4$ g/(cm^2·s) ; au cours du passage de l'air dans l'eau $\Delta = \frac{14{,}2}{43} 10^4 \approx 3300$. Et, par suite, l'amplitude de l'onde traversante $a_2 = a_1 \frac{2}{1+\Delta} \approx \frac{1}{1650} a_1$ correspond à peu près à la 1/1500 de l'amplitude de l'onde incidente. En passant de l'eau dans l'air, l'amplitude de l'onde

traversante est:

$$a_3 = a_1 \frac{2}{1+\frac{1}{3300}} \approx 2a_1.$$

L'amplitude des vibrations dans l'air est d'environ deux fois plus grande que celle des vibrations dans l'eau.

Si les résistances acoustiques des deux milieux sont égales, Δ est alors égale à l et $a_2 = 0$, $a_1 = a_3$, il n'y aura pas de réflexion et toute l'énergie passera dans le second milieu.

Voyons maintenant comment se réalisera la traversée de la frontière de séparation de deux milieux par l'énergie. La variation de l'amplitude au cours de la traversée de la frontière de séparation ne permet nullement de déterminer la grandeur du flux d'énergie qui la traverse.

Souvenons-nous de ce que le flux d'énergie moyen dans une onde plane se détermine par la grandeur

$$\frac{1}{2}\rho c a^2 \omega^2,$$

où a est l'amplitude de déplacement (voir § 139). Dans ce cas, tenant compte de (145.6) et de (145.8), le flux moyen d'énergie de l'onde traversante peut s'écrire ainsi:

$$E_2 = \frac{1}{2}\rho_2 c_2 a_2^2 \omega^2 = \frac{\rho_2 c_2 \omega^2 4 a_1^2}{2(1+\Delta)^2} \cdot \frac{\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1} = \frac{4\Delta}{(1+\Delta^2)} \frac{1}{2} \rho_1 c_1 a_1^2 \omega^2 = \frac{4\Delta}{(1+\Delta)^2} E_1,$$

où E_1 est le flux moyen d'énergie de l'onde incidente. La fraction de l'énergie traversant la frontière de séparation ne dépend pas du sens de propagation. En effet,

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{4\Delta}{(1+\Delta)^2} = \frac{4\Delta'}{(1+\Delta')^2},$$

où $\Delta' = \frac{1}{\Delta}$.

Ainsi, par exemple, dans une incidence normale sur la frontière de séparation eau — air (et inversement) seule la $\approx \frac{1}{825}$ partie de l'énergie passe dans l'autre milieu; le calcul se facilite en portant dans la formule de E_2/E_1 la grandeur $\Delta' \approx \frac{1}{3300}$.

§ 146. PROPAGATION DES ONDES SONORES

La propagation des ondes sonores dans des conditions normales offre une image assez compliquée. En rencontrant un obstacle, les ondes sonores le contournent facilement au cas où la longueur d'onde est de beaucoup supérieure à l'obstacle et elles réfléchissent sur cet obstacle, à peu près comme la lumière, si ce dernier est de beaucoup plus grand que la longueur d'onde.

Quand le son est répercuté par des montagnes, des murs et autres obstacles de grandes dimensions, il est facile de constater que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Aux cas où les dimensions de l'obstacle sont de l'ordre de celles de la longueur d'onde, les lois de propagation de l'onde sonore au voisinage de l'obstacle deviennent plus compliquées; on observe une réflexion partielle ainsi qu'un contournement (diffraction) comme au cas de petits obstacles (par rapport à la longueur d'onde). Notons que l'obstacle sur lequel il y a réflexion est constitué par toute frontière où la grandeur ρc, grandeur de la résistance d'onde du milieu, varie. C'est ainsi qu'une réflexion de l'onde peut être due à une couche d'air plus chaude, une frontière de brouillard, de nuage, etc.

Le phénomène de réfraction et de réflexion du son à la limite de séparation de couches d'air de température différente rend les lois de propagation du son dans l'atmosphère fort compliquées. C'est ainsi, par exemple, qu'au cours des études de l'audibilité des explosions, on a depuis longtemps observé que la réflexion des ondes sonores sur les couches de l'atmosphère se trouvant à l'altitude de 40 à 50 km rendait audible l'explosion à de grandes distances, tandis qu'elle n'était pas entendue en des endroits situés à des distances plus faibles que n'atteignait pas l'onde directe provenant de l'explosion.

L'analyse de ces observations poussa à formuler l'hypothèse de l'existence à des altitudes de 40 à 50 km de températures plus élevées; des mesures directes effectuées ces dernières années permirent de confirmer cette hypothèse.

§ 147. PERCEPTION DES SONS

L'oreille humaine perçoit les vibrations de l'air de certaines fréquence et intensité. L'intensité de l'onde sonore se mesure par la grandeur de l'énergie traversant 1 m^2 en l'unité de temps; habituellement elle est mesurée soit en W/m^2 (dans le système SI) soit en $erg/(cm^2 \cdot s)$ (dans le système CGS).

A une certaine intensité minimale, l'oreille humaine cesse de percevoir les sons; cette intensité minimale (variant suivant la fréquence) est appelée *seuil d'audibilité*.

Sur la figure 420, on a donné la courbe du seuil d'audibilité pour toute la gamme de fréquences acoustiques. Notre oreille est la plus sensible à des ondes de fréquence d'environ 3000 Hz: il suffit d'une puissance de 10^{-12} W/m^2 pour que l'oreille perçoive le son. Pour des fréquences de 50 Hz, le seuil d'audibilité est à 10^{-7} W/m^2, autrement dit l'intensité des vibrations à cette fréquence doit être d'environ 100 000 fois supérieure pour que le son soit entendu.

Si l'intensité des vibrations devient trop grande, l'oreille cesse de les percevoir comme un son et éprouve des sensations de douleur;

l'intensité au-dessus de laquelle on ressent une douleur est appelée *seuil de la douleur*. Le seuil de la douleur correspond à une intensité de l'ordre de 1 W/m² pour toutes les fréquences, comme on le voit sur la figure 420.

C'est ainsi que l'oreille perçoit une large gamme de variations d'intensité du son : de 1 à 10^{-12} W/m² ; aussi en technique préfère-t-on de mesurer les variations d'intensité non pas en fonction des variations de l'énergie d'onde (comme c'est indiqué à droite de la courbe représentée à la figure 420), mais en d'autres unités, les *décibels* (dB) (à gauche sur la figure 420).

Si une certaine intensité du son I_0 est prise pour base, à toute intensité I_1 correspondra alors une variation de niveau d'intensité

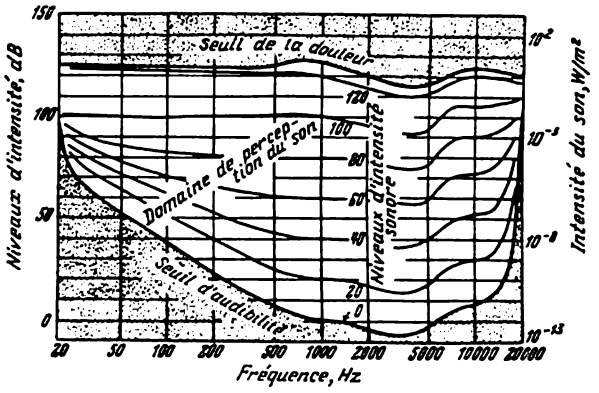


Fig. 420

de 10 log $\frac{I_1}{I_0}$ dB. Autrement dit, le nombre de décibels divisé par 10 fournira le logarithme décimal du rapport des intensités. Habituellement, on choisit I_0 égale à l'intensité du son au seuil d'audibilité pour 1000 Hz, dans ce ces le niveau d'intensité du seuil de douleur correspondra à une grandeur égale à environ 120-130 dB. Si l'on mesure le niveau d'intensité en décibels, le seuil d'audibilité à 50 Hz correspond à environ 50 dB. Le seuil d'audibilité varie avec la fréquence ; il en est de même du *volume sonore* ; les courbes d'intensité du son de même volume pour des fréquences variées sont données sur la figure 420 en trait plein.

Par exemple, le son dont le niveau d'intensité est de 20 dB à la fréquence de 1000 Hz aura le même volume que le son de 50 dB à la fréquence de 100 Hz, etc. La mesure du niveau d'intensité du son en décibels est plus simple, aussi est-elle adoptée en technique et en physique. Les courbes de même volume sonore correspondent à des grandeurs d'intensité en décibels différentes ; on a donc introduit une nouvelle unité du niveau d'intensité sonore appelée *phone*. Si

l'intensité sonore du son est de N phones, cela veut dire que le son a le même volume sonore que le son de 1000 Hz, dont l'intensité est de N dB au-dessus du seuil d'audibilité. Les sons de basse fréquence (inférieure à 1000 Hz), le volume sonore restant le même, ont une intensité supérieure aux sons de fréquences plus hautes (1000 à 3000 Hz). Le niveau du volume sonore des sons variés est à peu près le suivant : le bruit du métro à grande vitesse est de 90 à 95 phones, celui de la conversation à haute voix à la distance de 0,5 m environ 30 phones, du chuchotement de l'ordre de 10 phones.

§ 148. VIBRATIONS ULTRASONORES

Les vibrations acoustiques (plus précisément, les vibrations mécaniques du milieu ou des corps) dont les fréquences sont supérieures à 20 000 Hz, c'est-à-dire sont au-delà de l'audibilité de l'oreille, sont appelées *vibrations ultrasonores*. Les vibrations mécaniques de fréquence si élevée sont généralement obtenues par l'intermédiaire de l'effet piézo-électrique ou de la striction magnétique.

On appelle effet *piézo-électrique* la propriété des cristaux de se déformer dans un champ électrique et, inversement, de l'électriser de certaine façon s'ils sont déformés. La *striction magnétique* est un phénomène analogue se manifestant sous l'action d'un champ magnétique.

Le rôle de source d'ondes ultrasonores peut être joué par une plaque accomplissant des vibrations mécaniques de haute fréquence sous l'effet d'un champ électrique ou magnétique alternatif amené sur cette plaque à partir d'un générateur électro-magnétique de même fréquence. En examinant la situation créée par des ondes se propageant à partir d'une source d'ondes ultrasonores, il est nécessaire d'avoir en vue la petitesse de la longueur des ondes ultrasonores. C'est ainsi, par exemple, que pour une fréquence de 350 kHz la longueur de l'onde ultrasonore dans l'air est de l'ordre de 1 mm, tandis que pour 3 MHz, elle est de 0,1 mm. Donc si les dimensions de la plaque plane constituant la source de l'ultrason sont grandes, comparées à la longueur de l'onde, il sera émis à partir de la plaque une onde plane qu'on peut visualiser par un pinceau de rayons parallèles qui se propage à partir de la surface de la plaque de la façon analogue à la lumière émanant d'un projecteur. C'est justement pourquoi ces rayons ultrasonores sont utilisés pour la mesure des distances dans l'eau.

A un instant déterminé, on envoie à partir d'une source d'ultrason située sur un navire une impulsion d'ondes ultrasonores dans l'eau suivant une certaine direction. En rencontrant sur sa voie un obstacle, cette impulsion se réfléchit et au bout d'un certain temps les ondes réfléchies atteignent le récepteur du navire. Des instruments spéciaux déterminent le temps écoulé depuis l'envoi de l'im-

pulsion et l'arrivée du signal réfléchi, permettant ainsi d'évaluer la distance à l'obstacle sur lequel s'est réfléchie l'onde.

Ce principe de mesure des distances dans l'eau au moyen des impulsions ultrasonores est utilisé dans un *écho-sondeur* destiné à mesurer la profondeur des fonds marins, ainsi que dans divers sonars mesurant la distance jusqu'aux sous-marins, icebergs, etc. Ces derniers temps les vibrations ultrasonores trouvent de nombreuses applications en technique, en médecine, etc.

CHAPITRE XVII

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

§ 149. PRINCIPE DE LA RELATIVITÉ DE GALILÉE

Tous les systèmes de référence en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre sont des *référentiels de Galilée* si dans l'un d'eux (quel qu'il soit) les lois de la dynamique de Newton sont vérifiées. Dans ce cas, dans tous les référentiels de Galilée les lois de la dynamique classique prennent une même forme. C'est l'hypothèse fondamentale du *principe de la relativité de Galilée*. Tous les référentiels *galiléens* sont équivalents du point de vue dynamique, toutefois, la cinématique du mouvement par rapport à ces repères est évidemment différente.

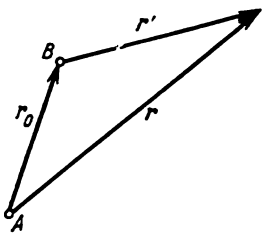


Fig. 421

Connaissant la loi du mouvement du point dans le référentiel A il est facile d'établir la loi du mouvement de ce point dans le référentiel galiléen B si l'on connaît la vitesse du mouvement du référentiel B par rapport à A.

Supposons que le référentiel B soit en mouvement de translation par rapport au référentiel A à la vitesse constante v. Alors, la dépendance entre les coordonnées d'un point arbitraire dans le référentiel A, désignée par r (x, y, z), et les coordonnées dans le référentiel B s'écrira ainsi (fig. 421):

$$r' = r - r_0, \tag{149.1}$$

et la relation liant les vitesses ainsi:

$$u' = u - v, \quad \text{où } u = \frac{dr}{dt}, \quad u' = \frac{dr'}{dt} \quad \text{et } v = \frac{dr_0}{dt}.$$

Si à l'instant $t = 0$ le vecteur $r_0 = 0$, alors $r_0 = vt$ et la relation liant les coordonnées prendra la forme

$$r' = r - vt. \tag{149.2}$$

Il va de soi que l'accélération dans les deux référentiels est la même:

$$\frac{du'}{dt} = \frac{du}{dt}.$$

Dans le but de simplifier les calculs ultérieurs, supposons que le référentiel B se meut à la vitesse v par rapport à A, de sorte que

les axes x et x' se trouvent sur une même droite (fig. 422) et sont dirigés dans le même sens ; en outre, à l'instant $t = 0$ les origines des coordonnées des deux référentiels coïncident. Dans ce cas, si à l'instant t un certain point possède les coordonnées x, y, z dans le référentiel A, ses coordonnées dans le référentiel B s'écriront alors ainsi :

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}\right\} \qquad (149.3)$$

En déduisant ces égalités, on a supposé que la durée du temps est *absolue* et *invariable* dans tous les référentiels. Cette proposition intuitive est admise sans démonstration en mécanique classique. Elle semble « naturelle », « allant de soi » et n'exigeant pas de démonstration. Cette assertion ne va pas à l'encontre de toutes les expériences de la mécanique et de la technique, tant que le mouvement des corps possède une vitesse de beaucoup inférieure à la célérité de la lumière c ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s).

Si l'on désigne de façon purement formelle le temps dans le référentiel B par t', il est toujours admis dans la mécanique de Newton que

$$t' = t. \qquad (149.4)$$

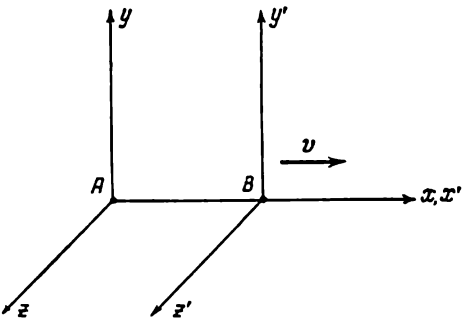


Fig. 422

Les formules (149.1) et (149.2) portent le nom de *transformations de Galilée* ; elles établissent la liaison entre les « coordonnées » d'un certain événement dans le référentiel A et les coordonnées du même événement dans le référentiel B. Par exemple, soit un point matériel mobile dans le référentiel A qui à l'instant t se trouve au point (x, y, z). Ce fait peut être considéré comme un « événement » de coordonnées x, y, z, t dans le référentiel A ; le même « événement » possède les coordonnées x', y', z', t' dans le référentiel B.

Des transformations de Galilée se dégage la loi de composition des vitesses, connue déjà dès le début de l'étude de la mécanique :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{dx}{dt} - v, \\ \frac{dy'}{dt} &= \frac{dy}{dt}, \\ \frac{dz'}{dt} &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (149.5)$$

La vitesse du corps le long de l'axe x dans le référentiel A est égale à la somme de la projection de la vitesse du même corps sur l'axe x dans le référentiel B et de la vitesse du référentiel même B égale à v.

Toutes ces relations sont simples et sont connues de la mécanique classique. On ne s'arrête sur ces expressions que pour la raison que des expressions mathématiques analogues sont également utilisées dans la formulation des propositions fondamentales de la théorie de la relativité restreinte.

En cas de transformation des coordonnées, on peut toujours mentionner certaines relations qui les lient en restant invariables dans ces transformations; ces relations sont appelées des *invariants*. Par exemple, dans la transformation de Galilée la distance entre deux points est un invariant.

Il en est de même des grandeurs mécaniques: certaines se modifient dans la transformation de Galilée et sont des grandeurs *variables*, d'autres restent constantes et sont des *invariants*. Par exemple, les coordonnées, la vitesse, l'impulsion, l'énergie cinétique, etc. sont des grandeurs variables.

Voyons comment se comporteront, au cours du passage d'un référentiel galiléen à un autre, les grandeurs mécaniques fondamentales, et comment ces transformations se répercuteront sur les lois de la dynamique et le principe de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie d'un système de particules (ou de corps).

Si le mouvement d'un système de corps (de particules) est étudié dans le référentiel galiléen A, alors après le passage dans un autre référentiel galiléen B, on voit que la quantité de mouvement (l'impulsion) et l'énergie cinétique du système de particules (de corps) se modifient aussi.

Désignons par $\boldsymbol{u}'_i$ la vitesse de la i-ème particule dans le référentiel B et par $\boldsymbol{u}_i$, dans le référentiel A; alors, d'après (149.1)

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}'_i + \boldsymbol{v}. \tag{149.6}$$

La quantité de mouvement du système de particules dans A peut s'écrire ainsi:

$$\boldsymbol{K} = \sum m_i \boldsymbol{u}_i = \sum m_i \boldsymbol{u}'_i + \sum m_i \boldsymbol{v} = \boldsymbol{K}' + m\boldsymbol{v}, \tag{149.7}$$

où $\boldsymbol{K}' = \sum m_i \boldsymbol{u}'_i$ est la quantité de mouvement du système de particules dans le référentiel B, $m = \sum m_i$ la masse du système de particules. Cette égalité est vraie pour toutes les conditions. Il s'ensuit que si la quantité de mouvement dans le référentiel A est constante dans le temps, elle le restera également dans B, car m et $\boldsymbol{v}$ sont des invariants. Il en sera ainsi dans tout référentiel galiléen. *Le principe de l'inertie se conserve dans tout système de référence de Galilée.*

L'énergie cinétique du système de particules dans le référentiel A

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i u_i^2=\frac{1}{2}\sum m_i (u_i'+v)^2=\frac{1}{2}\sum m_i u_i'^2+$$
$$+\sum m_i u_i' v+\frac{1}{2}v^2\sum m_i=T'+K'v+\frac{1}{2}mv^2, \qquad (149.8)$$

où T' est l'énergie cinétique dans B. L'égalité (149.8) montre la variation subie par l'énergie cinétique au cours du passage d'un référentiel galiléen à un autre ; elle est vraie pour toutes les conditions.

Si le système de particules (de corps) est isolé (fermé), K' est constant dans le temps. Si, en outre, les particules ne sont liées que par des interactions élastiques (par exemple, des collisions élastiques), T' conservera une valeur constante et, partant, T également (énergie cinétique dans un autre référentiel galiléen A). *Le principe de conservation de l'énergie cinétique est vrai pour tout référentiel galiléen s'il se vérifie dans l'un d'eux.*

La quantité de mouvement d'un système de particules *isolé* reste toujours *constante*, même pour des interactions inélastiques (des collisions inélastiques de particules), tandis que l'énergie cinétique diminue dans ce cas. De plus, il découle de l'égalité (149.8) que pour des systèmes de particules fermés T et T' décroissent dans le temps d'une même grandeur dans tous les référentiels galiléens. Cette décroissance est un invariant.

Il faut de même noter qu'il peut arriver que le système de particules ne soit pas isolé, quant à K' il reste constant. Cela se réalisera quand la résultante (la somme vectorielle) de toutes les forces extérieures (forces engendrées par des corps n'appartenant pas au système) est nulle. Dans ce cas l'énergie cinétique peut varier dans le temps, en outre, du fait de l'égalité (149.8), cette variation restera la même dans tous les repères galiléens. Cette variation de l'énergie est un invariant. Il se peut qu'entre les particules interviennent des forces qui ne dépendent que de la distance qui les sépare et sont dirigées suivant la ligne qui les joint (voir § 36). Dans ce cas chaque configuration de particules possède une énergie potentielle déterminée U. Les distances mutuelles entre les particules prises deux à deux ne varient pas avec le passage à un autre référentiel galiléen. L'énergie potentielle U ne varie donc pas. Et dans l'égalité (149.8), on peut ajouter le terme U ou

$$T+U=T'+U+K'v+\frac{1}{2}mv^2. \qquad (149.9)$$

Si entre des particules d'un système isolé l'interaction est telle que la somme des énergies cinétique et potentielle reste constante dans le temps, cette dernière sera alors également *constante* dans

tout référentiel galiléen. *Le principe de conservation de l'énergie est vrai pour tout référentiel galiléen.*

Les forces sont fonction des distances réciproques des corps, ou de leurs vitesses relatives, ces deux grandeurs étant des invariants. Donc la *force* est également un *invariant.*

Il s'ensuit que l'énergie cinétique et l'impulsion varient avec le passage à un autre référentiel galiléen, ce sont des grandeurs variables, tandis que l'énergie potentielle, la masse, la force sont des invariants. Les variations de l'énergie dans le temps dans les cas distingués plus haut sont également des invariants.

Il devient évident que les *trois lois de la dynamique sont vraies pour tous les référentiels galiléens.*

§ 150. INVARIANCE DE LA CÉLÉRITÉ DE LA LUMIÈRE

L'étude de la nature de la lumière et des lois de sa propagation a constitué l'un des problèmes principaux de la physique du siècle dernier. A l'époque de Newton encore le savant danois Olaüs Rœmer, en observant l'éclipse des satellites de Jupiter, a, pour la première fois, évalué approximativement la vitesse de la lumière. Suivant la théorie ondulatoire, la lumière est une ondulation qui se propage dans le milieu à la manière des ondes sonores. Quel est le milieu de propagation de la lumière et à quel système de référence peut-on relier ce milieu? Cette question s'est posée dans la seconde moitié du XIXe siècle.

Admettons que le milieu de propagation de la lumière, ou « l'éther » comme on l'appelait alors, est lié au Soleil. Dans ce cas la célérité de la lumière sur la Terre devrait dépendre de la vitesse du mouvement de la Terre dans le système des coordonnées lié au Soleil. Si la vitesse de la lumière relativement au milieu est c, alors suivant la loi de composition des vitesses, la vitesse de la lumière dans la direction du mouvement de la Terre doit être $c - v$ et dans la direction opposée $c + v$.

Quoique la vitesse du mouvement de la Terre ($v = 30$ km/s) est très grande comparée aux vitesses banales de la mécanique, elle est toutefois infiniment petite par rapport à la célérité de la lumière $c = 3 \cdot 10^5$ km/s. Aussi l'observation et la mesure de l'influence du mouvement de la Terre sur la célérité de la lumière rencontrèrent-elles de grandes difficultés. On a imaginé et mis au point des techniques très subtiles qui devaient vérifier la loi d'addition des vitesses de la lumière et de la Terre. Les premières expériences furent réalisées par Michelson et Morley en 1887 ; postérieurement les résultats d'expériences analogues ont été maintes fois vérifiés et précisés. Dans aucune de ces expériences on n'est arrivé à déceler l'influence de la vitesse du mouvement de la Terre sur la grandeur de la propagation de la lumière. La thèse suivant laquelle la célérité de la lu-

mière *n*'est constante *que* par rapport à la Terre est en contradiction avec les observations astronomiques ainsi qu'avec les autres faits d'observation.

Au terme de minutieuses et longues discussions et analyses de tous les résultats expérimentaux, les scientifiques ont abouti au début du siècle courant à la conclusion suivante : *la célérité de la lumière dans le vide est constante et ne dépend pas du mouvement de la source et du récepteur.*

Ce fait est en contradiction flagrante avec le principe de relativité de Galilée et la loi de composition des vitesses.

Pour sortir de cette impasse, A. Einstein proposa en 1905 de suivre une autre voie. Les vaines tentatives expérimentales de déceler le mouvement uniforme relativement à un référentiel absolu montrèrent que ce repère n'existait pas et que tous les référentiels galiléens se valent pour tout phénomène naturel, et cela non pas seulement en mécanique. Il a donc fallu réviser les notions fondamentales de l'espace et du temps sur la base de l'adoption de deux postulats.

1. *Tous les référentiels de Galilée* (systèmes non accélérés) *sont interchangeables.*

2. *La célérité de la lumière dans le vide est indépendante du mouvement de la source émettrice.*

Ces postulats sont le corollaire des expériences connues et des études sur la propagation de la lumière. Le premier postulat affirme qu'à tous les phénomènes de la nature s'applique « le principe de relativité restreinte » dont l'énoncé est : les lois des phénomènes physiques, quels qu'ils soient, sont les mêmes dans tous les systèmes en translation uniforme les uns par rapport aux autres, c'est-à-dire les mêmes dans tous les référentiels de Galilée. Des premier et second postulats il s'ensuit que dans tous les référentiels galiléens la vitesse de la lumière dans le vide est la même quelle que soit la direction de propagation.

§ 151. SIMULTANÉITÉ DES ÉVÉNEMENTS

Avant d'aborder l'analyse des conséquences des postulats d'Einstein, il est nécessaire d'examiner en détail la notion de simultanéité de deux événements se produisant en des lieux différents. Quand les événements se produisent presqu' au même lieu (en des endroits très proches l'un de l'autre ou au « même point ») l'enregistrement de leur simultanéité n'offre aucune difficulté, on peut les observer ou les photographier sur une pellicule, ou de s'en assurer par un autre procédé. La simultanéité des événements se déroulant en des lieux différents ne peut être constatée qu'au moyen d'un signal transmettant l'information d'un lieu à un autre.

Etant donné que la vitesse de la lumière est suffisamment grande et *constante*, Einstein a eu l'idée d'utiliser ce courrier. Il n'existe

pas dans la nature de signaux plus rapides, tout au moins, ils n'ont pas été découverts. Si la célérité de la lumière avait été infinie, on aurait pu en principe s'assurer de la simultanéité des événements se produisant dans des lieux différents de la même façon que pour des événements se déroulant au même lieu. Cette possibilité était admise en physique non relativiste et, par suite, les intervalles de temps y étaient considérés comme absolus ; on n'a pas observé de désaccords avec l'expérience, la vitesse de la lumière étant très grande devant les vitesses auxquelles on avait affaire. La vitesse de la lumière est grande, mais elle est *finie*, et pour des grandes vitesses des corps mobiles, l'influence de la finitude et de la constance de la vitesse de la lumière est sensible sur l'appréciation de la simultanéité des événements.

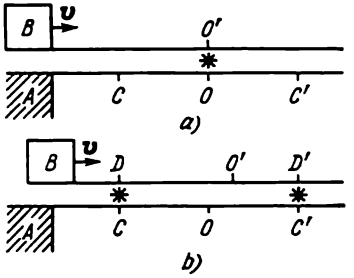


Fig. 423

Imaginons deux référentiels identiques A et B se croisant à la vitesse v (fig. 423, *a*). Ces référentiels sont schématisés par deux lignes parallèles très rapprochées, le mouvement s'effectuant le long de ces lignes et le référentiel B se déplaçant à droite par rapport au référentiel A. Supposons qu'au point O du référentiel A jaillit une étincelle qui est simultanément enregistrée au point O' du référentiel B situé en face. Si les points C et C' sont à égale distance de O, les signaux arriveront simultanément au bout d'un temps en C et C', car la vitesse de la lumière est la même dans les deux sens. C'est ainsi que sera enregistré l'événement (l'étincelle) dans le référentiel A (fig. 423, *b*). Mais dans le référentiel B mobile, ces événements simultanés (dans A) seront observés à des instants différents, la vitesse de la lumière ayant la même valeur dans le référentiel B.

En effet, durant le temps Δt de propagation de la lumière du point O jusqu'à C (ou C') le référentiel B se déplacera à droite à une certaine distance, le point O' se déplaçant de la même grandeur et les étincelles ayant jailli en C et C' arriveront aux points D et D' du référentiel B situés à des distances différentes de O'. Puisque la vitesse de la lumière est constante, on est obligé de conclure que dans B l'événement en D' *a précédé* celui de D. Autrement dit, la *simultanéité* des événements est *relative* et, partant, les intervalles de temps s'écoulant entre les deux événements sont fonction du système de référence.

Avec le changement de système de référence il faut tenir compte des changements dans le temps, car il *n'y a pas de temps absolu*. Il est évident que le retard des événements au point D dans le référentiel B par rapport aux événements au point D' est fonction de la distance CC', autrement dit de la différence de coordonnées des

événements dans le référentiel A. Il faut donc, en décrivant les événements se produisant dans le référentiel A à partir du référentiel B, tenir compte des variations du temps et de son dépendance de la coordonnée.

Il est important de remarquer que tous ces raisonnements peuvent être inversés; les événements simultanés dans B ne le sont plus dans A. Choisissons dans le référentiel B les points M et M' à des distances égales de O' (fig. 424); dans ce cas l'arrivée des signaux de la lumière aux points M et M' sera observée dans le référentiel aux points N et N' situés à des distances différentes de O, et, partant, la même conclusion se dégage. En fixant la simultanéité des événements en des points voisins (ou coïncidants) des systèmes différents: O et O', M et N, M' et N', il faut tenir compte que les distances entre ces points sont les mêmes dans B ($MO' = O'M'$), mais différents dans A ($NO < ON'$).

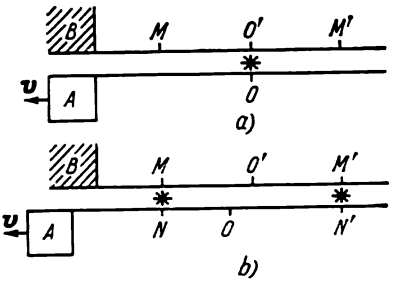


Fig. 424

Il est facile de s'assurer que pour $v \ll c$ les points O et O' ne changeront pas de place pratiquement durant le temps Δt, et les événements simultanés dans A le resteront alors dans B. Cette situation correspond à l'admission de l'hypothèse du temps absolu (le même pour tous les référentiels mobiles), c'est-à-dire du temps de Newton. Mais maintenant l'invariance du temps n'est qu'une approximation justifiée d'une loi plus générale.

Pour rendre la représentation de la variation du temps plus imagée, on se sert du procédé suivant. Supposons que dans chaque référentiel se trouvent installées, de façon suffisamment raprochée l'une de l'autre des horloges identiques marquant l'heure. Au moyen de signaux lumineux les horloges ont été synchronisées dans chacun des référentiels et marquent l'heure de façon synchrone. La synchronisation des horloges est obtenue de la manière suivante. La distance entre les horloges est divisée en deux et en ce point on fait jaillir une étincelle. Si l'arrivée de la lumière coïncide avec l'indication de la même heure sur les deux horloges, elles sont alors synchrones. Il est évident que si l'horloge a fonctionne de façon synchrone avec l'horloge b et l'horloge b est synchronisée avec l'horloge c, l'horloge a est également synchrone avec l'horloge c, etc. C'est ainsi qu'on peut synchroniser toutes les horloges de chaque système de référence. Il est admis que les distances sont toujours mesurées par un même étalon dans chacun des référentiels.

On peut maintenant énoncer la conclusion sur la relativité de la simultanéité ainsi. Des horloges synchronisées dans le référentiel A

ne fonctionneront pas de façon synchrone si elles sont observées à partir du référentiel B et inversement. L'horloge dans le référentiel A indique une heure différente, si cette dernière est marquée simultanément par les horloges de B en différents endroits du référentiel B. Cela sera exposé en plus de détail sur la base de la loi de changement de référentiel.

Notons, en outre, que si les horloges sont installées sur la ligne perpendiculaire à la vitesse du mouvement des référentiels v, les horloges synchronisées dans A le seront également dans B. En effet, après le temps Δt, quand les signaux lumineux de O atteindront les points C et C' (fig. 425), le référentiel B se déplacera à la distance $v\Delta t$, mais la distance du point O' jusqu'à C et C' est la même et, par suite ces événements seront observés dans le référentiel B simultanément. La variation du temps dans le changement de référentiels (mobiles) ne dépend que de la coordonnée dirigée suivant la vitesse v.

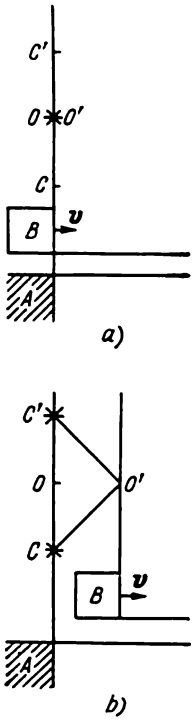


Fig. 425

§ 152. TRANSFORMATION DE LORENTZ

Maintenant on peut poser en résolvant le problème essentiel de transformation des coordonnées et du temps au cours du passage d'un référentiel galiléen à un autre. Comme il a été déjà dit, on admet que les référentiels A et B sont équivalents, les échelles de longueur et du temps étant les mêmes. Le référentiel B se déplace à la vitesse v par rapport à A le long des axes x et x' qui coïncident, de sorte qu'à l'instant $t = t' = 0$ les origines des axes des coordonnées se trouvent au même point.

Admettons qu'à l'instant $t = t' = 0$ un éclair jaillit à l'origine des coordonnées, alors dans ce cas, après un certain laps de temps t, dans le référentiel A la lumière atteindra les points situés sur la sphère de rayon ct. De façon analogue, dans le référentiel B, après le temps t', la lumière franchira la distance ct'. Autrement dit, dans le référentiel A les points de la sphère « lumineuse » satisferont à l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \tag{152.1}$$

et dans le référentiel B à l'équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2. \tag{152.2}$$

Cela découle des postulats d'Einstein.

En posant l'espace et le temps homogènes, on admet qu'entre les coordonnées et le temps des différents systèmes il existe une liaison

linéaire. Dans ce cas, entre les abscisses x et x' on peut avoir la relation suivante:

$$x' = \gamma (x - vt). \tag{152.3}$$

Elle découle de ce que le point $x' = 0$ (origine du système B) se meut à la vitesse v par rapport au système A et à l'instant $t = 0$ les points $x = 0$ et $x' = 0$ coïncident. La grandeur γ est pour l'instant un coefficient inconnu qui, pour $v \ll c$, devient égal à l'unité, comme dans la transformation de Galilée; γ semble dépendre de v et de c.

Les coordonnées y et y', z et z' ne doivent pas se modifier dans le mouvement des systèmes le long de l'axe x, ou

$$y' = y, \quad z' = z, \tag{152.4}$$

comme dans la transformation de Galilée.

Le temps t' dans le système B dépendra linéairement du temps t et de la coordonnée x dans le système A; posons donc

$$t' = at + bx, \tag{152.5}$$

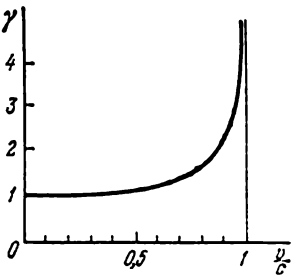


Fig. 426

où a et b sont des constantes inconnues qui pour $v \ll c$ doivent tendre $a \to 1$, $b \to 0$.

Portant (152.3), (152.4) et (152.5) dans (152.2), il vient

$$\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (at + bx)^2. \tag{152.6}$$

Les coefficients γ, a et b doivent être choisis de manière que (152.6) soit égale à (152.1). Il est évident que pour cela il faut que soient satisfaites les égalités suivantes:

$$\gamma^2 - c^2b^2 = 1, \quad \gamma^2 v + c^2 ab = 0, \quad c^2a^2 - \gamma^2 v^2 = c^2.$$

Portant b tiré de la seconde équation dans la première et tenant compte de la troisième, il vient

$$a^2 = \gamma^2.$$

La troisième équation donne alors

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}.$$

Ensuite, de la seconde équation on trouve

$$b = -\gamma \frac{v}{c^2}.$$

Le sens physique exige que γ et a soient plus grands que zéro, donc (fig. 426)

$$\gamma = a = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{152.7}$$

C'est par cette voie qu'on arrive à la transformation des coordonnées du système A en coordonnées du système B satisfaisant aux postulats d'Einstein :

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \\ x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \quad z' = z, \\ \gamma &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{152.8}$$

C'est la *transformation de Lorentz* devenue maintenant célèbre qu'il avait obtenue en étudiant la théorie des phénomènes électromagnétiques. Mais selon Einstein cette transformation est de nature universelle, car elle ne s'applique qu'à l'espace et au temps. Il est facile de voir que pour $v \ll c$, la transformation de Lorentz devient celle de Galilée.

Il est possible de résoudre les égalités (152.8) par rapport aux coordonnées du système A et retrouver la transformation réciproque, de B à A ; elle donne :

$$\begin{aligned} t &= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right), \\ x &= \gamma(x' + vt'), \\ y &= y', \quad z = z'. \end{aligned} \tag{152.9}$$

La transformation réciproque diffère de (152.8) seulement par le signe de la vitesse v, comme il devrait l'être, car le système A se déplace par rapport à B dans le sens négatif des valeurs de x'.

Notons tout d'abord que la forme du coefficient γ indique que la vitesse v est inférieure à c. Les systèmes de référence sont toujours liés à des corps matériels et, partant, leur vitesse relative ne peut pas dépasser celle de la lumière. La vitesse de la lumière est la vitesse limite des mobiles. C'est l'un des corollaires fondamentaux de la théorie de la relativité.

§ 153. CONSÉQUENCES DES TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

L'analyse des transformations de Lorentz permet d'en tirer une série de conséquences importantes découlant de la liaison entre les coordonnées et le temps.

Ecrivons tout d'abord ces transformations en accroissements :

$$\begin{aligned} &1)\ \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right), && 2)\ \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right), \\ &3)\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t), && 4)\ \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t'), \\ &5)\ \Delta y' = \Delta y, && 6)\ \Delta z' = \Delta z. \end{aligned} \tag{153.1}$$

Puisque toutes les relations (152.8) et (152.9) sont linéaires, elles se vérifient également pour les accroissements.

1. Relativité de la simultanéité. On a fourni précédemment des arguments uniquement qualitatifs à l'appui de la relativité de la simultanéité. Maintenant on peut évaluer la différence quantitative du temps observée dans différents référentiels galiléens. La durée du temps n'est liée qu'aux coordonnées x et x'.

Supposons que deux événements se soient déroulés dans le référentiel A simultanément à la distance Δx l'un de l'autre; pour ces événements $\Delta t = 0$; voyons quel sera $\Delta t'$ pour ces événements vus du référentiel B?

Portons $\Delta t = 0$ dans la première égalité de (153.1) et on obtient

$$\Delta t' = -\gamma \frac{v}{c^2} \Delta x. \qquad (153.2)$$

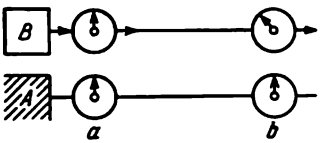


Fig. 427

Les événements simultanés dans A sont donc enregistrés en B à des instants différents. De plus, l'événement se produisant au lieu dont la coordonnée x est plus grande arrivera avant dans le référentiel B. L'avance croît avec la vitesse v et la distance Δx.

De façon analogue, les événements simultanés dans le système de référence B pour lesquels $\Delta t' = 0$ et $\Delta x' \neq 0$ sont observés dans A après le temps

$$\Delta t = \gamma \frac{v}{c^2} \Delta x', \qquad (153.3)$$

comme il s'ensuit de la seconde égalité (153.1).

On peut préciser que sur le schéma avec les horloges, pour l'observateur situé dans le référentiel A les horloges de B indiquent l'heure de façon non synchrone. Imaginons que dans chaque référentiel le long des axes x et x' s'alignent avec un faible espacement des horloges synchronisées. Dans chacun des référentiels les horloges ont été synchronisées au moyen de signaux lumineux, comme il a été indiqué auparavant (§ 151). Choisissons dans le référentiel A deux horloges a et b se trouvant à la distance Δx l'une de l'autre. Au même instant au moyen des horloges de A enregistrons les indications des horloges mobiles (du référentiel B) situées en face des horloges a et b. Ces horloges marqueront des heures différentes en accord avec (153.2); de plus, les horloges se déplaçant en tête retarderont (fig. 427).

La même situation apparaîtra si on choisit dans le référentiel B deux horloges à la distance $\Delta x'$, en enregistrant simultanément avec ces horloges les heures marquées par les horloges qui défilent devant (fig. 428).

On peut interpréter ces expériences mentales de la façon suivante. Ainsi, par exemple, dans le référentiel A on marque l'heure des horloges du référentiel B défilant devant pour des instants différents des horloges de A. Il est toujours possible de choisir Δt (différence entre les temps de marquage) de manière que les horloges défilant devant indiquent la même heure ($\Delta t' = 0$). Il s'ensuit de la première égalité de (153.1):

$$\Delta t = \frac{v}{c^2}\Delta x.$$

Il faut donc marquer l'heure sur l'horloge antérieure suivant la direction du mouvement un temps Δt *avant* (fig. 429). Les événements simultanés dans B sont observés à des époques différentes dans le référentiel A. La relativité de la marche des horloges est absolument réciproque.

2. Contraction des longueurs. Soit $l_0 = \Delta x'$ un segment dans le référentiel B pouvant être assimilé à la longueur

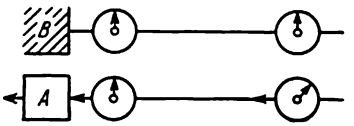


Fig. 428

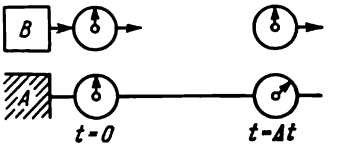


Fig. 429

d'une certaine tige se disposant le long de l'axe x'. Il est facile de mesurer la longueur de cette tige dans le référentiel B; il suffit de lui appliquer une règle graduée et de marquer avec elle les extrémités de la tige. Mais comment mesurer la longueur de cette tige dans le référentiel A par rapport auquel elle est en mouvement? On peut l'effectuer de la façon suivante: marquer dans le référentiel A les extrémités de la tige $l_0 = \Delta x'$ sur l'axe x au même instant d'après l'horloge de A; soit $l_1 = \Delta x$ le segment marqué. Il faut rechercher le lien entre $l_0 = \Delta x'$ et $l_1 = \Delta x$ pour $\Delta t = 0$. Il suit de la troisième égalité de (153.1):

$$\Delta x' = \gamma \Delta x, \quad l_1 = \frac{l_0}{\gamma}, \tag{153.4}$$

où l_0 est la longueur de la tige au repos dans le référentiel (B) et l_1 la longueur de la même tige en mouvement (dans A). La longueur de la tige au repos est plus grande que celle de la tige mobile, car $\gamma > 1$. Ou: la tige mobile « se contracte » en longueur. Il est préférable de dire que la *longueur est relative* et dépend du système de référence dans lequel elle est mesurée.

Des raisonnements analogues montrent que la tige au repos dans A et mesurée dans le référentiel B possède une longueur inférieure dans

B. Dans ce cas $\Delta x = l_0$ se détermine pour $\Delta t' = 0$. De la quatrième égalité de (153.1), il vient

$$\Delta x = \gamma \Delta x', \quad l_1 = \frac{l_0}{\gamma}. \tag{153.5}$$

La tige mobile a une longueur moindre.

Entre les formules (153.4) et (153.5) il n'y a pas de désaccord, car chaque fois on effectue des mesures différentes, le mode de mesure étant cependant pour chaque référentiel absolument le même. Dans chaque référentiel on obtient le même résultat ; la relativité des longueurs, comme celle du temps, est *réciproque*.

Les longueurs le long des axes y et z ne varient évidemment pas avec le passage du référentiel A au référentiel B et inversement. Seules varient les différences de coordonnées le long des axes x et x', autrement dit le long de la vitesse du mouvement des référentiels.

3. Ralentissement de la marche des horloges mobiles. L'horloge située dans le référentiel B est mobile par rapport au référentiel A. Quel est le lien entre les indications de cette horloge $\Delta t'$ et celles de l'horloge au repos Δt, si l'observateur se trouve dans le référentiel A ?

Durant le temps Δt l'horloge mobile se déplace de la longueur $\Delta x = v\Delta t$ et pour elle $\Delta x' = 0$; il suit donc de la première égalité de (153.1) que

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v^2}{c^2} \Delta t\right) = \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta t = \frac{\Delta t}{\gamma}, \tag{153.6}$$

car $\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$. L'intervalle de temps $\Delta t'$, marqué par l'horloge mobile, est inférieur aux indications correspondantes de l'horloge au repos. L'horloge mobile marche plus lentement. C'est ce qu'on appelle le *ralentissement* de la marche des horloges.

Notons que la condition (153.6) peut être obtenue directement de la seconde égalité de (153.1), en posant $\Delta x' = 0$.

Des raisonnements analogues sur la marche de l'horloge mobile par rapport au référentiel B permettent de conclure que

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma}, \tag{153.7}$$

où Δt sont les indications de l'horloge mobile. L'horloge mobile « retarde ».

Le ralentissement du temps peut être illustré par l'expérience mentale suivante avec des horloges. Des horloges, mobiles par rapport à A, sont confrontées à des instants différents avec des horloges synchronisées se trouvant au repos dans le référentiel A (fig. 430). Supposons qu'à l'instant $t = 0$ les indications des horloges de A et de B coïncident. Durant le temps Δt l'horloge mobile s'est déplacée en un autre lieu et indique une heure différente à celle de l'horloge qui se trouve en face, etc.

Les images des mesures des horloges synchronisées dans le référentiel B, observées à partir du référentiel A, peuvent être réunies en une seule. Sur cette image figurent plusieurs horloges mobiles (chronomètres) à des intervalles de temps égaux $\Delta t = 2$s (fig. 431). Les chiffres placés dans les ronds marquent les secondes pour chaque chronomètre à des instants déterminés de l'horloge de A. Le temps et les longueurs sont calculés pour $\gamma = 2$, ce qui correspond à $v \approx \approx 0{,}87c$. Des lignes obliques réunissent un même chronomètre dans le référentiel B. Les calculs étaient réalisés suivant les formules: $\Delta x = v\Delta t$, $\Delta t' = \Delta t/\gamma$, $\Delta t'_1 = -\gamma \frac{v}{c^2} \Delta x = (1 - \gamma^2)\, \Delta t'$. Donc

$$\Delta t' = 1 \text{ s}, \quad \Delta t = 2 \text{ s}, \quad \Delta t'_1 = -3 \text{ s}, \quad \Delta x \approx 5{,}2 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Sur la figure 431, on voit le ralentissement de la marche et, en même temps, la non-simultanéité des indications des horloges mobiles. Notez bien la grandeur des longueurs et des variations du temps. Si l'on s'était fait cette image pour $\Delta t = 2\mu$s on aurait obtenu $\Delta x \approx 520$ m.

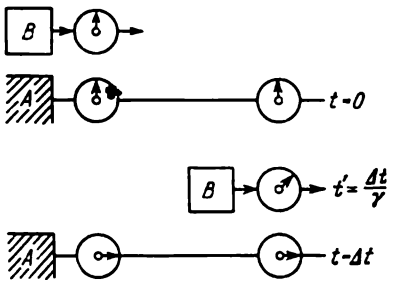


Fig. 430

On explique la longue durée de vie des mésons mobiles par ce ralentissement du temps. Les mésons sont des particules élémentaires obtenues par collision des particules très rapides avec la substance. On les observe dans le rayonnement cosmique et dans des expériences avec des accélérateurs de particules chargées. On a trouvé que le méson [1] est une particule instable qui se désintègre en moyenne au bout de 10^{-6} s.

Les mésons se rencontrent à des altitudes d'ordre 10 à 20 km, mais on les décèle également dans les laboratoires de rayons cosmiques sur la Terre. Si la vie moyenne du méson avait été constante, il aurait franchi durant ce temps une distance de l'ordre de 300 m, même si sa vitesse de déplacement avait été proche de celle de la lumière. Sa présence près de la surface terrestre s'explique par le ralentissement du temps du méson mobile. La durée de vie moyenne d'un méson au repos dans le référentiel B est $\Delta t' \sim 2 \cdot 10^{-6}$ s et correspond à l'intervalle Δt de l'horloge au repos par rapport à la Terre (référentiel A). Ces intervalles de temps satisfont à l'égalité $\Delta t = \gamma \Delta t'$ (153.6).

Durant le temps Δt le méson peut atteindre la surface de la Terre, si γ est suffisamment grand. Or pour les mésons du rayonnement

[1] On a en vue le méson mu dont la durée de vie moyenne est de $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s.

cosmique $\gamma \sim 50$ et donc, au cours du temps Δt, le méson peut franchir une distance de l'ordre

$$s \sim c\Delta t = c\gamma\Delta t' = 3 \cdot 10^8 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 30 \text{ km}.$$

Notons que pour $\gamma \sim 50$, les particules se meuvent à la vitesse inférieure à celle de la lumière de près de 60 km/s.

Les physiciens aboutissent à la conclusion que le temps se ralentit, en analysant la désintégration des particules dans les accélérateurs. On y observait aussi l'accroissement de la distance de parcours

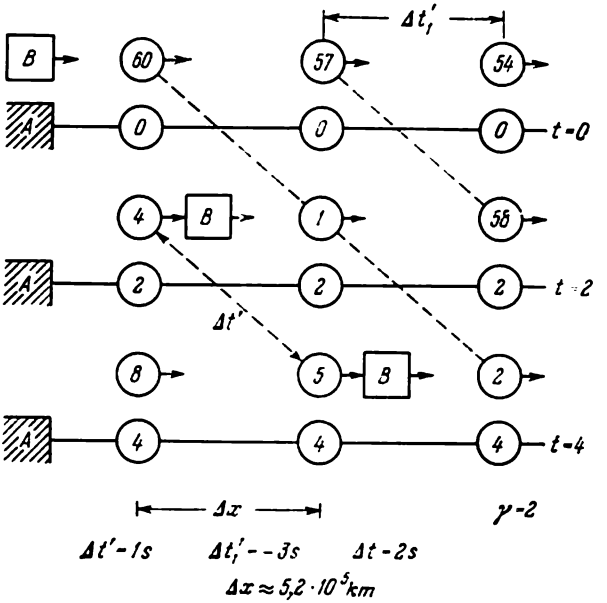


Fig. 431

des particules (à peu près de 100 fois) qui ne peut s'expliquer que par le ralentissement du temps. Les résultats obtenus dans de nombreuses expériences avec des particules extra-rapides ($\sim c$) confirment la justesse des assertions de la relativité restreinte.

4. Transformation des vitesses («composition» des vitesses). Soit une particule mobile dans le référentiel B dont la vitesse est $\boldsymbol{u}'$ (u'_x, u'_y, u'_z). La vitesse dans le référentiel B se définit comme habituellement [1] :

$$\boldsymbol{u}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'} \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right),$$

[1] On écrira dans la suite les composantes du vecteur entre parenthèses à côté du vecteur.

où r' (x', y', z') est le rayon-vecteur dans le système B. Quelle sera la vitesse de la particule dans le système A ? Elle doit évidemment être définie ainsi :

$$u = \frac{dr}{dt}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right);$$

r (x, y, z) étant le rayon-vecteur dans le système A. Des équations (153.1) se dégage la liaison suivante entre les dérivées des référentiels différents :

$$\begin{aligned} dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right), \\ dx' &= \gamma(dx - v\,dt), \\ dy' &= dy, \quad dz' = dz. \end{aligned} \tag{153.8}$$

Considérant ces égalités, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v\,dt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \delta(u_x - v), \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} = \frac{\delta}{\gamma}u_y, \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{\delta}{\gamma}u_z, \end{aligned} \tag{153.9}$$

où, à des buts de simplification, on note :

$$\delta = \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1}. \tag{153.10}$$

Rappelons que $\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$.

Utilisant la même voie, on peut montrer que

$$u_x = \delta'(u'_x + v), \quad u_y = \frac{\delta'}{\gamma}(u'_y), \quad u_z = \frac{\delta'}{\gamma}u'_z, \tag{153.11}$$

où

$$\delta' = \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^{-1}. \tag{153.12}$$

La confrontation de (153.9) et de (153.11) montre que

$$\delta\delta' = \gamma^2. \tag{153.13}$$

Notons avant tout que la loi de transformation des vitesses diffère en principe de la loi de composition des vitesses de la mécanique de Newton. Dans la transformation de Galilée, pour $v \ll c$.

$$u_x = u'_x + v, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z.$$

Maintenant la somme des vitesses le long de l'axe x est multipliée par δ', grandeur dépendant de u'_x, v et c. Les composantes de la vitesse le long des axes y et z sont également modifiées et bien que les différences de coordonnées ne varient pas, les différences entre les temps sont autres, $dt \neq dt'$.

Il est important de noter que la loi de composition des vitesses de Newton n'est pas applicable pour les vitesses de la lumière. Si dans le système B la vitesse de la lumière $u'_x = c$, dans le système A la vitesse de la lumière est également $u_x = c$. En effet, d'après (153.11)

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c,$$

comme il fallait s'y attendre, vu les postulats de base de la théorie de la relativité.

En outre, si l'on imagine que le rayon de lumière dans le système B se propage le long de l'axe y', on peut obtenir à partir de la formule (153.11), en posant $u'_y = c$, $u'_x = 0$, $u'_z = 0$, les composantes de sa vitesse dans le système A qui seront :

$$u_y = \frac{c}{\gamma}, \quad u_x = v, \quad u_z = 0,$$

tandis que la vitesse aura pour grandeur

$$\sqrt{u_x^2 + u_y^2} = c.$$

Donc le rayon de lumière se dirigeant dans le système B normalement à l'axe x' prend une autre direction dans le système A, mais la grandeur de la vitesse reste évidemment égale à c.

En se tournant de nouveau vers l'expression (153.11), on peut montrer que l'angle φ du rayon de lumière avec l'axe x se déduit dans le système A de la formule

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi'}{\gamma \left(\cos \varphi' + \frac{v}{c} \right)}$$

si dans le système B il engendre avec l'axe x' l'angle φ'. Ce changement de direction du rayon de lumière explique l'aberration des étoiles, c'est-à-dire la modification apparente de la position des étoiles dans le ciel due au mouvement de la Terre sur l'orbite. Pour une étoile au zénith, le décalage est de l'ordre de 40″ en une demi-année.

Toutes ces déductions paraissent à première vue inattendues mais elles sont les corollaires naturels des faits constatés : les systèmes galiléens sont équivalents et la vitesse de la lumière dans tous ces systèmes est la même.

Notons un rapport, important pour la suite, entre les modules des vitesses dans les référentiels A et B. Désignons

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \quad \text{et} \quad u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2,$$

il vient alors de (153.9)

$$u'^2 = \delta^2 \left[(u_x - v)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (u_y^2 + u_z^2) \right]. \tag{153.14}$$

Calculons la grandeur $1 - \frac{u'^2}{c^2}$ en omettant les opérations intermédiaires :

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = \delta^2 \left[\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{c^2} (u_x - v)^2 - \frac{1}{c^2 \gamma^2} (u_y^2 + u_z^2) \right] =$$

$$= \delta^2 \left[\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{c^2} (u_x - v)^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (u_y^2 + u_z^2) \right] =$$

$$= \delta^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{\delta^2}{\gamma^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right). \tag{153.15}$$

Vu qu'on fera souvent usage dans la suite de cette égalité, écrivons-la sous une forme abrégée :

$$\delta\alpha' = \gamma\alpha, \tag{153.16}$$

en introduisant les désignations suivantes :

$$\alpha = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \alpha' = \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{153.17}$$

(Toutes les grandeurs de (153.16) sont positives.) Considérant (153.13), on peut montrer que

$$\delta\alpha' = \gamma\alpha'. \tag{153.18}$$

En conclusion de ce paragraphe, donnons les équations de transformation de Lorentz sous une forme vectorielle. En désignant les vecteurs unitaires le long des axes x, y, z par $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ respectivement, on obtient $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$ et $\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{e}_1 + y'\boldsymbol{e}_2 + z'\boldsymbol{e}_3$. Dans ces notations

$$\boldsymbol{r}' = \gamma (x - vt) \boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 + x\boldsymbol{e}_1 - x\boldsymbol{e}_1 =$$

$$= \boldsymbol{r} + (\gamma - 1) x\boldsymbol{e}_1 - \gamma v t \boldsymbol{e}_1, \tag{153.19}$$

où la transformation des coordonnées se réduit à une seule formule. Ecrivons les égalités triviales

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{v}}{v}, \quad x = \boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}}{v}, \quad vx = \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}$$

et l'on obtient (153.19) sous une forme générale :

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}}{v^2} \boldsymbol{v} - \gamma \boldsymbol{v} t. \tag{153.20}$$

La transformation du temps prend maintenant la forme suivante :

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vr}{c^2}\right). \qquad (153.21)$$

Les formules (153.20) et (153.21) sont des transformations de Lorentz pour toute direction v et tout point r, il faut seulement se souvenir que le référentiel B est en translation par rapport au référentiel A et que $r' = r = 0$ pour $t = t' = 0$. La direction privilégiée est celle du vecteur vitesse v ; les composantes du vecteur r sont normales à v et ne varient pas. Seule la projection du vecteur r sur v et le vecteur v lui-même lient les coordonnées spatiales et le temps. Pour $\gamma \to 1$ on obtient la transformation de Galilée sous forme vectorielle :

$$t' \to t, \quad r' \to r - vt.$$

Les transformations de Lorentz montrent que le temps est inséparable de l'espace et inversement. Tous les phénomènes physiques, tous les processus se déroulant dans l'Univers ont lieu dans l'espace et le temps. L'espace et le temps constituent l'ensemble unique des conditions dans lesquelles s'effectue tout mouvement de la matière. Cela s'accorde entièrement avec la notion philosophique de l'espace et du temps comme forme de l'existence de la matière, définie par le matérialisme dialectique.

§ 154. QUANTITÉ DE MOUVEMENT (IMPULSION)

Le mouvement de vitesse comparable à celle de la lumière a été pour la première fois rencontré en physique au cours de l'étude du flux de particules chargées (électrons) émises par des substances radioactives. Sur la base des lois régissant l'action des champs électrique et magnétique sur une charge mobile, on peut déterminer la grandeur de la vitesse et la masse des électrons.

Les expériences effectuées au début du siècle courant ont montré qu'il existe un lien entre la masse d'inertie et la vitesse, ou, plus précisément, entre le rapport de la vitesse du mobile à celle de la lumière. Au début on a cru que ce n'était propre qu'aux particules chargées, soumises à l'« inertie » du champ électromagnétique entourant l'électron (« masse électromagnétique »). Or Einstein montra que la dépendance entre la masse et la vitesse est une propriété de tous les corps matériels. La variabilité de la masse des corps est une conséquence des postulats de la relativité.

En mécanique tout corps (solide, liquide ou gazeux) peut se représenter comme un ensemble des particules mobiles interagissant entre elles, c'est-à-dire comme un système de particules. Ces particules pouvant être soit des fractions suffisamment petites du corps soit des molécules, peu importe. L'essentiel est que la dimension de ces particules soit petite par rapport à celle du corps (de tout le système de particules).

Le principe de conservation de la quantité de mouvement d'un système *isolé* de particules (d'un corps isolé) peut s'interpréter comme un corollaire du principe d'inertie. Quelles que soient les variations de la vitesse des particules séparées, leur interaction aboutira à ce que la vitesse du système isolé dans son ensemble (vitesse de la translation) reste constante.

La quantité de mouvement du système de particules est la somme des impulsions des particules séparées :

$$K = \sum m_i u_i, \tag{154.1}$$

et c'est seulement en mécanique relativiste que la masse de la particule m_i est considérée comme variable. On peut introduire la vitesse *moyenne* du mouvement du système de particules de la façon suivante :

$$u = \frac{\sum m_i u_i}{\sum m_i}, \tag{154.2}$$

c'est-à-dire comme la vitesse de mouvement du système dans *son ensemble*. Cette vitesse est égale à la quantité de mouvement moyenne par unité de masse.

En mécanique newtonienne (quand m_i = const), il suit de cette définition que u est la vitesse du centre des masses du système de particules. Dans le cas considéré ce n'est pas tout à fait exact, car m_i est une grandeur variable (dépendant du temps). Aussi limitons-nous à la définition de la vitesse moyenne u par la formule (154.2), en admettant que $u\,dt$ représente une translation du système de particules en bloc (déplacement du corps) durant le temps dt. Appelons dans la suite *par convention* u vitesse « du centre des masses » du système.

Le principe de la conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé peut s'écrire ainsi :

$$K = \sum m_i u_i = u \sum m_i = mu = \text{const}, \tag{154.3}$$

où $m = \sum m_i$.

Il faut souligner que $m = \sum m_i$ est invariable, bien que chaque m_i soit variable. C'est seulement pour des K et m constants que la vitesse u sera constante, ou le principe de l'inertie exige que la masse du *système isolé reste invariable*.

§ 155. DÉPENDANCE ENTRE LA MASSE ET LA VITESSE DE MOUVEMENT

Abordons maintenant le problème fondamental : la détermination de la dépendance entre la masse et la vitesse de mouvement. Pour cela il faut poser qu'en passant du référentiel B au référen-

tiel A l'égalité

$$\sum m_i' u_i' = u' \sum m_i'$$

se transforme en

$$\sum m_i u_i = u \sum m_i, \tag{155.1}$$

où m_i' est la valeur de la masse de la i-ème particule dans le référentiel B ; en outre, u_i' et u' se transforment en u_i et u en conformité avec les formules de Lorentz (153.9). De là on peut dégager la dépendance de la masse de la vitesse et, ensuite, les lois de transformation des masses et de la quantité de mouvement au cours du passage du référentiel B au référentiel A.

Par souci de simplicité des calculs examinons le système composé de deux particules seulement en posant de plus que la quantité de mouvement par rapport à B est nulle, ou

$$\begin{aligned} m_1' u_{1x}' + m_2' u_{2x}' &= 0, \\ m_1' u_{1y}' + m_2' u_{2y}' &= 0, \\ m_1' u_{1z}' + m_2' u_{2z}' &= 0. \end{aligned} \tag{155.2}$$

Donc la vitesse du centre des masses dans le référentiel B est nulle, et, par suite, par rapport à A, elle est égale à v,qui est la vitesse de mouvement du référentiel B. On peut le vérifier aussi au moyen des formules (153.11) : $u_x' = 0$, $u_y' = u_z' = 0$, donc $u_x = v$, $u_y = u_z = 0$.

Examinons d'abord la composante de la quantité de mouvement du système de particules le long de l'axe x. Dans le référentiel A cette composante est égale à

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = (m_1 + m_2) v. \tag{155.3}$$

Portant dans la première égalité de (155.2) les vitesses par rapport au référentiel A, on tire de (153.9) que

$$\delta_1 m_1' (u_{1x} - v) + \delta_2 m_2' (u_{2x} - v) = 0.$$

Récrivons l'égalité (155.3) de la sorte :

$$m_1 (u_{1x} - v) + m_2 (u_{2x} - v) = 0. \tag{155.4}$$

On obtient deux équations uniformes par rapport à deux grandeurs inconnues (se trouvant entre parenthèses). Ces équations n'ont des racines différentes de zéro que si

$$\delta_1 m_1' m_2 - \delta_2 m_2' m_1 = 0. \tag{155.5}$$

Portons-y les valeurs de δ_1 et δ_2 tirées de la formule (153.16) :

$$\frac{\gamma\alpha_1}{\alpha_1'} m_1' m_2 = \frac{\gamma\alpha_2}{\alpha_2'} m_2' m_1.$$

En simplifiant par γ, on a l'égalité :

$$\frac{\alpha_1 m_1'}{\alpha_1' m_1} = \frac{\alpha_2 m_2'}{\alpha_2' m_2}. \tag{155.6}$$

A gauche, on n'a que des grandeurs dépendant des propriétés et des caractéristiques de la première particule et à droite, rien que de la seconde particule. Donc l'égalité (155.6) n'a lieu que quand les deux membres sont égaux à une constante, par exemple à D. Alors

$$\frac{m_1'}{m_1} = D\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}, \quad \frac{m_2'}{m_2} = D\frac{\alpha_2'}{\alpha_2}.$$

Profitons des notations (153.17) pour α_1 et α_1' et écrivons la première égalité sous la forme :

$$\frac{m_1'}{m_1} = D\frac{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u_1'^2}{c^2}}}. \tag{155.7}$$

De là se dégage la dépendance de la masse de la particule du module de la vitesse.

Soit dans le référentiel B $u_1' = 0$ la vitesse de la particule au repos, et, par suite, sa masse m_1' est égale à m_{10}, c'est-à-dire à la masse de la particule *au repos*. Alors de (155.7) il découle que la masse de la première particule dans le référentiel A est

$$m_1 = \frac{1}{D}\frac{m_{10}}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}}. \tag{155.8}$$

Cette égalité doit être vraie également pour $u_1 \ll c$ (cas de la mécanique newtonienne), et alors $m_1 = m_{10}$, donc $D = 1$. Une égalité analogue sera de même obtenue pour la seconde particule.

Donc toute particule mobile par rapport à A avec la vitesse u a pour masse

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = m_0\alpha, \tag{155.9}$$

où m_0 est la masse de la particule au repos (ou mobile avec la vitesse $u \ll c$) et u étant le module de la vitesse.

Dans la suite on ne notera pas la masse au repos par m_0 et elle sera désignée tout simplement par m. La masse de la particule mobile avec la vitesse u par rapport à A s'écrira alors sous forme d'un produit

$$m\alpha = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \tag{155.10}$$

tandis que la masse de la même particule dans le référentiel B aura la forme du produit

$$m\alpha' = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}. \tag{155.11}$$

La dépendance de la masse de la vitesse est une des propositions fondamentales de la mécanique d'Einstein : la masse *d'inertie* dépend de la grandeur de la vitesse, ou plus exactement, du *rapport* de la vitesse à la vitesse de la lumière ; avec l'augmentation de la vitesse, l'inertie du corps croît et pour $u \to c$, tend vers ∞. Il en résulte que pour $m > 0$ aucun corps ne peut atteindre la vitesse c.

Les expériences sur des accélérateurs dans le but de l'étude des particules extra-rapides aux vitesses proches de celle de la lumière ont confirmé sans ambiguïté la dépendance de la masse de la vitesse ainsi que l'exactitude de la formule (155.9).

§ 156. TRANSFORMATION DE L'IMPULSION ET DE LA MASSE

La dépendance de la masse de la vitesse a été dégagée au cours de la transformation de la projection de la quantité de mouvement du système composé de deux particules sur l'axe x, sur lequel s'effectuait le mouvement du référentiel. Et il n'en faut pas plus pour déterminer la variation de la quantité de mouvement, quand on passe d'un système galiléen à un autre. Tout d'abord les composantes de la vitesse du centre des masses le long des axes y' et z' étaient nulles dans le référentiel B et elles le resteront dans le référentiel A. Ensuite si la masse est fonction de la vitesse, en accord avec la formule (155.10), les composantes de la quantité de mouvement le long des axes y' et z' de chacune des particules, comme on le montrera plus tard, resteront invariables quand on passe dans le référentiel A.

La masse dépend de la vitesse suivant la formule (155.10). Aussi la quantité de mouvement (impulsion) de la particule dans le référentiel A se définit-elle ainsi :

$$\boldsymbol{K} = m\alpha\boldsymbol{u} = \frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{156.1}$$

Dans le référentiel B la quantité de mouvement de la même particule est

$$\boldsymbol{K}' = m\alpha'\boldsymbol{u}'. \tag{156.2}$$

En se souvenant de la transformation des vitesses, on peut déduire la transformation des composantes de la quantité de mouvement $\boldsymbol{K}$ quand on passe dans le référentiel B. Prenons la composante

K'_x dans le référentiel B :

$$K'_x = m\alpha' u'_x.$$

En se souvenant de ce que $u'_x = \delta\,(u_x - v)$, et $\delta = \frac{\gamma\alpha}{\alpha'}$ et utilisant (153.16), il vient

$$K'_x = m\alpha'\delta\,(u_x - v) = \gamma m\alpha\,(u_x - v),$$

ou

$$K'_x = \gamma\,(K_x - vm\alpha). \tag{156.3}$$

Notons que la composante K'_x varie de façon analogue à la coordonnée x', si l'on remplace x par K_x et t par $m\alpha$.

Examinons maintenant les composantes K'_y et K'_z. Il suffit d'en examiner une seule. Par définition

$$K'_y = m\alpha' u'_y;$$

en se souvenant de ce que $u'_y = \frac{\delta}{\gamma} u_y$ et considérant (153.16), il vient :

$$K'_y = m\alpha' \frac{\delta}{\gamma} u_y = m\alpha u_y = K_y. \tag{156.4}$$

La projection de la quantité de mouvement de la particule sur l'axe y (et sur l'axe z) ne varie pas, comme les coordonnées y et z qui restent aussi invariables. Donc les projections de la quantité de mouvement se transforment de la même façon que les coordonnées quand on passe du référentiel B au référentiel A (la réciproque est évidemment également vraie). Seulement au lieu du temps t dans la formule de transformation entre la masse $m\alpha$.

Il est naturel d'établir le lien entre $m\alpha'$ et $m\alpha$, c'est-à-dire de trouver la loi de transformation de la masse. Cela ne présente pas de difficulté, il suffit d'effectuer un changement de grandeur suivant les mêmes formules (153.10) et (153.16) :

$$m\alpha' = m\frac{\gamma\alpha}{\delta} = \gamma m\alpha\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right),$$

ou

$$m\alpha' = \gamma\left(m\alpha - \frac{K_x v}{c^2}\right). \tag{156.5}$$

Ici également, comme il fallait s'y attendre, la même analogie apparaît : $t \sim m\alpha$ et $x \sim K_x$.

Ainsi donc la masse $m\alpha$ de même que la quantité de mouvement K sont des grandeurs *relativistes*. Cette dernière circonstance était inconnue avant la physique relativiste.

Il est utile d'écrire toutes les formules de transformation de la masse et de l'impulsion en les réunissant :

$$m\alpha' = \gamma\left(m\alpha - \frac{vK_x}{c^2}\right),$$
$$K'_x = \gamma(K_x - vm\alpha), \tag{156.6}$$
$$K'_y = K_y,\ K'_z = K_z.$$

Le temps t et le vecteur de position $\boldsymbol{r}$ (x, y, z) se transforment dans le passage du référentiel A au référentiel B, de la même façon que se transforment la masse $m\alpha$ et le vecteur de la quantité de mouvement $\boldsymbol{K}$ d'une particule quelconque. Il est évident que les formules de la transformation inverse, de B en A, ont la même forme, le signe positif de la vitesse v excepté.

Par analogie avec (153.20), on peut écrire (156.6) sous une forme vectorielle :

$$m\alpha' = \gamma\left(m\alpha - \frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}}{c^2}\right),$$
$$\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{K} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v} - \gamma m\alpha\boldsymbol{v}. \tag{156.7}$$

Tout corps peut être assimilé à une particule au cas d'un mou vement de translation, car l'impulsion du corps est

$$\boldsymbol{K} = m\alpha\boldsymbol{u},$$

où m est la masse du corps au repos (pour $u \ll c$) et $\boldsymbol{u}$ sa vitesse. La seconde loi de la dynamique pour un corps mobile dans un système galiléen s'énonce de la façon faite déjà par Newton (voir § 19) : la force est égale à la dérivée de la quantité de mouvement, ou

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\alpha\boldsymbol{u}) = m\frac{d}{dt}(\alpha\boldsymbol{u}). \tag{156.8}$$

Utilisant cette loi, on peut résoudre le problème du mouvement du corps animé de grandes vitesses, si l'on connaît la force appliquée au corps. Dans le cas général la force $\boldsymbol{F}$ ne coïncide pas avec l'accélération $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$, car

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{u}\frac{d\alpha}{dt} + m\alpha\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}. \tag{156.9}$$

D'où il s'ensuit que les vecteurs de la force, de la vitesse et de l'accélération se trouvent dans un même plan. Pour établir le lien entre la force et l'accélération, il faut décomposer les vecteurs force et accélération en des composantes suivant ce plan : suivant la direction de la vitesse $\boldsymbol{u}$ et la normale à cette dernière (fig. 432). On peut maintenant écrire :

$$F_\perp dt = m\alpha du_\perp,\quad F_\parallel dt = mu\,d\alpha + m\alpha\,du_\parallel. \tag{156.10}$$

Comme $du_{\parallel}$ est égal à du (accroissement du module u), sachant que

$$d\alpha = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} \frac{u\,du}{c^2} = \frac{\alpha^3}{c^2}\,u\,du, \qquad (156.11)$$

on peut alors présenter la seconde égalité de (156.10) ainsi:

$$F_{\parallel}\,dt = m\alpha\left(1 + \alpha^2\frac{u^2}{c^2}\right)du_{\parallel} = m\alpha^3\,du_{\parallel}.$$

La force ne coïncide avec l'accélération que dans le cas où elle est normale à la vitesse, ou est dirigée suivant la vitesse.

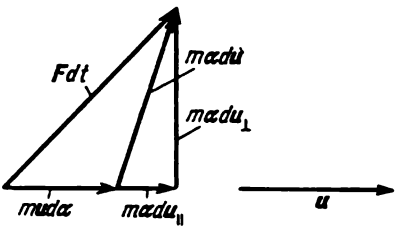


Fig. 432

On peut donc toujours représenter le lien entre les composantes de la force et de l'accélération sous la forme:

$$\begin{pmatrix} F_{\perp} \\ F_{\parallel} \end{pmatrix} = m\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{du_{\perp}}{dt} \\ \dfrac{du_{\parallel}}{dt} \end{pmatrix}, \qquad (156.12)$$

Il est commode d'utiliser cette expression pour la détermination de la force quand on connaît l'accélération, et inversement. Habituellement la matrice

$$m\alpha = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \qquad 1268\ 6$$

n'est pas appelée « masse », mais on assimile la grandeur $m\alpha$ à une masse dynamique, compte tenu de la définition de l'impulsion comme du produit de la masse par la vitesse.

§ 157. ÉNERGIE

De l'expression générale donnant la masse du corps mobile à la vitesse u

$$m\alpha = m\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

on peut tirer des conséquences importantes concernant la liaison régulière entre la masse et l'énergie. La masse croissant avec la vitesse, il est donc logique de supposer qu'il existe une relation entre la masse et l'énergie cinétique.

Voyons d'abord quelle est la nature de ce lien pour de petites valeurs de u/c dans le cas de la mécanique newtonienne. Développons α en série suivant u/c:

$$m\alpha = m + \frac{1}{c^2}\frac{mu^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{mu^4}{c^4} + \ldots \tag{157.1}$$

On voit aussitôt que pour un petit rapport u/c

$$m\alpha \approx m + \frac{1}{c^2}\frac{mu^2}{2} = m + \frac{1}{c^2}T, \tag{157.2}$$

où $T = \frac{mu^2}{2}$ est l'énergie cinétique du corps mobile à la vitesse u définie dans la mécanique newtonienne. Selon le principe relativiste, si une loi est vraie dans un système galiléen, elle le sera aussi dans tout autre système galiléen se mouvant à une grande vitesse. Donc l'énergie cinétique à des grandes vitesses du mobile sera définie de façon analogue par (157.2), ou

$$T = m\alpha c^2 - mc^2 = mc^2(\alpha - 1). \tag{157.3}$$

Considérant le développement (157.1), on peut transcrire l'énergie cinétique pour tout u/c (à condition que $u < c$) sous la forme:

$$T = \frac{mu^2}{2}\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \ldots\right]. \tag{157.4}$$

De ces expressions de T il s'ensuit que pour $u \to c$ l'énergie cinétique $T \to \infty$, car $m\alpha \to \infty$.

La grandeur $m\alpha c^2 = E$ est appelée énergie *totale* du corps mobile et $mc^2 = E_0$ énergie du corps au repos. L'égalité (157.3) peut alors être transcrite ainsi:

$$E = E_0 + T, \tag{157.5}$$

l'énergie totale est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie au repos E_0.

Cette grandeur était inconnue avant la physique relativiste, c'est une notion complètement nouvelle mais dont le rôle est fondamental pour toute la physique. Le corps de masse d'inertie au repos m (la masse pour $u \ll c$) possède une réserve d'énergie déterminée proportionnelle à m et, de plus, nullement infime devant l'énergie cinétique, quand $u \ll c$.

Avant d'examiner la signification physique de la loi liant la masse à l'énergie:

$$E = m\alpha c^2, \tag{157.6}$$

établissons l'égalité fondamentale pour T d'une façon quelque peu différente.

Admettons que le travail de la force appliquée à un corps libre soit égal à l'accroissement de son énergie cinétique, comme en mécanique newtonienne. Mais retenons seulement que la force

$$F = \frac{dK}{dt} = m\frac{d}{dt}(\alpha u), \tag{157.7}$$

où α tient compte de la variation relativiste de la masse. Alors

$$dT = \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r} = \frac{d\boldsymbol{K}}{dt}\,d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{K}\boldsymbol{u},$$

car $\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$. Portons-y $d\boldsymbol{K} = m\,d\,(\alpha\boldsymbol{u})$:

$$dT = m d\,(\alpha\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u} = m\,d\alpha\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} + m\alpha\boldsymbol{u}\,d\boldsymbol{u} = mu^2\,d\alpha + m\alpha d\left(\frac{u^2}{2}\right). \quad (157.8)$$

Conformément à l'égalité (156.11), la grandeur $d\alpha = \frac{\alpha^3}{c^2}\,d\left(\frac{u^2}{2}\right)$; d'où l'on voit que

$$\alpha d\left(\frac{u^2}{2}\right) = \frac{c^2}{\alpha^2}\,d\alpha = c^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)d\alpha = (c^2 - u^2)\,d\alpha.$$

Portant cette expression dans (157.8), on trouve une relation d'apparence simple:

$$dT = mc^2\,d\alpha.$$

Intégrons-la:

$$T = mc^2\,\alpha + C,$$

où C est une constante d'intégration. Admettons qu'au repos $T = 0$ et $\alpha = 1$ de cette condition on tire $C = -mc^2$. On aboutit donc à l'expression (157.3).

L'équation $E = m\alpha c^2$ montre qu'entre l'énergie du corps E et sa masse d'inertie $m\alpha$ existe une simple et constante proportionnalité. L'énergie et la masse d'inertie sont deux caractéristiques physiques différentes du corps: la première caractérise sa faculté d'effectuer un travail et la seconde est la mesure de l'inertie du corps. Mais entre ces grandeurs existe un lien réciproque *universel*. Si l'on sait que la masse d'inertie augmente d'une certaine grandeur $\Delta\,(m\alpha)$, cela signifie que l'énergie augmente de $c^2\Delta\,(m\alpha)$ et, réciproquement, l'augmentation de l'énergie de ΔE, affectant un objet physique quelconque, entraîne un accroissement de sa masse d'inertie de $\Delta E/c^2$.

Notons que cela concerne toute forme d'énergie connue, par exemple l'énergie cinétique, potentielle, électromagnétique, etc. Déjà en 1905 Einstein montra sur un exemple simple que la quantité de l'énergie électromagnétique du rayonnement E possède une masse d'inertie E/c^2. Quelquefois cette quantité est appelée *équivalence* masse-énergie. On peut donc se représenter de façon différente l'équation de transformation de la masse et de la quantité de mouvement (156.6), si, au lieu de la masse $m\alpha$, on introduit une grandeur qui lui est égale E/c^2, ces transformations prenant alors la forme:

$$E' = \gamma\,(E - vK_x), \quad K'_x = \gamma\left(K_x - \frac{vE}{c^2}\right). \quad (157.9)$$

Sous la forme vectorielle la transformation générale de l'énergie et de l'impulsion se transcrira évidemment ainsi:

$$E' = \gamma\,(E - v\boldsymbol{K}), \quad \boldsymbol{K}' = \boldsymbol{K} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}}{v^2}\,\boldsymbol{v} - \gamma\frac{E}{c^2}\,\boldsymbol{v}. \quad (157.10)$$

Les égalités (157.10) ont été obtenues par substitution de E/c^2 à $m\alpha$ dans (156.7). Ces égalités montrent qu'entre le principe de conservation de l'énergie et celui de la quantité de mouvement (impulsion) il y a une liaison réciproque. Si dans le système A l'énergie E et l'impulsion K sont constantes, elles le demeurent également dans le système B.

Un rôle particulier revient à l'énergie de repos E_0 dont on n'avait aucune notion avant la physique relativiste. Un corps chauffé doit posséder une masse supérieure à celle qu'il a étant froid ; un ressort comprimé a une masse plus grande ; les substances ayant réagi chimiquement avec dégagement d'énergie auront une masse plus petite, etc. Mais dans la pratique ces variations de masse n'ont jamais été observées, car ces variations de masse étaient relativement faibles, de l'ordre de $\Delta E/c^2$ (où ΔE est l'accroissement de l'énergie) qui est généralement une grandeur infiniment petite devant la masse du corps m. La précision des mesures est insuffisante pour la détermination de telles variations.

Or dans la physique des processus et phénomènes nucléaires, se déclenchant dans la collision entre des particules atomiques animées de mouvements rapides, les variations de masse deviennent mesurables et permettent d'évaluer l'énergie absorbée et émise au cours de ces processus. Un phénomène particulièrement parlant sous ce rapport est l'« annihilation » de particules (ou la « création » d'une paire de particules), quand deux particules de même masse, mais de charge opposée (par exemple, l'électron et le positon) s'entrechoquent et leur masse se « transforme » en énergie électromagnétique de rayonnement. Ou en disant mieux : en accord avec le principe de conservation de l'énergie des particules en interaction, l'énergie s'est transformée en la quantité d'énergie de rayonnement électromagnétique possédant une masse égale à la masse des particules étant entrées en collision. Les expériences de la physique atomique et nucléaire ont non seulement confirmé les déductions de la théorie de la relativité, mais nombre d'entre elles furent montées en s'appuyant sur les acquis de cette théorie.

Donnons encore un exemple. En mécanique classique, dans un choc parfaitement mou de deux corps, la quantité de mouvement se conservait, mais l'énergie mécanique ne se conservait pas. Ici par contre, se conservent aussi bien la quantité de mouvement que l'énergie mécanique, mais seulement après le choc la masse au repos devient supérieure à la somme des masses au repos des corps participant à la collision. Une partie de l'énergie cinétique (ou toute l'énergie) s'est transformée en énergie de la masse au repos. Soient deux particules identiques arrivant à la même vitesse l'une sur l'autre et s'entrechoquant de façon parfaitement molle. La masse équivalente à l'énergie cinétique des particules se transformera alors en la masse de repos de la particule formée à la suite du choc. Aussi

sa masse au repos est-elle supérieure à la somme des masses au repos des particules.

Les conséquences pratiques des conceptions de la théorie de l'invariabilité de la liaison entre l'énergie et la masse ne peuvent être sous-estimées. La grandeur du facteur $c^2 = 9 \cdot 10^{16}$ m²/s² montre l'énorme réserve d'énergie que recèle la matière habituelle: une mole de substance recèle une énergie de $9 \cdot 10^{13}$ J. A l'heure actuelle l'homme ne sait utiliser qu'une très faible fraction de cette énergie en réserve dans la substance, en la libérant dans les usines nucléaires dont l'avantage sur les centrales thermiques banales est grand, surtout si la quantité du combustible consommé joue un rôle déterminant.

§ 158. QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET ÉNERGIE D'UN SYSTÈME DE PARTICULES

Dans le cadre de la mécanique, tout corps peut être assimilé à un système de particules en interaction réciproque au cours de contact mutuel, ou de collision. On élimine ainsi les forces d'attraction entre les différentes particules du corps [1].

En physique nucléaire on a affaire à des chocs entre des particules chargées rapides qui exercent des actions mutuelles à distance, mais habituellement l'énergie de cette interaction est faible devant l'énergie totale $m\alpha c^2$ et on peut la négliger. On considère donc que les particules n'entrent en interaction qu'au cours des collisions mutuelles. Dans la collision l'énergie des particules reste constante.

Etant donné que l'énergie totale de la particule se compose de l'énergie localisée dans la particule même (énergie de repos) et de l'énergie cinétique, on peut représenter l'énergie totale du système de particules comme une somme d'énergies partielles des particules et l'écrire ainsi :

$$c^2 \sum m_i \alpha_i = c^2 m \alpha, \tag{158.1}$$

où m est la masse du système de particules *au repos* dans le référentiel du « centre des masses », mobile à la vitesse

$$u = \frac{\sum m_i \alpha_i u_i}{\sum m_i \alpha_i}.$$

Rappelons que $\alpha^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = 1$. On peut donc représenter l'impulsion totale du système de particules de la même façon que pour une seule particule :

$$\boldsymbol{K} = m\alpha \boldsymbol{u} = \sum m_i \alpha_i \boldsymbol{u}_i. \tag{158.2}$$

[1] A l'échelle cosmique, où les forces d'attraction jouent un rôle déterminant, le mouvement ne peut être étudié ainsi. Mais ce sont là des problèmes de la relativité générale dépassant le cadre de la relativité restreinte.

Toutes les équations de transformation de l'énergie et de la quantité de mouvement, quand on passe du référentiel A au référentiel galiléen B, auront la même forme que pour une seule particule : (156.6) et (156.7).

Examinons les lois de conservation pour un système *isolé* de particules. Les formules de transformations (156.6) établissent un lien indissoluble entre la loi de conservation de la quantité de mouvement d'un système de particules isolé (fermé) et la loi de conservation de son énergie (masse). Supposons qu'un système isolé de particules possède une quantité de mouvement constante dans le temps pour le référentiel galiléen A. Dans ce cas le même système de particules n'aura une quantité de mouvement constante dans un autre référentiel galiléen B que si dans A seront constantes non seulement la quantité de mouvement, mais également l'énergie (la masse) du système de particules : $K = \text{const}$, $E = \text{const}$. Les lois de conservation de l'énergie (de la masse) et de la quantité de mouvement d'un système de particules isolé sont indissolublement liées entre elles.

Dans la mécanique newtonienne, la masse, quelles que soient les conditions, était considérée comme constante, et on n'attachait pas d'importance à la loi de conservation de la masse d'un système de particules isolé.

La différence entre les principes de la mécanique newtonienne et relativiste est facile à saisir sur un exemple simple. Supposons que deux particules se choquent, le principe de la conservation de l'énergie donne alors

$$m_1\alpha_1 u_1 + m_2\alpha_2 u_2 = m_1^*\alpha_1^* u_1^* + m_2^*\alpha_2^* u_2^*,$$

où l'astérisque désigne les grandeurs après le choc. Cela est vrai pour les deux mécaniques. Mais dans la mécanique non relativiste la masse d'une particule isolée est invariable, tandis que dans la mécanique relativiste, seule la somme est invariable :

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = m_1^*\alpha_1^* + m_2^*\alpha_2^*.$$

Dans le premier cas, c'est la masse de chaque particule qui se conserve, tandis que dans le second, c'est la masse de tout le système de particules qui reste constante, car la particule n'y est pas isolée et interagit avec une autre particule. Quant au système tout entier, il est isolé et n'interagit pas avec d'autres corps.

En d'autres termes : le corps *isolé* (système) ou la particule isolée se meuvent *par inertie* à une vitesse constante et leur quantité de mouvement ainsi que leur masse restent constantes. La loi de l'inertie reste en vigueur aussi bien dans la mécanique « ancienne » que « nouvelle ». Toutefois, un système non isolé suivant la « nouvelle » mécanique (à la différence de l'« ancienne ») peut modifier non seulement sa quantité de mouvement mais également sa masse.

Sous une forme générale, cela se déduit de la définition de la masse d'un système de particules :

$$m\alpha = \sum m_i \alpha_i,$$

où m est la masse au repos du *système* et m_i la masse au repos de chacune des particules. Quand on passe au référentiel se mouvant à la vitesse $\boldsymbol{u}$, la quantité de mouvement est alors $\boldsymbol{K}' = 0$ et $\boldsymbol{u}' = 0$. Donc $\alpha' = 1$ et

$$m = \sum m_i \alpha'_i.$$

Il s'ensuit que $m \gg \sum m_i$, car $\alpha'_i \geqslant 1$. La masse au repos du système est plus grande ou égale à la somme des masses des particules séparées. L'égalité n'a lieu que si toutes les particules sont au repos relativement l'une à l'autre $\alpha'_i = 1$ ou tous les $\alpha'_i = \alpha'$, ce qui n'arrive que quand tous les $\boldsymbol{u}'_i = \boldsymbol{u}'$.

Notons que dans la collision de deux particules la masse au repos de chaque particule peut varier, ou au lieu de deux particules il peut apparaître une ou plus de deux. Mais il peut arriver que la masse au repos de chaque particule se conserve inchangée, dans ce cas le choc est dit *élastique*, dans tous les autres il est *mou*. Si la collision de deux particules se résout par la formation d'une seule particule, le choc est dit parfaitement mou. Mais dans toutes ces collisions, à la différence de la mécanique non relativiste, l'énergie totale se conserve toujours dans la collision.

§ 159. INVARIANTS

Dans la transformation de Lorentz, les coordonnées et le temps varient, ils sont relatifs. Mais il existe des grandeurs qui ne varient pas quand on passe d'un système galiléen à un autre, elles restent invariables, ce sont des *invariants*.

L'existence des grandeurs invariables est d'une importance essentielle, car tout ne varie pas quand on passe d'un repère à un autre. L'appellation « théorie de la relativité » ne traduit qu'un aspect de la théorie, la relativité, or, en réalité, il existe des grandeurs qui varient et d'autres qui restent constantes. Aussi l'expression de « théorie de la relativité » n'est-elle pas tout à fait adéquate, comme ne le serait pas aussi celle de « théorie des invariants » qui ne refléterait correctement que l'autre aspect de la théorie.

Notons tout d'abord que les fondements de la théorie s'appuyent sur le fait que la célérité de la lumière est un invariant. Un important invariant est l'*intervalle* (s). Le carré de l'intervalle (s) se détermine de la façon suivante

$$s^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2t^2 - r^2. \qquad (159.1)$$

Les grandeurs y^2 et z^2 ne se modifient pas quand on passe du référentiel A au référentiel B et

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2. \qquad (159.2)$$

Cette relation se vérifie facilement par les formules de transformation du temps et de la coordonnée x (152.8) :

$$c^2t'^2 - x'^2 = \gamma^2\left[c^2\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)^2 - (x - vt)^2\right] =$$

$$= \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(c^2t^2 - x^2) = c^2t^2 - x^2.$$

La grandeur de l'intervalle (s) reste constante dans tous les systèmes galiléens.

De façon analogue, en transformant l'énergie et la quantité de mouvement (157.9), la quantité

$$\frac{E^2}{c^2} - K^2 = \frac{E^2}{c^2} - (K_x^2 + K_y^2 + K_z^2) \qquad (159.3)$$

doit rester invariable. Comparant (159.1) et (159.3), on voit que t correspond à E/c^2 et $x \sim K_x$, $y \sim K_y$ et $z \sim K_z$; et, par suite, à l'égalité (159.2) correspond

$$c^2\frac{E^2}{c^4} - K_x^2 = c^2\frac{E'^2}{c^4} - K_x'^2,$$

ou la quantité

$$\frac{E^2}{c^2} - K^2 = \frac{E'^2}{c^2} - K'^2 \qquad (159.4)$$

est un *invariant* de transformation de l'énergie et de la quantité de mouvement quand on change de système galiléen.

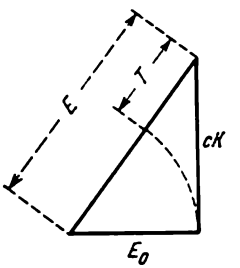


Fig. 433

Il s'ensuit une dépendance importante entre l'énergie E et la quantité de mouvement K. Supposons que dans le référentiel B le corps soit au repos ; alors $K' = 0$ et $E' = E_0$, énergie du corps au repos, et il suit de (159.4) :

$$E^2 - c^2K^2 = E_0^2,$$

ou

$$E^2 = c^2K^2 + E_0^2. \qquad (159.5)$$

Le carré de l'énergie du corps est égal à la somme des carrés de l'énergie du corps au repos et du produit de c par la quantité de mouvement K (fig. 433). Quelquefois l'énergie au repos est transcrite ainsi : $E_0 = mc^2$. L'égalité (159.5) prend alors la forme suivante :

$$E^2 - c^2K^2 = m^2c^4. \qquad (159.6)$$

D'où l'on voit que la masse au repos (ainsi que l'énergie au repos) sont des *invariants*, ce qui correspond à leur sens physique.

Il s'ensuit, en outre, de la dernière égalité une dépendance de l'énergie totale du corps, mobile à la vitesse v, de la masse au repos:

$$E = m\gamma c^2. \tag{159.7}$$

En effet, la quantité de mouvement du corps est $K = \frac{E}{c^2} v$. Portant cette expression dans (159.6) et en se souvenant de ce que $\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$, on obtient (159.7).

L'énergie cinétique

$$T = E - mc^2$$

s'exprime au moyen de la quantité de mouvement K de la manière suivante:

$$T = mc^2 \left(\sqrt{1 - \frac{K^2}{m^2c^2}} - 1\right),$$

ce qui s'établit facilement en utilisant (159.6).

Pour $K \ll mc$ développons la racine en série et passons à la limite $c \to \infty$, il vient alors

$$T \approx \frac{K^2}{2m} \tag{159.8}$$

qui est une égalité relativiste connue.

§ 160. QUADRIVECTEUR ET INTERVALLE

En mécanique relativiste, surtout dans l'analyse des problèmes de la dynamique des particules rapides, il est commode d'abandonner le système habituel d'unité, le système SI, par exemple, et de passer au système dans lequel la célérité de la lumière est prise pour unité, $c = 1$.

En effet, nombre de formules contiennent c et l'élimination de ce facteur les simplifie fortement. Si l'on pose $c = 1$, il suffit de choisir seulement deux unités fondamentales. On peut en fixer le choix sur les unités de longueur et d'énergie, et pour simplifier, prenons le mètre (m) et le joule (J) [1]. Dans ce cas l'unité de temps sera la durée au cours de laquelle la lumière franchit 1 m, ou $1/3 \times 10^{-8}$ s.

Rappelons quelques égalités fondamentales (la masse du corps mobile $m\alpha$, ou E/c^2, l'impulsion $K = m\alpha u = Eu/c^2$):

$$E^2 - c^2K^2 = m^2c^4, \quad T = E - mc^2, \quad F = m\frac{d(\alpha u)}{dt}, \text{ etc.}$$

Posant dans ces formules $c = 1$, on obtient ces expressions dans le système [m, J, $c = 1$]. Désignons en attendant ces valeurs dans le système adopté par un astérisque.

[1] On est en droit de choisir le mètre et le newton, ou la seconde et le joule, etc.

La formule aux dimensions permet d'établir le tableau ci-dessous donnant la correspondance entre les grandeurs exprimées en unités SI et en unités du nouveau système pour $c = 1$:

Dimension / Système d'unités	m		J			m^{-1}	$J \cdot m^{-1}$	Sans dimension		
SI	r	ct	mc^2	cK	E	wc^{-1}	F	uc^{-1}	α	γ
m, J, $c=1$	r	t^*	m^*	K^*	E	w^*	F	u^*	α	γ

Les désignations de toutes les grandeurs données au tableau nous sont connues, on s'est abstenu seulement d'utiliser l'accélération $w = du/dt$. En étudiant le tableau, on voit que le changement d'unités n'a pas fait varier les unités : de longueur, d'énergie, de la force, ainsi que les grandeurs sans dimension α et γ. La masse au repos et la quantité de mouvement (impulsion) sont mesurées dans le nouveau système d'unités par une unité d'énergie, la vitesse étant sans dimension et vaut des fractions de la vitesse de la lumière.

Le passage du système nouveau au système habituel ne présente pas de difficulté : il suffit de remplacer dans les équations les unités affectées d'astérisque par des valeurs correspondantes des grandeurs du système SI indiquées sur la ligne au-dessus. Quant au passage direct du système SI au nouveau système, il est élémentaire : en posant $c = 1$, on exprime les grandeurs respectives en unités du nouveau système. Donc dans la suite, on ne marquera plus les grandeurs du nouveau système d'un astérisque et on conservera les notations précédentes en ayant en vue que toutes ces grandeurs sont exprimées dans le système [m, J, $c = 1$].

Notons que dans le nouveau système d'unités $K = m\alpha u$, comme dans le système SI, mais $K = Eu$ et l'énergie $E = m\alpha$, la différence étant du seul facteur c^2.

A titre d'exemple, écrivons les transformations de Lorentz et la transformation énergie-impulsion :

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx), & E' &= \gamma(E - vKx), \\ x' &= \gamma(x - vt), & K'_x &= \gamma(K_x - vE), \\ y' &= y, \ z' = z, & K'_y &= K_y, \ K'_z = K_z \end{aligned} \qquad (160.1)$$

$$\gamma^2(1 - v^2) = 1,$$

l'invariant : $s^2 = t^2 - r^2$; l'invariant : $m^2 = E^2 - K^2$. (160.2).

Les formules de transformation pour la coordonnée x (K_x) et le temps t (E) sont absolument symétriques, la coordonnée x coïncidant en direction avec v.

Chaque événement est marqué par quatre nombres, quatre « coordonnées » : t, x, y, z, c'est-à-dire qu'il se produit à l'instant t au lieu r (x, y, z). En mathématiques le système ordonné de quatre nombres (« coordonnées ») représente un point ; l'ensemble de ces points constitue un espace mathématique à quatre dimensions. On peut donc considérer un événement comme un « point » de l'espace à quatre dimensions (quadridimensionnelle). Avec le changement de repère galiléen les coordonnées des points (des événements) dans l'espace-temps se modifient en conformité avec les transformations de Lorentz.

Les coordonnées le long des axes x et x' dirigés suivant la vitesse du mouvement du référentiel v sont dans notre cas mutuellement reliées à t et t'. La coordonnée x' dépend de x et de t, de même que la coordonnée t' dépend de t et de x (suivant la relation analogue liant les coordonnées cartésiennes du plan dans la rotation du système des coordonnées d'un certain angle). Les coordonnées suivant les axes normaux à v ne varient pas.

On peut introduire dans l'espace-temps quadridimensionnel le vecteur $\boldsymbol{R}$ (dont les composantes sont t, x, y, z (ou t, $\boldsymbol{r}$) et l'écrire ainsi : $\boldsymbol{R}$ (t, x, y, z) ou $\boldsymbol{R}$ (t, $\boldsymbol{r}$). Le vecteur $\boldsymbol{R}$ est appelé *quadrivecteur*. Dans l'espace habituel à trois dimensions la longueur du rayon-vecteur, représentée par la longueur $\boldsymbol{r}$ ou la racine carrée de $\boldsymbol{rr}$ (produit scalaire de $\boldsymbol{r}$ par lui-même), se conserve au cours de la rotation du repère cartésien. En général, le produit scalaire de deux vecteurs reste constant dans la rotation du système de coordonnées. Dans l'espace-temps quadridimensionnel, c'est l'intervalle (s) qui reste invariable après la transformation de Lorentz, comme on l'a vu au § 158. Le carré de l'intervalle peut maintenant s'écrire ainsi :

$$s^2 = t^2 - r^2 = t^2 - \boldsymbol{rr} = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2). \qquad (160.3)$$

L'intervalle s entre les événements $\boldsymbol{R}$ (0, 0) et $\boldsymbol{R}$ (t, $\boldsymbol{r}$), autrement dit entre l'événement se produisant à l'instant $t = 0$ à l'origine des coordonnées $\boldsymbol{r} = 0$ et l'événement se produisant à l'instant t au point $\boldsymbol{r}$, conserve sa grandeur pendant le passage de t et $\boldsymbol{r}$ à t' et $\boldsymbol{r}'$. La quantité représentant le carré de l'intervalle peut être assimilée au produit *scalaire* du vecteur $\boldsymbol{R}$ par $\boldsymbol{R}$ dans l'espace-temps ; $s^2 = \boldsymbol{RR} = t^2 - \boldsymbol{rr}$. Dans l'espace ordinaire

$$\boldsymbol{rr} = x^2 + y^2 + z^2,$$

c'est-à-dire le produit scalaire de $\boldsymbol{r}$ par $\boldsymbol{r}$ est égal à la somme des carrés des composantes du vecteur dans le repère cartésien. Le carré de l'intervalle est également une somme algébrique des carrés des composantes du vecteur $\boldsymbol{R}$, seulement les signes des carrés des com-

posantes temporelles et spatiales sont différents. C'est en quoi réside la différence fondamentale entre la composante temporelle et les composantes spatiales, ainsi que la différence entre l'espace-temps et l'espace mathématique quadridimensionnel euclidien.

L'intervalle $s = \sqrt{\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}}$ entre $\boldsymbol{R}(0, 0)$ et $\boldsymbol{R}(t, r)$ sera un nombre *réel*, quand $t^2 > r^2$ et un nombre *imaginaire*, quand $t^2 < r^2$.

Notons le module de l'intervalle imaginaire par s_0, on a alors

$$s = is_0, \quad \text{ou } s_0^2 = t^2 - r^2.$$

L'intervalle réel « réunit » deux événements 0 et $\boldsymbol{R}$ qui peuvent présenter un rapport de cause à effet, c'est-à-dire que l'un des événements peut agir sur l'autre. En effet, le corps (ou signal) peut, durant le temps t, passer du point 0 au point r (ou du point r au point 0) en se déplaçant à une vitesse constante

$$u = r/t < 1$$

le long du rayon-vecteur r. Aussi les événements se déroulant en un point peuvent-ils se représenter sur les événements de l'autre point.

Dans ce cas, on peut toujours imaginer un référentiel B se mouvant à la vitesse $\boldsymbol{u}$ le long du rayon-vecteur r pour lequel les deux événements se déroulent au même lieu. Pour $t > 0$, la vitesse $\boldsymbol{u}$ coïncide en direction avec r et pour $t < 0$ la vitesse $\boldsymbol{u}$ est de direction opposée à r. Dans le premier cas l'origine du référentiel B se déplacera durant le temps t de 0 en r et les deux événements se produiront au *même endroit* ($r' = 0$) du référentiel B. Dans le second, durant le laps de temps t, l'origine du référentiel B passera du point r en 0 et à l'instant $t = 0$ coïncidera avec l'origine du référentiel A. Le laps de temps t', après lequel dans le référentiel B se produiront les deux événements, peut se déduire à partir de la constance de l'intervalle

$$t'^2 - r'^2 = t^2 - r^2.$$

Comme $r' = 0$

$$t' = \sqrt{t^2 - r^2} = t\sqrt{1 - u^2} = \frac{t}{\alpha},$$

car $r = ut$.

En effet, l'intervalle réel est appelé *intervalle spatio-temporel*, car on peut toujours choisir un système de référence dans lequel l'intervalle des deux événements considérés ne se détermine que par un laps de temps.

Si les événements $\boldsymbol{R} = 0$ et $\boldsymbol{R}$ sont « réunis » par un intervalle imaginaire, quand $t^2 < r^2$, ils ne peuvent alors présenter de rapports de cause à effet, car aucun corps (de même qu'aucun signal) ne peut se déplacer à la vitesse $u = r/t > 1$. L'événement $\boldsymbol{R} = 0$ ne peut agir sur l'événement $\boldsymbol{R}$. Dans ce cas, on peut toujours indiquer un référentiel dans lequel les deux événements se produisent simulta-

nément en des lieux différents. Cela découle de la constance de l'intervalle (s), car le carré du module de l'intervalle (s)

$$s_0^2 = r^2 - t^2 = r'^2 - t'^2 > 0.$$

Il existe donc toujours un référentiel B dans lequel $t' = 0$, c'est-à-dire que les deux événements se produisent *simultanément* à la distance

$$r' = \sqrt{r^2 - t^2}.$$

Si ce référentiel est mobile à la vitesse v le long de r, le temps dans le référentiel B est alors $t' = \gamma (t - rv)$. Si l'on choisit la grandeur de la vitesse du référentiel B de manière [1] que

$$v = \frac{t}{r} < 1,$$

alors $t' = 0$. Autrement dit, dans un tel référentiel B les deux événements se produisent simultanément. La distance entre les événements dans ce référentiel est

$$r' = \sqrt{r^2 - t^2} = \sqrt{r^2 - r^2 v^2} = r\sqrt{1 - v^2} = \frac{r}{\gamma},$$

avec la vitesse $v < 1$.

L'intervalle imaginaire est dit *spatialement semblable*, car il existe toujours un système galiléen dans lequel les deux événements se produisent simultanément dans des endroits différents.

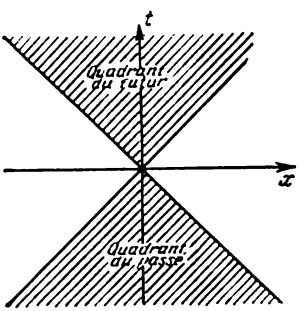


Fig. 434

L'intervalle zéro, $s = \sqrt{RR} = 0$ et $t^2 = r^2$ correspond aux événements reliés par un signal lumineux avec l'événement $R = 0$; un tel intervalle est dit *semblable à la lumière*. Il sépare les événements à intervalle spatialement semblable des événements à intervalle temporellement semblable. Tous les événements à intervalle zéro se disposent sur une surface définie par l'équation

$$t^2 - r^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0, \quad (160.4)$$

représentant la surface d'un « cône » dans l'espace-temps, dont le sommet est à l'origine des coordonnées et dont l'axe coïncide avec celui des temps t. Ce cône est appelé *cône de lumière*.

On a montré sur la figure 434 la section du cône de lumière par le plan des coordonnées (x, t). On obtiendra des sections analogues avec tout plan passant par l'axe t. Les événements se produisant pour $t < 0$ et se situant à l'intérieur du cône de lumière (partie

[1] N'oubliez pas le système d'unités adopté, dans lequel la vitesse v est sans dimension. Dans le système SI $v = c\,(ct/r)$ et $r^2 > c^2t^2$.

ombrée) auraient pu en principe posséder un lien causal avec l'événement au point 0, c'est le *passé* par rapport à 0. D'un autre côté, l'événement au point 0 peut exercer une influence sur l'événement situé à l'intérieur du cône de la lumière pour $t > 0$ (quadrant du *futur*). Les événements se trouvant à l'extérieur du cône de lumière ne peuvent présenter un lien causal avec l'événement au point 0, ils sont absolument « indépendants » par rapport à l'événement au point 0.

Jusque-là on a examiné l'intervalle entre les événements $\boldsymbol{R} = 0$ et $\boldsymbol{R}$. Or, de la même manière, il est possible de trouver l'intervalle entre deux événements quelconques $\boldsymbol{R}_1$ et $\boldsymbol{R}_2$. Par un calcul direct on peut montrer que le carré de l'intervalle sera égal à

$$s^2 = (\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)^2 = (t_2 - t_1)^2 - (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) =$$
$$= (t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2].$$

Dans la transformation de Lorentz

$$s^2 = (\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)^2 = (\boldsymbol{R}_2' - \boldsymbol{R}_1')^2, \tag{160.5}$$

la quantité s reste constante. L'intervalle étudié précédemment n'est qu'un cas particulier de cet intervalle général et correspond à $\boldsymbol{R}_1 = 0$. De façon analogue, le carré de l'intervalle entre les événements $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{R} + d\boldsymbol{R}$ est

$$ds^2 = d\boldsymbol{R}\, d\boldsymbol{R} = dt^2 - d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{r} = dt^2 - dr^2.$$

Sur la base de la définition générale de l'intervalle, on peut poser le sommet du cône de lumière passant par un point quelconque de l'espace-temps $\boldsymbol{R}_1$ et répartir tous les événements de l'univers par rapport à l'événement en $\boldsymbol{R}_1$ suivant le signe du carré de l'intervalle en quadrant du futur, quadrant du passé et en quadrant indépendant.

§ 161. MÉCANIQUE RELATIVISTE

Le vecteur $\boldsymbol{R}$ est appelé quadrivecteur pour le différencier du trivecteur $\boldsymbol{r}$ de l'espace ordinaire. Toute grandeur physique définie par trois nombres variant avec la rotation d'un certain angle du référentiel cartésien de la même façon que les composantes du vecteur $\boldsymbol{r}$, est dite, par définition, grandeur vectorielle de l'espace à trois dimensions, ou tout simplement vecteur de cet espace. De façon analogue, on appelle quadrivecteur de l'espace-temps tout ensemble ordonné de quatre nombres représentant des grandeurs physiques bien déterminées et ces nombres varient quand on change de référentiel galiléen en se conformant aux transformations de Lorentz. Le produit scalaire de deux quadrivecteurs se définit

ainsi :

$$\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2 = t_1t_2 - \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2, \tag{161.1}$$

c'est un invariant de la transformation de Lorentz [1].

Le vecteur $\boldsymbol{R}$ est le vecteur « position » du point dans l'espace-temps par rapport à un référentiel galiléen (posons, le référentiel A). Définissons le quadrivecteur vitesse. Si la particule est mobile dans l'espace à la vitesse $\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, le quadrivecteur $\boldsymbol{R}$ varie dans le temps : il est évident que durant le laps de temps dt il variera de la grandeur $d\boldsymbol{R}$ $(dt, d\boldsymbol{r})$ qui sera le quadrivecteur dont la longueur (intervalle correspondant) est un invariant dans la transformation de Lorentz. Mais le rapport $\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\left(1, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)$ n'est pas un quadrivecteur suivant sa définition, car les quantités $1, u_x, u_y, u_z$ en passant dans le référentiel B ne varieront pas comme t, x, y, z.

C'est pourquoi au lieu de l'accroissement dt on prend l'accroissement d'une autre grandeur appelée « temps propre » τ en définissant $d\tau$ de la sorte :

$$d\tau^2 = dt^2 - d\boldsymbol{r}^2. \tag{161.2}$$

C'est le carré de l'intervalle entre les événements $(t, \boldsymbol{r})$ et $(t + dt, \boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$. La quantité $d\tau$ peut être interprétée de la façon suivante.

Dans le référentiel mobile à la vitesse constante $\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ par rapport à A se trouve une horloge qui indique l'accroissement de temps $d\tau$ durant le temps dt. Alors, le rayon-vecteur position dans le référentiel mobile est $\boldsymbol{r}' = \text{const}$ et $d\boldsymbol{r}' = 0$. Ecrivons l'intervalle élémentaire dans ces deux référentiels :

$$d\tau^2 - d\boldsymbol{r}'^2 = dt^2 - d\boldsymbol{r}^2,$$

et posant $d\boldsymbol{r}' = 0$, on obtient

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2} = dt\sqrt{1 - u^2}.$$

Pour abréger, écrivons :

$$\alpha d\tau = dt, \tag{161.3}$$

où, comme auparavant, $\alpha = (1 - u^2)^{-1/2}$. Il est évident que la quantité $d\tau$ est, comme $d\boldsymbol{R}$, un invariant de la transformation de Lorentz.

L'accroissement du « temps propre » τ représente l'accroissement du temps de l'horloge au repos dans le référentiel se déplaçant avec le corps à la vitesse constante $\boldsymbol{u}$ à l'instant considéré. Avec la variation de la vitesse $\boldsymbol{u}$, le rapport entre $d\tau$ et dt se modifie, car la gran-

[1] On peut le vérifier par un calcul direct en utilisant la formule (160.1).

deur α est différente. Aussi le temps propre peut-il être défini de la façon suivante :

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-u^2}\, dt. \qquad (161.4)$$

Il est évident que le temps propre $\tau_2 - \tau_1$ sera toujours inférieur à $t_2 - t_1$, le temps dans le système mobile étant ralenti.

On appelle *quadrivecteur vitesse* de l'espace-temps la grandeur

$$\boldsymbol{U} = \frac{d\boldsymbol{R}}{d\tau}, \qquad (161.5)$$

dont les composantes varieront en accord avec la transformation de Lorentz. Les composantes du quadrivecteur vitesse s'obtiendront de la façon suivante

$$\boldsymbol{U} = \frac{d\boldsymbol{R}\,(dt,\, d\boldsymbol{r})}{d\tau} = \boldsymbol{U}\left(\frac{dt}{d\tau},\, \frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}\right) = \boldsymbol{U}\,(\alpha,\, \alpha\boldsymbol{u}), \qquad (161.6)$$

car $\frac{dt}{d\tau} = \alpha$, $\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \alpha\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \alpha\boldsymbol{u}$. Donc le quadrivecteur vitesse d'une particule (d'un corps) possède une composante « temporelle » α et des composantes spatiales $\alpha\boldsymbol{u}$, où $\boldsymbol{u}$ est la vitesse ordinaire (trivecteur). Notons que la « longueur » du vecteur vitesse $\boldsymbol{U}$ est égale à 1. En effet,

$$U^2 = \boldsymbol{U}\boldsymbol{U} = \alpha^2 - \alpha^2 u^2 = \alpha^2\,(1 - u^2) = 1; \qquad (161.7)$$

on pouvait s'y attendre, car $d\tau$ est égale à l'intervalle $d\boldsymbol{R}$.

On pourrait introduire également le *quadrivecteur accélération* dont l'emploi est toutefois rare :

$$\boldsymbol{W} = \frac{d\boldsymbol{U}}{d\tau} = \boldsymbol{W}\left(\frac{d\alpha}{d\tau},\, \frac{d}{d\tau}(\alpha\boldsymbol{u})\right) = \boldsymbol{W}\left(\alpha\frac{d\alpha}{dt},\, \alpha\frac{d(\alpha\boldsymbol{u})}{dt}\right). \qquad (161.8)$$

On a plus souvent recours au *quadrivecteur impulsion* qui, évidemment, est défini comme un produit de la masse par la vitesse :

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}\,(m\alpha,\, m\alpha\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{P}\,(E,\, \boldsymbol{K}). \qquad (161.9)$$

La composante temporelle du quadrivecteur impulsion est égale à l'énergie et les composantes spatiales, aux composantes de la quantité de mouvement (trivecteur impulsion). C'est pourquoi le vecteur $\boldsymbol{P}$ est appelé *quadrivecteur impulsion-énergie* de l'espace-temps. Le carré de la « longueur » de ce vecteur est évidemment égal à

$$P^2 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P} = E^2 - K^2.$$

Habituellement cette égalité s'écrit ainsi :

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P} = E^2 - K^2 = m^2, \qquad (161.10)$$

car dans le référentiel où le corps est au repos $K' = 0$ et l'énergie E est égale à la masse au repos m. Cette équation peut être également obtenue de la façon suivante :

$$PP = m^2UU = m^2,$$

car $UU = 1$.

De la relation universelle (161.10) entre l'énergie, la masse et la quantité de mouvement on déduit la relation entre l'énergie et le travail accompli par la force. En dérivant l'égalité (161.10) par rapport au temps [1], il vient

$$E\frac{dE}{dt} = K\frac{dK}{dt},$$

ou

$$E\frac{dE}{dt} = KF,$$

car $\frac{dK}{dt} = F$.

En se souvenant de ce que $E = m\alpha$ et $K = m\alpha u$, on aboutit à l'égalité connue suivante :

$$\frac{dE}{dt} = Fu, \tag{161.11}$$

Elle a également la même forme dans le système SI. En effet, en remplaçant t par ct et u par u/c, on voit que c se simplifie, car E et F ne varient pas. L'égalité (161.11) peut s'écrire ainsi :

$$dE = F\,dr.$$

L'accroissement de l'énergie est égal au travail de la force extérieure s'exerçant sur la particule (corps), comme en mécanique newtonienne. On a utilisé cette égalité pour définir la signification relativiste de l'énergie du corps mobile en y portant

$$F = \frac{dK}{dt} = m\frac{d}{dt}(\alpha u).$$

Ensuite, il est naturel de former le quadrivecteur

$$f = \frac{dP}{d\tau} \tag{161.12}$$

en l'adoptant pour le quadrivecteur de la « force » dans l'espace-temps. Pour déterminer ses composantes suivant la même voie

$$f = f\left(\frac{dE}{d\tau}, \frac{dK}{d\tau}\right) = f\left(\alpha\frac{dE}{dt}, \alpha\frac{dK}{dt}\right) = f\left(\alpha\frac{dE}{dt}, \alpha F\right).$$

Donc le quadrivecteur force a une composante « temporelle », la dérivée de l'énergie par rapport au temps (puissance) multipliée par α, et des composantes spatiales égales aux composantes du

[1] On peut dériver aussi en τ, le résultat ne variant pas.

trivecteur force multipliées par α. On peut aussi écrire la force sous la forme suivante :

$$f = m\frac{dU}{d\tau} = mW, \tag{161.13}$$

qui est analogue à celle donnée par la loi de Newton : « la force es le produit de la masse par l'accélération ».

Remarquons que P et f sont orthogonaux dans l'espace-temps. En effet, d'après (160.10)

$$PP = m^2,$$

d'où

$$P\frac{dP}{d\tau} = Pf = 0,$$

cette condition permettant d'obtenir l'égalité (161.11).

Le principe de conservation pour un système de particules isolé (corps isolé) peut maintenant s'écrire ainsi :

$$\sum P_i = \text{const.} \tag{161.14}$$

Il englobe la conservation de l'énergie :

$$\sum E_i = \text{const},$$

de même que la conservation de la quantité de mouvement :

$$\sum K_i = \text{const.}$$

Dans le calcul avec des quadrivecteurs, il est utile de savoir que le produit scalaire de ces vecteurs est un invariant par rapport à la transformation de Lorentz. Ainsi, par exemple,

$$PR = Et - Kr, \quad fR = \alpha\frac{dE}{dt} - \alpha Fr, \text{ etc.}$$

sont des invariants.

Pour conclure, on peut transcrire les principales définitions de la cinématique et de la dynamique relativiste de la particule en se servant des quadrivecteurs de la manière suivante ;

$$\begin{aligned}
&\text{« position »}\ R,\\
&\text{« vitesse »}\ U = \frac{dR}{d\tau},\\
&\text{« accélération »}\ W = \frac{dU}{d\tau},\\
&\text{« impulsion »}\ P = mU,\\
&\text{« force »}\ f = \frac{dP}{d\tau} = m\frac{dU}{d\tau} = mW.
\end{aligned} \tag{161.15}$$

Il est évident que toutes ces définitions correspondent complètement par leur forme à celles de la mécanique newtonienne, seulement

au lieu des quadrivecteurs il faut introduire des trivecteurs et remplacer τ par t, la masse restant la même.

Il faut remarquer ici que les composantes des quadrivecteurs ont été transcrites dans le système d'unités [m, J, $c = 1$]; dans les unités SI ils auront une forme quelque peu différente. A titre de comparaison, donnons le tableau suivant:

Système \ Vecteur	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{U}$	$\boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{f}$
SI	ct, $\boldsymbol{r}$	αc, $\alpha \boldsymbol{u}$	$\alpha c \frac{d\alpha}{dt}$, $\alpha \frac{d(\alpha \boldsymbol{u})}{dt}$	$c^{-1}E$, $\boldsymbol{K}$	$c^{-1}\alpha \frac{dE}{dt}$, $\alpha \boldsymbol{F}$
m, J, $c=1$	t, $\boldsymbol{r}$	α, $\alpha \boldsymbol{u}$	$\alpha \frac{d\alpha}{dt}$, $\alpha \frac{d(\alpha \boldsymbol{u})}{dt}$	E, $\boldsymbol{K}$	$\alpha \frac{dE}{dt}$, $\alpha \boldsymbol{F}$

Seule varie la forme des composantes temporelles, celle des composantes spatiales reste inchangée. Il faut seulement tenir compte de ce que les dimensions des composantes des quadrivecteurs sont autres, excepté de $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{f}$.

On vient de dire que seule la forme des définitions fondamentales coïncide avec celle de la mécanique newtonienne. En fait, c'est seulement pour $u \ll 1$ qu'on passe à la mécanique non relativiste, constituant une certaine approximation de la mécanique relativiste plus précise se fondant sur le postulat de l'indépendance de la vitesse de la lumière du mouvement du récepteur et de la source, ainsi que sur le postulat de la relativité. De ces propositions on a déduit la notion de l'espace-temps unique, de la dépendance de la masse, de la longueur et du temps du référentiel, de la liaison invariante entre l'énergie et la masse. Tout cela, par suite de la faible vitesse du mouvement devant celle de la lumière, ne se rencontrait padans l'approximation non relativiste, les transformations de Lorentz devenant celles de Galilée, l'espace et le temps étant indépendants, la masse, la longueur et le temps restant invariables dans tout référentiel de Galilée, l'énergie n'étant pas liée à la masse du corps.

§ 162. THÉORIE DU CHOC ÉLASTIQUE DE DEUX PARTICULES

Dans le problème de la collision élastique de deux particules, on examine le cas où, après une brève interaction (au moment du choc), les masses au repos des particules restent invariables. Tous les autres cas se rapportent au domaine des chocs mous, au cours

desquels les énergies de repos des particules s'entrechoquant peuvent varier, et même de nouvelles particules peuvent apparaître après le choc (« désagrégation »). Il faut y ranger évidemment le cas du choc parfaitement mou de la mécanique classique, quand la masse de repos des particules formées s'accroît.

Le problème du choc élastique (ou mou) peut se résoudre en examinant le mouvement par rapport à un référentiel de « laboratoire », ou bien en choisissant comme repère le « centre des masses » (où la quantité totale de mouvement est nulle) et ensuite de passer au référentiel de laboratoire. La seconde méthode est préférable. Pour nous en assurer, voyons d'abord la première méthode, puis la seconde.

Soit une première particule mobile (1) de masse m_1 qui heurte une seconde (2) particule au repos de masse m_2. Cela correspond aux

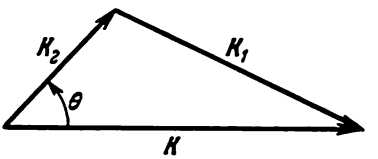


Fig. 435

conditions des expériences dans lesquelles un flux de particules accélérées percute une « cible » (les noyaux d'atomes au repos).

Avant le choc la quantité de mouvement de la particule 1 est K et son énergie totale E_n, de plus

$$E_n^2 = K^2 + m_1^2. \tag{162.1}$$

L'énergie de la seconde particule est m_2.

Après le choc les quantités de mouvement (les impulsions) des particules seront K_1 et K_2 et leurs énergies, E_1 et E_2 respectivement pour les particules 1 et 2. Les lois de conservation dans ce cas nous donnent :

$$K = K_1 + K_2, \tag{162.2}$$

$$E = E_n + m_2 = E_1 + E_2. \tag{162.3}$$

Supposons qu'après le choc la particule 2 possède une vitesse dirigée sous l'angle ϑ par rapport à la vitesse de la particule 1 avant le choc (par rapport au vecteur K). Dans ce cas la loi de conservation de la quantité de mouvement peut se représenter de la façon indiquée sur la figure 435, autrement dit s'écrire :

$$K_1^2 = K^2 + K_2^2 - 2KK_2 \cos \vartheta. \tag{162.4}$$

Exprimons K_1^2 au moyen des quantités connues E, m_2, K et portons dans (162.4). Le carré de la quantité de mouvement de la particule 1

$$K_1^2 = E_1^2 - m_1^2. \tag{162.5}$$

Considérant les égalités (162.1) et (162.3), il vient

$$K_1^2 = E_1^2 + K^2 - (E - m_2)^2. \tag{162.6}$$

Rappelons que

$$E_2^2 = K^2 + m_2^2.$$

La loi de conservation de l'énergie (162.3) prend alors la forme:

$$E_1 = E - \sqrt{K^2 + m_2^2}. \tag{162.7}$$

En le portant dans (162.6) et puis dans (162.4), on aboutit à l'égalité suivante:

$$\left(E - \sqrt{K_2^2 + m_2^2}\right)^2 = (E - m_2)^2 + K_2^2 - 2KK_2 \cos \vartheta.$$

En éliminant le radical, on obtient l'équation définitive

$$E^2K_2^2 = K^2K_2^2 \cos^2 \vartheta + 2Em_2KK_2 \cos \vartheta, \tag{162.8}$$

reliant les quantités K, E, m_2 connues et l'inconnue K_2 pour toute grandeur de l'angle ϑ. De là on peut tirer toutes les valeurs possibles de la quantité de mouvement de la particule 2 après le choc.

Posons

$$K_2 \cos \vartheta = x, \quad K_2 \sin \vartheta = y$$

et portons dans (162.8). On obtient alors l'équation de la courbe donnant toutes les valeurs possibles de l'extrémité du vecteur K_2. Cette équation

$$E^2 (x^2 + y^2) = K^2x^2 + 2EKm_2x \tag{162.9}$$

est l'équation de l'ellipse passant par l'origine des coordonnées $x = y = 0$, l'origine du vecteur K. Les demi-axes de l'ellipse sont:

le long de l'axe x

$$a = \frac{m^2E_1}{E^2 - K^2} K, \tag{162.10}$$

parallèlement à l'axe y

$$b = \frac{m_2}{\sqrt{E^2 - K^2}} K. \tag{162.11}$$

Notons que $b < a$, car

$$b = a \sqrt{1 - \frac{K^2}{E^2}}. \tag{162.12}$$

En transformant la valeur de a, on trouve que pour $m_1 > m_2$ $2a < K$; pour $m_1 < m_2$, on aura $2a > K$ et, évidemment, pour $m_1 = m_2$ $2a = K$. En effet, en tenant compte de (162.1) et (162.3),

on trouve

$$E^2 - K^2 = 2E_n m_2 + m_1^2 + m_2^2 = 2Em_2 + m_1^2 - m_2^2. \quad (162.13)$$

Portant cette expression dans (162.10), il vient

$$a = \frac{K}{\left[2 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{|Em_2|}\right]}. \quad (162.14)$$

D'où s'ensuit ce qui a été dit précédemment.

Ainsi donc pour $m_1 > m_2$, l'ellipse décrite par l'extrémité du vecteur K_2 aura la forme montrée sur la figure 436. Après le choc les deux particules se précipitent toujours vers l'avant suivant la

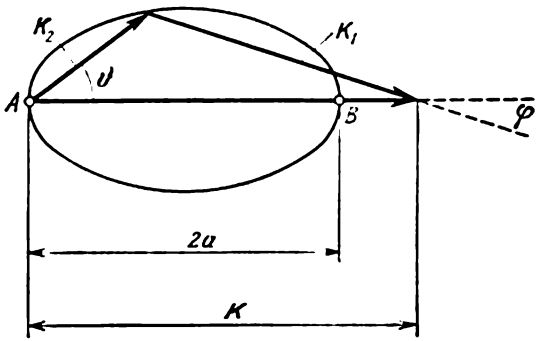


Fig. 436

direction de K. L'angle ϑ peut prendre toute valeur de $\pi/2$ à 0, l'angle $\varphi < \varphi_{max}$, φ_{max} étant inférieur à $\pi/2$. A une valeur de φ correspond, en général, deux valeurs de ϑ. Le point B marque le choc « frontal », les deux particules se mouvant après le choc dans

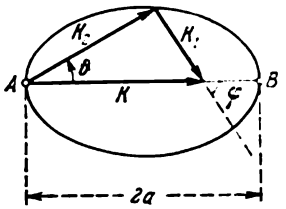


Fig. 437

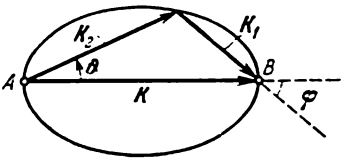


Fig. 438

la direction de K. Le point A est le point de « fuite » (la particule 1 passe à côté de la particule 2, qui est au repos, sans la heurter et sans entrer en interaction avec elle, $K_1 = K$).

Pour $m_1 < m_2$, l'image des impulsions possibles après la collision est un peu différente, elle est montrée à la figure 437. L'angle de déviation de la particule incidente φ peut varier de 0 à π, la

particule 1 pouvant rebrousser chemin après le choc (par « réflexion »). Le point B correspondant au choc « frontal », la particule 1 rebondit en arrière, tandis que la particule 2 se précipite en avant dans la direction de K, avec $K_2 > K$. Le point A étant le point de « fuite ». A chaque valeur de ϑ correspond une valeur de φ.

Pour $m_1 = m_2$, l'image des collisions possibles est donnée à la figure 438. φ varie dans ce cas de 0 à $\pi/2$. Dans le choc « frontal » (point B) la particule 1 s'arrête, tandis que la particule 2 continue son chemin à la vitesse de la particule 1 avant le choc, $K_2 = K$, $\varphi = 0$.

Voyons maintenant le problème du choc élastique de deux particules dans le référentiel du « centre des masses ». Dans ce référentiel la quantité de mouvement sommée est nulle, donc les deux particules se déplaceront l'une à l'encontre de l'autre et après le choc rebondiront avec des quantités de mouvement égales et opposées. La vitesse du centre des masses (c.m.) du système de particules v se déduira de l'égalité connue qui (dans les unités adoptées) s'écrira ainsi

$$v = \frac{\sum K_i}{\sum E_i}.$$

Dans le cas considéré la vitesse du système du c.m. par rapport au référentiel de laboratoire est

$$v = \frac{K}{E}. \tag{162.15}$$

Les lois de conservation dans le référentiel c.m. de la quantité de mouvement et de l'énergie sont:

avant le choc

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = 0, \quad e_1 + e_2 = E', \tag{162.16}$$

après le choc

$$\varkappa_1^* + \varkappa_2^* = 0, \quad e_1^* + e_2^* = E,$$

où $\varkappa$ est l'impulsion correspondante de la particule et e son énergie.

On peut déduire des lois de conservation et de la constance des masses de repos que

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_1^* = \varkappa_2^* = \varkappa. \tag{162.17}$$

En effet, recourant à la géométrie, représentons sur la figure 439 la loi $e^2 = \varkappa^2 + m^2$ pour chacune des particules avant le choc, en remplissant la condition $\varkappa_1 = \varkappa_2$. Comme $e_1^* + e_2^* = e_1 + e_2$, la distance OA doit alors être égale à $\varkappa_1^* = \varkappa_2^* = \varkappa$. D'où il suit

$$e_1 = e_1^*, \quad e_2 = e_2^*. \tag{162.18}$$

La valeur absolue de l'impulsion de chacune des particules est la même avant et après la collision, c'est la principale simplification de l'image du choc dans le référentiel c.m. Seule la direction de

la quantité de mouvement des particules peut se modifier après le choc (fig. 440), l'angle ψ étant quelconque.

Le référentiel c.m. se meut à la vitesse v dans la direction de K par rapport au référentiel de laboratoire et, par suite, la particule 2, qui y est au repos, possède avant le choc dans le référentiel c.m. l'impulsion

$$\varkappa_2 = -\gamma m_2 v,$$

où $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ comme toujours. Il s'ensuit donc conformément à (162.17) que

$$\varkappa = \gamma m_2 v, \tag{162.19}$$

tandis que l'énergie de la particule 2 dans le référentiel c.m. est

$$e_2 = \gamma m_2 - e_2^*. \tag{162.20}$$

On peut écrire la grandeur de l'énergie de la particule 1 dans le référentiel c.m. en appliquant les lois de transformation de la quantité

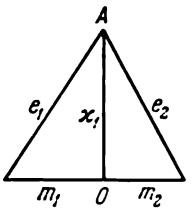


Fig. 439

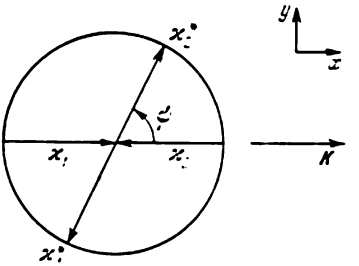


Fig. 440

de mouvement et de l'énergie, mais cela ne présente pas d'utilité pour la suite.

Passons maintenant du référentiel c.m. de nouveau dans le référentiel de laboratoire et cherchons dans ce référentiel le vecteur de l'impulsion K_2 de la seconde particule après le choc. Désignons la projection du vecteur K_2 sur la direction de K (ou de v) par x et sur la perpendiculaire à v par y. Dans ce cas, tenant compte des notations de la figure 440 et en appliquant la formule de transformation de l'impulsion du système c.m. mobile dans le référentiel de laboratoire, on peut écrire :

$$x = \gamma (\varkappa \cos \psi + v e_2) = \gamma \varkappa (1 + \cos \psi), \tag{162.21}$$

$$y = \varkappa \sin \psi \tag{162.22}$$

(voir (162.19) et (162.20)). Eliminant ψ de ces équations, on obtient l'équation de l'ellipse :

$$\left(\frac{x}{\gamma\varkappa} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{\varkappa}\right)^2 = 1. \tag{162.23}$$

C'est justement l'équation de l'ellipse (162.9), déjà citée, qui passe par l'origine des coordonnées ($x = y = 0$) et représente les extrémités du vecteur quantité de mouvement de la seconde particule après le choc. Les demi-axes de cette ellipse

$$a = \gamma\varkappa, \quad b = \varkappa,$$

sont évidemment égaux aux valeurs (162.10) et (162.11), si l'on tient compte de (162.15) et (162.19).

La seconde méthode est plus commode, car les lois du choc s'expriment dans le référentiel c.m. de façon plus simple.

Si le choc est mou et les masses au repos varient après le choc, dans le référentiel c.m. les impulsions après le choc sont alors égales et opposées, mais leur grandeur est différente de celle qu'elle était avant le choc. Les calculs deviennent plus compliqués et il est de même préférable de les effectuer dans le référentiel c.m.

Les lois de collisions des particules en mécanique ordinaire (de Newton) peuvent se déduire des relations relativistes en posant $u \ll c$, autrement dit on doit négliger la grandeur K devant celle de m_1. Il est facile de voir que dans les unités SI cette condition s'écrit ainsi : $m_1u_1 \ll m_1c$, où u_1 est la vitesse de la particule 1 avant le choc. Il s'ensuit de (162.1) et (162.3) :

$$E = m_2 + \sqrt{K^2 + m_1^2},$$

et dans l'approximation adoptée

$$E = m_1 + m_2.$$

Donc dans les formules (162.10) et (162.11), on néglige K^2 devant E^2 et il vient

$$a = \frac{m_2 E}{E^2 - K^2} K \approx \frac{m_2}{E} K = \frac{m_2}{m_1 + m_2} K,$$

$$b = \frac{m_2}{\sqrt{E^2 - K^2}} K \approx \frac{m_2}{E} K = \frac{m_2}{m_1 + m_2} K.$$

L'ellipse dégénère en un cercle passant par l'origine du vecteur K (comme il a été trouvé au § 34).

Les résultats de la théorie de la relativité, traduisant la *mécanique d'Einstein*, ont été non seulement confirmés de façon complète par des expériences effectuées en laboratoire dans des domaines différents de la physique (en premier lieu dans la physique atomique et nucléaire), mais ont également été à l'origine de remarquables progrès de la physique durant ces dernières décennies. Ces progrès de la physique ont à leur tour contribué au développement de nouvelles applications techniques, comme, par exemple, les puissantes centrales et moteurs fonctionnant au combustible nucléaire, etc. On peut donc affirmer que l'*exactitude des lois de la mécanique d'Einstein, comme des lois de la mécanique de Newton, trouve sa confirmation dans les applications techniques humaines.*

INDEX ALPHABÉTIQUE

Abstractions scientifiques 7
Accélération 17, 24
— centripète 38
— rotatoire 166
Adhérence 267
— de roulement 273
Ailerons 426
Allongement relatif 297, 317
Amortisseur dynamique 492
Ampère 63
Amplitude des oscillations harmoniques 444
Analyse harmonique 470
Angle d'attaque 414
— d'incidence critique 424
Archimède (théorème fondamental) 359
Atmosphère physique 352
— technique 352
Attraction des corps 279
Auto-oscillateurs 475
Auto-oscillations 477
— discontinues 480
Axe instantané de rotation 212, 229
— de rotation 181
— de rotation libre 223, 224
Axes principaux de rotation 236
— des tensions principales 315

Bar 352
Battements 483
Bernoulli (formule de) 372
Bras de levier 183

Candela 63
Centre d'inertie 195
— — du corps solide 195
— d'oscillation du pendule composé 446
— de pesanteur 195
Choc central 120
— des corps plastiques 129
— élastique 120
— parfaitement mou de deux corps 119
Cinématique du mouvement d'un corps solide 226
— du point 15
Circulation 416, 418
Cisaillement pur 320
Clapeyron (équation de) 355
Coefficient d'amortissement 454
— de la force de frottement de repos 146
— du moment de frottement de roulement 276
de Poisson 301
— de restitution de la vitesse relative après le choc 129
— de rigidité 117
— — de la barre en torsion 310
— de traînée 400
— de viscosité 142
Composante normale de l'accélération 39
— tangentielle de l'accélération 39
Composantes vectorielles 28
Cône de lumière 572
— de Mach 432
Constante d'attraction 279
— des gaz 355
— de gravitation 279
Contraction des longueurs 546
Coordonnées 10
Corps anisotrope 302
— élastique 295
— gazeux 349
— isotrope 302
— liquides 349
— de référence 10, 45
— rigide absolu 179
— solides 349
Couche limite 399, 409
Couple de forces 204
— d'indices des tensions tangentielles 314
Courbe de résonance 459

Décibels 531
Décrément 455
— logarithmique 456

Déformation de cisaillement pure 307
— élastique 51
— non élastique 52
— résiduelle 52
Déformations du corps 316
— résiduelles 299
Densité 354
Déportement 272
Dimensions des grandeurs physiques 11
Domaine des déformations élastiques 299
— — plastiques 298, 300
— de fluidité 298
— de proportionnalité 300
Dynamomètre à ressort 52
Dyne 51, 63

Echo-sondeur 533
Ecoulement d'un fluide sur l'aile 416
— laminaire 398
— non permanent du liqude 363
— permanent du liquide 363
— plan 416
— turbulent 398
Effet Magnus 422
— piézo-électrique 532
Effort tranchant 337
Efforts 296
Energie 112, 560
— cinétique 117
— — d'un corps en rotation 192
— de l'onde acoustique 502
— potentielle 130
— de déformation 116, 327
— — effective 293
— — de la gravitation 284
— totale du corps mobile 561
Equation d'Euler 259
— de Mechtcherski 105
— de l'onde plane longitudinale 508
Equivalence masse-énergie 562
Expérience physique 6
Expression analytique de l'onde plane mobile de forme sinusoïdale 500

Filets 364
Flux énergétique 505
— massique 389
Force 49, 57
— centripète 85
— de frottement de glissement 148
— — de repos 140
— d'inertie centrifuge 158
— physique 49
— poids 50
— de résistance frontale 400
résultante 53
Forces extérieures 180
— de frottement 139
— gyroscopiques 254
— harmoniques 472
— d'inertie 155
— intérieures 179, 296, 305
— de liaison 81
— de masse parallèles 199
Formule barométrique 358
— de Tsiolkovski 109
Formules de dimensions 12
Freinage 272
Fréquence circulaire des oscillations harmoniques 441
— — propre 445
— des oscillations 441
Front d'onde 427, 500
Frottement d'adhésion 267
— — en roulement 150
— de glissement 267
— de roulement 150, 267, 273
— à sec 140, 146
— visqueux 140, 141

Gouvernes d'altitude 426
Gradient 368
Gramme 62
Grandeur absolue du vecteur 27
— du chemin 27
Grandeurs physiques 6
— vectorielles 27
Gyroscope 246
— libre 247

Harmonique fondamentale 472
Hertz 441

Impesanteur 345
Impulsion 64, 553
— d'une force 101
Inertie 61
Intégrale 21
Interférence 509
Intervalle 568
— semblable à la lumière 572
— spatialement semblable 572
— spatio-temporel 571
Invariants 536, 566

Joukovski (condition de) 420
Joukovski-Kutta (formule de) 421

Kelvin 63
Kepler (première loi de) 286
— (seconde loi de) 288
— (troisième loi de) 289
Kilogramme 12, 62
Kilogramme-force 51

Liaison parfaite 83
Liaisons 81
Liquide parfait 363
Loi d'Amonton 147
— d'attraction universelle 279
— de Baer 172
— de conservation du moment de la quantité de mouvement 190
— de Coulomb 149
— fondamentale de la dynamique appliquée à la particule d'un fluide parfait 367
— — — du corps solide 242
— de Hooke 299
— du mouvement du centre d'inertie du corps 199
— de similitude mécanique 405
— de la variation de la quantité de mouvement pour un écoulement en régime permanent 388
Lois fondamentales du mouvement 47
— du mouvement des corps à masse variable 103
— physiques 7
Longueur 9
— d'onde 501

Mariotte-Boyle (loi de) 354
Masse du corps 61
— efficace 119
— gravitationnelle 282
— inerte 62, 282
Matériaux fragiles 304
— visqueux 304
Mécanique des corps déformables 295
Mètre 9, 12
Module de cisaillement 308
— de compression transversale 301
— du vecteur 28
— de Young 299
Moment d'une force 183
— — par rapport au point 231
— d'inertie 186
— — de la section transversale 333
Moment de la quantité de mouvement 189
— — — du point 207
— — — de tout le corps 208
— de résistance de la section 334
Mouvement de l'axe du gyroscope 249
— du corps dans un référentiel non galiléen 155
— du corps solide 179
— d'un gyroscope libre 257
— plan 180
— — du corps 205
— rectiligne d'un point 16
— relatif 153
— uniforme 18
— uniforme et rectiligne 34
— de vitesse variable 34
Mouvements liés d'un corps 81
— propres du pendule 442

Newton 51, 63
Newton (première loi de) 57
— (seconde loi de) 64
— (troisième loi de) 66
Nœuds de l'onde stationnaire de déplacements 511
Nombre de Reynolds 400
Nutations 261

Onde acoustique plane sinusoïdale 499
— de choc 434
— de cisaillement 508
— mobile 510
— de pression d'explosion 434
— sonore sphérique 427
— stationnaire 511
Ondes 493
— circulaires 493
— longitudinales 494
— planes 494
— sphériques 493
— transversales 494
Origine du système des coordonnées 10
Oscillations 440
— complexes 470
— composées (petite période des) 485
— forcées 458
— harmoniques 441
— libres propres 453
— propres de la corde 518

Pascal 352
Pascal (principe de) 352
Patinage 271

Pendule de Foucault 172
— de Galilée 136
— de Maxwell 211
Période de battements 483
— des oscillations harmoniques 441
Phase 444
— initiale 444
Phénomène d'apesanteur 159, 160
— ondulatoire 441
— physique 6
Phone 531
Plan de glissement 302
Poids spécifique 354
Point critique 381
— matériel 16
Portance 414, 416
Précession 250
— pseudorégulière 261
— régulière 261
Pression 352
—dynamique 384
Principe de conservation de l'énergie 138
— — de la quantité de mouvement 92
— de relativité de Galilée 154, 534
— de superposition 510
Problèmes aux réactions hyperstatiques 340
Processus transitoire 470
Produit scalaire de deux vecteurs 30
— vectoriel de deux vecteurs 31
Produits d'inertie 236
Pseudo-période des oscillations amorties 454

Quadrivecteur 568, 570
— accélération 575
— impulsion 575
— vitesse 575
Quantité de mouvement 553
— — d'un corps 64, 200

Ralentissement de la marche des horloges 547
Réaction 392
Réactions de liaison 81
Référentiels galiléens 534
— non galiléens 154
Réflexion des ondes 513
Région d'agitation tourbillonnaire 411
Règle de la vis à filet droit 31
Relativité de la simultanéité 545
Résistance due aux remous 404
— frontale des corps à l'écoulement 400
— d'onde acoustique du milieu 528
Résonance 458
Résonateur 478
Résultante des forces extérieures 203
Rigidité 117
Rotation 180, 181
— de l'axe d'un gyroscope gêné 256

Seconde 10, 12
Second point critique 419
Seuil d'audibilité 530
— de la douleur 531
— d'élasticité 299
— de proportionnalité 300
Sillage tourbillonnaire 404
Similitude géométrique 406
— mécanique 406
Stabilisateur 426
Statique 50
Striction magnétique 532
Surcharges 345
Surface libre 350
— d'onde 493
Système auto-oscillatoire 476
— isolé 204
Systèmes d'axes absolus (galiléens) 153

Taux d'onde progressive 513
Temps 9
— de relaxation 455
Tenseur 234
— de cisaillement 322
— de déformations 316
— du moment d'inertie 234
— de traction 323
Tension 297
Tensions 305, 345
Théorème de la constance du flux de masse 365
— de Huygens-Steiner 217, 220
— sur les moments d'inertie par rapport aux axes parallèles 241
Théorie du choc élastique de deux particules 578
Torricelli (formule de) 375
Tourbillon 418
Traînée 400
— d'onde 432
Trajectoire 27
— hyperbolique 291
Transformation de l'impulsion 557
— de Lorentz 544
— de la masse 557

— des vitesses 549
Transformations de Galilée 535
Translation 180

Valeur instantanée de la vitesse 18
Vecteur 27, 32
— glissant 182
— polaire 182
— unité 29
— vitesse angulaire 162
Ventres de l'onde stationnaire de déplacements 512
Vibrations sonores 525
— ultrasonores 532
Vitesse 17
— angulaire du corps 182
— — de précession 251
— cosmique (première) 291
— cosmique (seconde) 291
— cosmique (troisième) 292
— moyenne 17
— d'un point 17, 33
— de propagation de l'onde 495
Volume sonore 531

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 5

PREMIERE PARTIE

MÉCANIQUE DU MOUVEMENT DES CORPS SOLIDES

Chapitre premier. CINÉMATIQUE DU POINT 15

§ 1. Mouvement des corps 15
§ 2. Mouvement rectiligne d'un point 16
§ 3. Vitesse d'un point dans un mouvement rectiligne 17
§ 4. Relation entre la vitesse et la distance parcourue 21
§ 5. Accélération dans un mouvement rectiligne d'un point 24
§ 6. Mouvement d'un point dans l'espace 25
§ 7. Propriétés essentielles des vecteurs 27
§ 8. Vitesse d'un point 33
§ 9. Accélération d'un point mobile dans un plan. Accélération centripète 36
§ 10. Accélération d'un point mobile dans l'espace 42
§ 11. Espace, temps et systèmes de référence 45

Chapitre II. LOIS FONDAMENTALES DU MOUVEMENT : LOIS DE LA DYNAMIQUE 48

§ 12. Mouvement et interaction des corps 47
§ 13. Force 49
§ 14. Modes de mesures des forces constantes 50
§ 15. Conditions d'équilibre des forces agissant sur un point 52
§ 16. Force et mouvement (première loi de Newton) 56
§ 17. Seconde loi de la dynamique de Newton 59
§ 18. Masse du corps 61
§ 19. Forme générale de la seconde loi de Newton 64
§ 20. Troisième loi de Newton 66
§ 21. Forces, la deuxième et la troisième lois de Newton 67
§ 22. Mouvement d'un corps sous l'effet de forces données 74
§ 23. Mouvements liés d'un corps 81

Chapitre III. QUANTITÉ DE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE CORPS 92

§ 24. Principe de conservation de la quantité de mouvement 92
§ 25. Transmission de la quantité de mouvement d'un corps à l'autre 96
§ 26. Impulsion d'une force 101
§ 27. Lois du mouvement des corps à masse variable 103

Chaptire IV. TRAVAIL ET ÉNERGIE 111

§ 28. Notion de l'énergie 111
§ 29. Travail et énergie 112
§ 30. Travail de la force 115

§ 31. Energie potentielle de déformation 116
§ 32. Energie cinétique du corps 117
§ 33. Choc parfaitement mou de deux corps 119
§ 34. Choc élastique 120
§ 35. Choc des corps plastiques 129
§ 36. Energie potentielle 130
§ 37. Modification de l'énergie du corps dans un champ de gravitation. Principe de conservation de l'énergie 136

Chapitre V. FORCES DE FROTTEMENT 139

§ 38. Différents genres de frottement 139
§ 39. Frottement visqueux 141
§ 40. Chute de la sphère dans un milieu visqueux 143
§ 41. Frottement à sec 146
§ 42. Force de frottement de glissement 148

Chapitre VI. MOUVEMENT RELATIF 153

§ 43. Systèmes d'axes absolus (galiléens) 153
§ 44. Mouvement du corps dans un référentiel non galiléen. Forces d'inertie 155
§ 45. Forces d'inertie agissant sur un corps au repos dans un référentiel en rotation 158
§ 46. Phénomène d'apesanteur 159
§ 47. Liaison entre les vecteurs des vitesses angulaire et linéaire du point 162
§ 48. Forces d'inertie agissant sur un corps mobile dans un référentiel en rotation 163
§ 49. Influence de la rotation de la Terre sur le mouvement des corps. Pendule de Foucault 172

Chapitre VII. MOUVEMENT DU CORPS SOLIDE 179

§ 50. Translation et rotation du corps solide 179
§ 51. Conditions d'équilibre du corps solide ayant un axe fixe 182
§ 52. Dynamique d'un corps en rotation autour d'un axe fixe 184
§ 53. Moment de la quantité de mouvement 189
§ 54. Energie cinétique d'un corps en rotation 192
§ 55. Centre de pesanteur (de gravité) et centre d'inertie du corps solide 195
§ 56. Loi du mouvement du centre d'inertie du corps 199
§ 57. Mouvement plan du corps 205
§ 58. Roulement du cylindre sur un plan. Pendule de Maxwell 211
§ 59. Moments d'inertie de certains corps. Théorème de Huygens-Steiner 217
§ 60. Energie cinétique du corps en mouvement de translation et de rotation 222
§ 61. Axes de rotation libre 223
§ 62. Cinématique du mouvement d'un corps solide 226
§ 63. Moment de la force par rapport au point et moment de la quantité de mouvement du corps solide 231
§ 64. Moment cinétique (d'impulsion) du corps solide et moment d'inertie 233
§ 65. Loi fondamentale de la dynamique du corps solide 242
§ 66. Gyroscopes 246
§ 67. Mouvement de l axe du gyroscope 249
§ 68. Forces gyroscopiques 254
§ 69. Rotation de l'axe d'un gyroscope gêné 256
§ 70. Mouvement d'un gyroscope libre (à trois degrés de liberté) 257
§ 71. Interprétation des «effets gyroscopiques» 261

Chapitre VIII. FROTTEMENT DE ROULEMENT 267

§ 72. Forces engendrées par le roulement. Frottement de glissement dans le roulement du cylindre 267
§ 73. Adhérence dans le roulement 270
§ 74. Freinage et phénomène de déportement 272
§ 75. Frottement de roulement 273

Chapitre IX. ATTRACTION DES CORPS 279

§ 76. Loi d'attraction universele 279
§ 77. Masse « inerte » et masse « gravitationnelle » 281
§ 78. Energie potentielle de la gravitation 284
§ 79. Lois fondamentales de la mécanique céleste 286
§ 80. Mouvement des satellites terrestres et des engins spatiaux . . . 289

DEUXIÈME PARTIE

MÉCANIQUE DES CORPS DÉFORMABLES

Chapitre X. MÉCANIQUE DES CORPS SOLIDES DÉFORMABLES 295

§ 81. Notion de corps élastique. Forces et déformations à la traction 295
§ 82. Nature des phénomènes dans un corps déformé. Propriétés des matériaux 301
§ 83. Forces intérieures et tensions 305
§ 84. Tensions et déformations au cisaillement 307
§ 85. Tensions dans un corps élastique. Cas général 310
§ 86. Petites déformations du corps 316
§ 87. Dépendance entre les tensions et les déformations 320
§ 88. Energie potentielle de déformation 327
§ 89. Forces et déformations à la flexion des barres (poutres) 329
§ 90. Détermination de la flexion des poutres 335
§ 91. Déformation des appuis 339
§ 92. Accélérations (surcharges), impesanteur et tensions 345

Chapitre XI. CORPS LIQUIDES ET GAZEUX EN ÉTAT D'ÉQUILIBRE . 349

§ 93. Corps solides, liquides et gazeux 349
§ 94. Notion de pression 350
§ 95. Relation entre la densité du gaz et la pression 354
§ 96. Distribution de pression dans un liquide au repos 355
§ 97. Distribution de la pression dans le gaz 357
§ 98. Equilibre de corps flottant à la surface du liquide 359
§ 99. Conditions d'équilibre d'un corps immergé dans le liquide ou le gaz 360

Chapitre XII. ÉCOULEMENT DES CORPS LIQUIDES ET GAZEUX. 363

§ 100. Ecoulement du liquide en régime permanent. 363
§ 101. Loi fondamentale de la dynamique appliquée à la particule d'un fluide parfait 367
§ 102. Formule de Bernoulli pour un liquide incompressible en régime permanent 371
§ 103. Ecoulement du liquide d'un vase 373
§ 104. Pression du liquide s'écoulant dans un tube de section variable 377

§ 105. Ecoulement du liquide ou du gaz sous pression dans un vase . . 378
§ 106. Pression au point critique de l'écoulement sur un corps 381
§ 107. Variation de la pression dans la section transversale du filet 384
§ 108. Répartition des pressions dans un liquide en rotation 386
§ 109. Quantité de mouvement du liquide et du gaz 388
§ 110. Réaction de l'eau courante 389
§ 111. Ecoulement d'un liquide visqueux dans une conduite 394

Chapitre XIII. ACTION DU COURANT FLUIDE SUR UN CORPS 400

§ 112. Résistance frontale des corps à l'écoulement 400
§ 113. Loi de similitude mécanique dans l'écoulement des corps 405
§ 114. Couche limite 409
§ 115. Mesure des forces s'exerçant sur le corps dans l'écoulement . . 412
§ 116. Portance de l'aile de l'avion 414
§ 117. Ecoulement d'un fluide sur l'aile. Circulation et portance 416
§ 118. Dépendance de la portance de l'aile de l'incidence. Résistance frontale de l'aile, ou traînée 423
§ 119. Forces engendrées au cours du vol de l'avion 426
§ 120. Propagation des perturbations de pression dans un fluide compressible et mouvement du corps avec une vitesse supersonique 427
§ 121. Nature des ondes pour des variations de pression importantes et mouvement du corps aux grandes vitesses 433
122. Ecoulement supersonique dans une conduite 436

TROISIÈME PARTIE

OSCILLATIONS ET ONDES. ÉLÉMENTS D'ACOUSTIQUE. FONDEMENTS DE LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

Chapitre XIV. OSCILLATIONS 440

§ 123. Phénomènes périodiques 440
§ 124. Oscillations harmoniques 441
§ 125. Oscillations propres et variation de l'énergie au cours des oscillations 448
§ 126. Oscillations libres amorties 453
§ 127. Oscillations forcées et résonance 458
§ 128. Dépendance entre l'amplitude des oscillations forcées et la pulsation 460
§ 129. Vibrations de l'arbre portant un disque 466
§ 130. Processus transitoires et oscillations complexes. Analyse harmonique 470
§ 131. Auto-oscillations 475
§ 132. Auto-oscillations du système à plusieurs degrés de liberté . . . 481
§ 133. Analyse théorique des battements 484
§ 134. Pulsations propres des pendules couplés 488
§ 135. Oscillations propres de trois pendules couplés 488
§ 136. Oscillations entretenues dans des systèmes complexes 490

Chapitre XV. VIBRATIONS EN MILIEU CONTINU 493

§ 137. Ondes 493
§ 138. Onde acoustique plane sinusoïdale 499

§ 139. Energie de l'onde acoustique 502
§ 140. Ondes planes dans un gaz et un milieu homogène élastique 506
§ 141. Superposition d'ondes (interférence) 509
§ 142. Réflexion des ondes 513
§ 143. Vibrations propres de la corde et de l'air dans un tuyau 518

Chapitre XVI. ÉLÉMENTS D'ACOUSTIQUE 525

§ 144. Généralités 525
§ 145. Réflexion des ondes sonores sur un obstacle 526
§ 146. Propagation des ondes sonores 529
§ 147. Perception des sons 530
§ 148. Vibrations ultrasonores 531

Chapitre XVII. ÉLÉMENTS DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE 345

§ 149. Principe de la relativité de Galilée 534
§ 150. Invariance de la célérité de la lumière. 538
§ 151. Simultanéité des événements 539
§ 152. Transformation de Lorentz 542
§ 153. Conséquences des transformations de Lorentz 544
§ 154. Quantité de mouvement (impulsion) 553
§ 155. Dépendance entre la masse et la vitesse de mouvement 554
§ 156. Transformation de l'impulsion et de la masse 557
§ 157. Energie 560
§ 158. Quantité de mouvement et énergie d'un système de particules 564
§ 159. Invariants 566
§ 160. Quadrivecteur et intervalle 568
§ 161. Mécanique relativiste 573
§ 162. Théorie du choc élastique de deux particules 578

Index alphabétique 585

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse:
2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique